

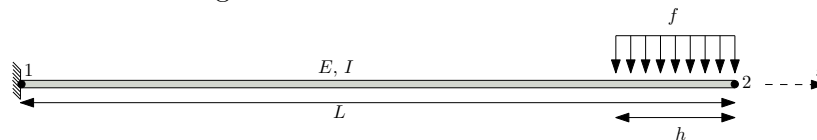
Examen – Modélisation Numérique des Solides et Structures : partie pratique.

Notes et livre du cours autorisés
1h30, 48 points ($\frac{2}{3}$ de la note de l'examen écrit)

Indication : Aucun des exercices ne nécessite de calculs lourds

Exercice 1 : Poutres sans effort normal — 28 points

1. Considérez la poutre suivante **qui ne travaille pas en traction** et est soumise à une charge répartie sur une distance h comme sur la figure ci dessous.



Les valeurs numériques données sont

$$L = 1, \quad h = 1/2, \quad f = 384$$

(unités internationales)

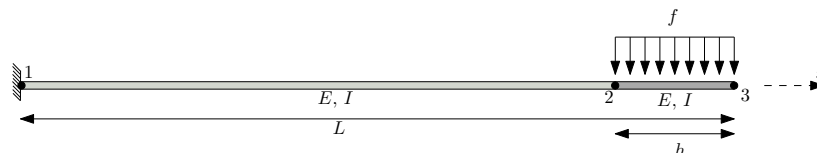
- (a) Donner la liste des degrés de libertés ainsi que la matrice de raideur adéquate pour ce problème en fonction de EI (inutile de faire la démonstration). (1 point)
- (b) Le vecteur des forces consistantes doit être de la forme :

$$[F] = \begin{bmatrix} f_1 \\ 10 \\ 156 \\ -22 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Détaillez le calcul de f_1 en partant de sa forme intégrale (indice : la valeur numérique obtenue doit être un entier) (2 points)

- (c) Donner la matrice de raideur réduite qui prend en compte les blocages. (2 points)
- (d) Donner les déplacements subits par la poutre en fonction de EI . (1 point)

2. En faisant un raffinement du problème avec deux poutres comme ci dessous :



- (a) Identifiez les degrés de libertés (1 point)
- (b) Donner la matrice de raideur totale de ce problème (2 points)
- (c) Donner la matrice de raideur réduite qui prend en compte les blocages. (2 points)
- (d) Donner le vecteur de forces consistantes (2 points)

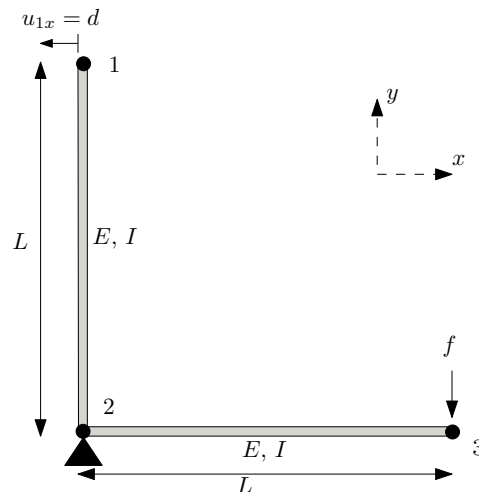
(e) En considérant les valeurs de déplacement suivantes

$$u_{2v} = \frac{28}{EI}, \quad u_{2\theta} = \frac{96}{EI} \quad (2)$$

trouvez les valeurs de u_{3v} et $u_{3\theta}$. (2 points)

(f) Que pouvez vous en conclure par rapport à la partie 1 ? (1 point)

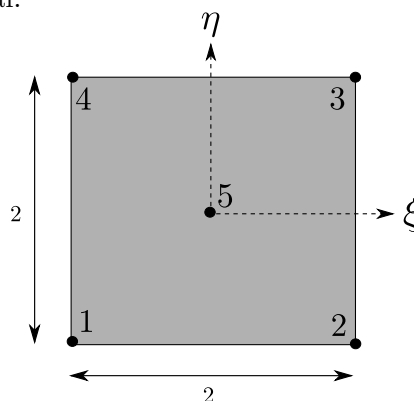
3. On considère maintenant le bras de levier suivant :



