EPFL 2015-2016 **Nom :** ____________________

GC BA6 **Prénom :** ____________________

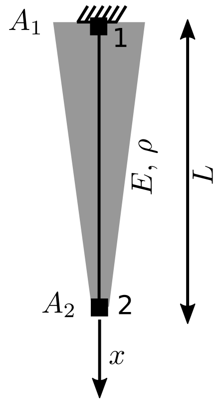
Examen – Modélisation Numérique des Solides et Structures : partie pratique.

Notes et livre du cours autorisés
1h30, 38 points ($\frac{2}{3}$ de la note de l'examen écrit)

Indication : Aucun des exercices ne nécéssite de calculs lourds

Exercice 1 : *Barre à section variable — 10 points*

Considérez la structure suivante modélisée par un élément barre à 2 nœuds

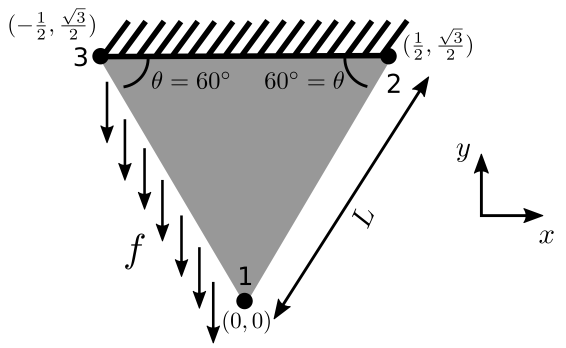


- Longueur L
- Section variant linéairement entre A_1 et A_2
- Structure sous poids propre
- Densité ρ constante
- Module de Young E constant
- Encastrement au nœud 1

1. Donnez l'expression de la matrice de raideur en fonction de E, L, A_1 et A_2. (2,5 points)
2. Calculez les forces consistantes dues au poids propre. (2,5 points)
3. Calculez les déplacements et réactions inconnues du système. (2,5 points)
4. Quel ordre d'interpolation conseilleriez-vous pour obtenir une solution numérique exacte ? Justifiez votre réponse. (2,5 points)

Exercice 2 : *Solide de forme triangulaire et élément T3 — 10 points*

Considérez la structure suivante, discrétisée par un élément triangulaire à 3 nœuds



- Le côté 2-3 est encastré.
- Le côté 1-3 est soumis à une charge verticale répartie f (N/m).
- Le nœud 1 est l'origine des axes.

1. Donnez les fonctions d'interpolation de chaque nœud. (2 points)
2. Calculez les forces consistantes pour le cas de chargement de la figure. (2 points)
3. Calculez la matrice $[B]$ pour $L = 1$. (2 points)

4. En considérant la loi constitutive d'un matériau élastique linéaire isotrope avec $E = 1[N/m^2]$, $\nu = 0$ et $L = 1[m]$, un ingénieur a obtenu une matrice de raideur de la forme :

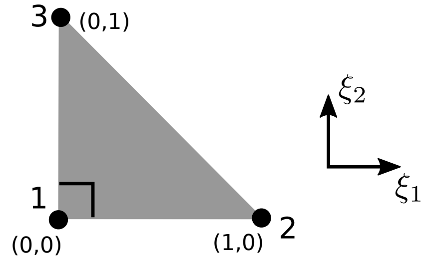
$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{12} & -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{12} & 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{12} & -\frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{12} & -\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{12} & -\frac{\sqrt{3}}{12} & \frac{7\sqrt{3}}{24} & \frac{1}{8} & -\frac{5\sqrt{3}}{24} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{5\sqrt{3}}{24} & \frac{1}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{24} \\ -\frac{\sqrt{3}}{12} & -\frac{\sqrt{3}}{12} & -\frac{5\sqrt{3}}{24} & \frac{1}{8} & \frac{7\sqrt{3}}{24} & -\frac{1}{8} \\ 2 & -\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{24} & -\frac{1}{8} & \frac{5\sqrt{3}}{24} \end{bmatrix}$$

Malheureusement, l'ingénieur débutant s'est trompé sur les coefficients K_{61} et K_{16} : recalculez ces coefficients. (2 points)

5. Résoudre le problème (trouver les déplacements inconnus) en considérant les conditions aux limites et $f = 1[N/m]$. (2 points)

Exercice 3 : *Élément T3 iso-paramétrique — 8 points*

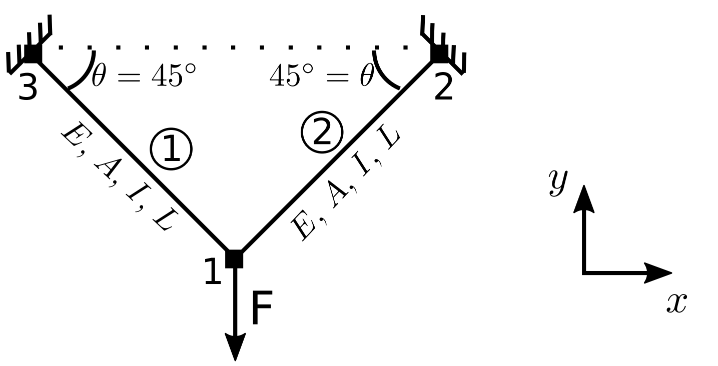
Il vous est maintenant demandé d'étudier la formulation iso-paramétrique. Vous devez considérer l'élément naturel suivant :



1. Donnez l'expression de la matrice de raideur dans le contexte des éléments iso-paramétriques. Expliquez tous les termes de l'équation proposée (pas de calcul demandé). (2 points)
2. Donnez les fonctions d'interpolation pour l'élément iso-paramétrique. (2 points)
3. Donnez l'expression du champ de coordonnées $x(\xi_1, \xi_2)$ et $y(\xi_1, \xi_2)$, où (x, y) sont les coordonnées tirées de l'élément "physique" de l'exercice 2, avec $L = 1$. (2 points)
4. Donnez l'expression de la matrice Jacobienne toujours dans le cas de l'élément de l'exercice 2. (2 points)

Exercice 4 : *Structure de poutres — 10 points*

Considérons cette structure avec 3 nœuds et deux éléments poutres



1. Combien de degrés de libertés contient cette structure ? Précisez lesquels sont fixés par les conditions limites. (3 points)
2. Étant donné la matrice de raideur locale des éléments poutres

$$[K^{locale}] = \frac{E}{L}\begin{bmatrix} A & 0 & 0 & -A & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12I}{L^2} & \frac{6I}{L} & 0 & -\frac{12I}{L^2} & \frac{6I}{L} \\ 0 & \frac{6I}{L} & 4I & 0 & -\frac{6I}{L} & 2I \\ -A & 0 & 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12I}{L^2} & -\frac{6I}{L} & 0 & \frac{12I}{L^2} & -\frac{6I}{L} \\ 0 & \frac{6I}{L} & 2I & 0 & -\frac{6I}{L} & 4I \end{bmatrix}$$

Donner les matrices de rotation qui permettent d'exprimer les matrices de raideur dans le système global pour les éléments 1 et 2 :

$$[K^2] = [R^2]^T[K^{locale}][R^2]$$

$$[K^1] = [R^1]^T[K^{locale}][R^1]$$

Une notation par bloc de R^1 et R^2 est attendue. Ne pas calculer $[K^1]$ et $[K^2]$. (3 points)

3. Résoudre le problème en trouvant le ou les déplacement(s) inconnu(s) (ne pas calculer les réactions). Application numérique : $E = 1,\ I = 100,\ A = 1, L = 1, F = 10$. (4 points)