**EPFL 2014-2015** **Nom :** ______________________________

**GC6** **Prénom :** ______________________________

## *Examen – Modélisation Numérique des Solides et Structures : partie pratique.*

*Notes et livre du cours autorisés*
*1h 30min, 30 points ($\frac{2}{3}$ de la note finale)*

**Exercice 1 :** ***Charpente – 12 points***

On considère la charpente d'un toit définie dans la Figure 1 ci-dessous. Le problème est considéré comme plan et les poutres comme des poutres de Bernoulli à 6 degrés de liberté.

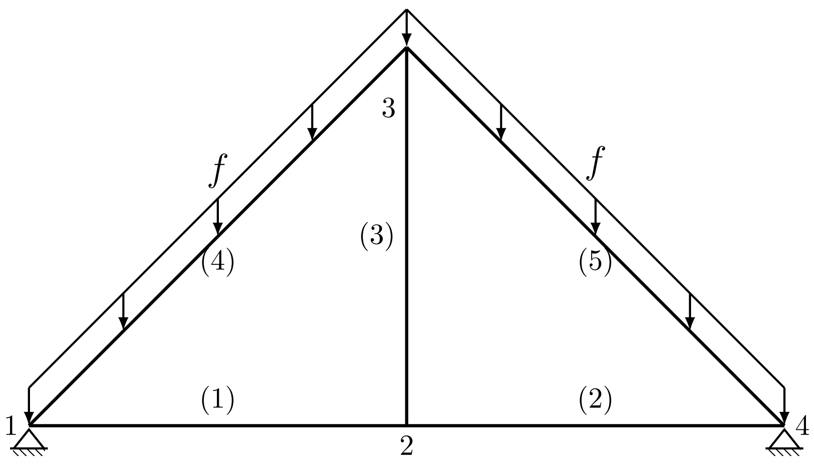


FIGURE 1 – Charpente 2D considérée, avec pour paramètres $E$, $A$, $I$, $f$. Les éléments (1), (2) et (3) sont de longueur $L$.

1. Simplifier le problème en prenant le minimum d'éléments. (2 points)
2. Calculer le vecteur de charge équivalente du au poids du toit $f$ et le transformer dans le repère global. (2 points)
3. Pour l'élément (5) écrire la matrice de rigidité dans le repère local et la transformer dans le repère global. (2 points)
4. Établir le profil du système d'équations en déplacement (pour le système simplifié déterminé question 1, sans détailler les coefficients) qui prend en compte les conditions aux limites. (4 points)
5. Expliquer, sans la faire, la procédure à suivre pour calculer les efforts résultants dans chaque élément. (1 point)
6. Expliquer, sans la faire, la procédure à suivre pour calculer les réactions aux appuis. (1 point)

**Exercice 2 :** ***Q4/Q6 éléments – 18 points***

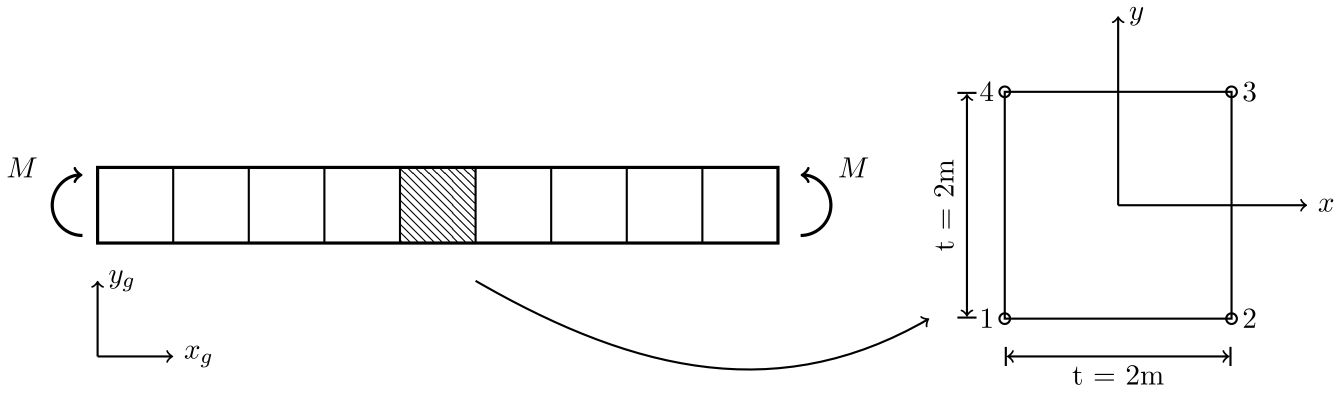


Figure 2 – Gauche : structure élancée pleine (déformation plane, d'épaisseur $t = 2\text{m}$) soumise à un chargement de flexion. Droite : élément quadrangle à 4 nœuds