- Dessinez la déformée de ce problème (au nœud 2, seuls les déplacements en x et y sont fixés). (1 point)
- Donnez la matrice de connectivité ainsi que la matrice de numéro d'équations. (2 points)
- Calculez la matrice de raideur pour ce problème en fonction de EI . (2 points)
- Donner la matrice de raideur réduite. (2 points)
- Calculer le vecteur de forces consistantes en identifiant les réactions. (2 points)
- Calculer le vecteur de forces consistantes réduit prenant en compte le déplacement imposé $u_{1x} = d$. (2 points)
- Comment procéderiez vous pour trouver tous les déplacements ? et toutes les réactions ? (1 point)

Exercice 2 : Structure en contraintes plane — 20 points

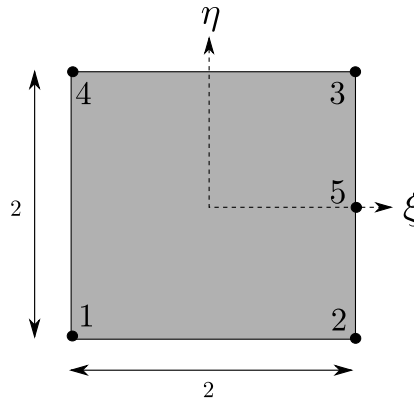
1. Élément fini Q5 avec nœud central.



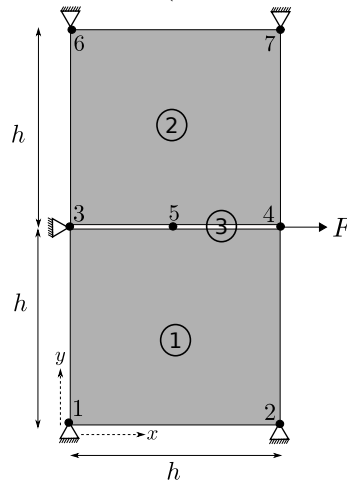
- Pour le système d'axes (coordonnées naturelles) donné ci-dessus, expliciter les fonctions d'interpolation de l'élément (indication : commencer par évaluer N5, et ensuite modifier les fonctions de forme de l'élément bilinéaire classique Q4 pour satisfaire les propriétés des fonctions de forme). (4 points)

- (b) Vérifier que la somme des fonctions d'interpolation vaut 1 en tout point. (2 points)
 (c) Cet élément passe-t-il le «patch test»? Le vérifier pour un cas de traction uniaxiale. (2 points)

2. Élément Q5 avec un nœud latéral



- (a) Pour un nouvel élément Q5 (nœud ajouté sur le milieu d'un côté), expliciter les fonctions d'interpolation pour la géométrie donnée ci-dessus. (4 points)
 (b) Vérifiez que la somme des fonctions d'interpolation vaut 1 en tout point. (1 point)
 (c) Dessiner un schéma montrant comment cet élément peut être utilisé pour créer un maillage conforme avec transition entre des éléments Q4 à des éléments Q8. (1 point)
3. Considérez la structure rectangulaire suivante composée de deux éléments Q5 de la partie 2, et d'un élément barre (élément numéro 3) à trois nœuds (nœuds 3, 5 et 4).



- (a) Sans calculer les intégrales, donner la structure en bloc de la matrice de rigidité globale en explicitant seulement les coefficients qui proviennent de l'assemblage (les coefficients peuvent être écrits de façon générique, avec k_{ij}^a , pour le coefficient ij de la de l'élément a). (4 points)
 (b) Mettez en valeur les inconnues dans le système d'équation $Kd = F$, et expliquer comment vous pourriez obtenir les inconnues en déplacement (1 point)
 (c) Dessinez schématiquement la forme du champ de déplacement dans chacun des éléments. (1 point)