1. Rappeler les fonctions d'interpolation du quadrangle à 4 nœuds représenté Figure 2, à droite. (1 point)
2. Pour la configuration déformée représentée ci-dessous (Figure 3) :

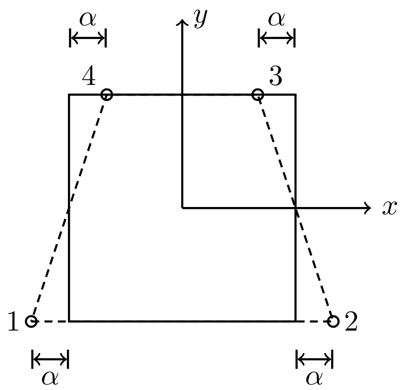


Figure 3 – Quadrangle à 4 nœuds sous un chargement de flexion

   Donner le déplacement nodal aux 4 nœuds, et $u(x, y)$ et $v(x, y)$ dans tout l'élément. (2 points)
3. Une sollicitation de flexion pure dans la théorie des poutres élancées est définie par :
   (i) la déformation axiale $\varepsilon_{xx}$ est uniquement fonction de la hauteur $y$.
   (ii) les autres composantes de la déformation sont nulles $\varepsilon_{yy} = \gamma_{xy} = 0$.
   Selon cette définition, les quadrangles à 4 nœuds permettent-ils de prendre en compte exactement une sollicitation de flexion ? Expliquez (par exemple avec un schéma) et justifiez analytiquement. (1,5 points)
4. Nous considérons maintenant des quadrangles Q6 à 12 inconnues. Ces quadrangles Q6 sont des quadrangles à 4 nœuds auxquels deux fonctions d'interpolation (sous la forme d'un enrichissement sans nœud correspondant) ont été ajoutées :

$$N_5 = 1 - x^2$$
$$N_6 = 1 - y^2$$

Le champ de déplacements de l'élément est donc défini comme :

$$u = \sum_{i=1}^{4} N_i u_i + N_5 a_1 + N_6 a_2$$
$$v = \sum_{i=1}^{4} N_i v_i + N_5 a_3 + N_6 a_4.$$

Comment ces éléments améliorent la prise en compte de la flexion ? Expliquez (par exemple géométriquement) et justifiez analytiquement. (1,5 points)

5. Déterminer les inconnues $a_i \quad \forall i \in 1, 2, 3, 4$ qui correspondent à une situation de flexion pure (conditions (i) et (ii), confère question 3) entraînant le déplacement des sections droites représenté Figure 3. (3 points)
6. Combien de points de Gauss sont nécessaires pour calculer le vecteur force généralisé de cet élément sous un chargement volumique uniforme. (1 point)
7. En l'absence de force volumique, sous l'hypothèse des déformations planes, les questions suivantes vont permettre de calculer le vecteur force généralisé (efforts de réaction) sur la surface gauche de l'élément Figure 3 générant le champ de déplacement identifié question 5 :
   (a) Dans cette situation de flexion, calculer à nouveau le tenseur des déformations en fonction de $\alpha$ sous la forme (1 point)
   $$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$
   (b) Calculer la contrainte correspondante avec la loi constitutive, où $\lambda$ et $\mu$ sont les coefficients de Lamé (1 point)
   $$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2\mu + \lambda & \lambda & 0 \\ \lambda & 2\mu + \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix}$$
   (c) Calculer les forces généralisées sur $S_g$, la surface gauche de l'élément, associées aux fonctions de formes 1, 4, 5 et 6 dans les deux directions. (4 points)
   On rappelle que $\boldsymbol{f} = \int_{S_g} \mathbf{N}^\top \boldsymbol{t} \, \mathrm{d}S$ et $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{\sigma} \, \boldsymbol{n}$.
8. Calculer le moment fléchissant auquel l'élément est soumis ? (2 points)