EPFL 2012-2013 **Nom :** ______________________

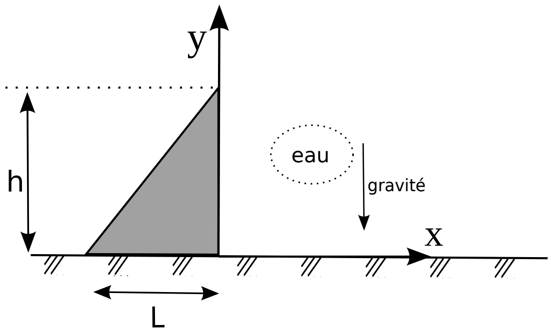
GC6 **Prénom :** ______________________

Examen Modélisation Numérique des Solides et Structures : partie pratique.

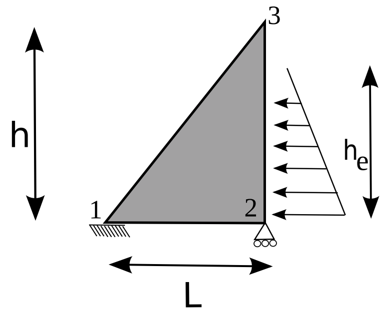
Notes de cours et livre autorisés
1h30, 22 points ($\frac{2}{3}$ du total)

Exercice 1 : ***Modélisation de barrage – 12 points***

On considère le barrage suivant :



Modèle de barrage



Modélisation élément fini du barrage

On approxime la structure de ce barrage avec un élément linéaire triangulaire, d'épaisseur w, avec des appuis indiqués sur le schéma ci dessus et une loi de constitution linéaire élastique et isotrope avec λ et μ les coefficients de Lamé. Le bord $1-3$ est libre tandis que le bord $2-3$ subit la traction t_e imposée par l'eau qui est linéaire par morceaux :

$$t_e(y) = -w\rho_e g\,(h_e - y) \quad \forall y < h_e \qquad t(y) = 0 \quad \forall y > h_e$$

avec ρ_e la masse volumique de l'eau et g la constante de gravité.

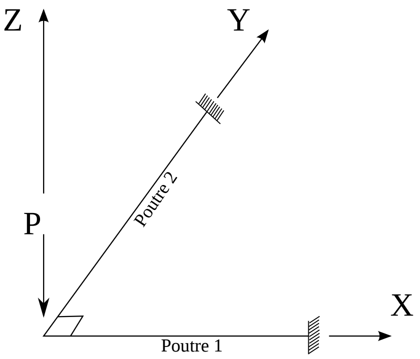
1. Donner le tableau des conditions aux limites pour ce problème.(1 point)
2. Calculez les fonctions d'interpolation de l'élément 123 en utilisant le système d'axe proposé. (1 point)
3. Calculez la force consistante s'appliquant aux noeuds de l'élément. (1 point)
4. Calculez la matrice $B(x, y)$. (1 point)
5. Calculez la matrice de rigidité globale. Pour ce faire, vous considererez la matrice de constitution de la théorie des déformations planes :

$$D = \begin{bmatrix} 2\mu+\lambda & \lambda & 0 \\ \lambda & 2\mu+\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$$

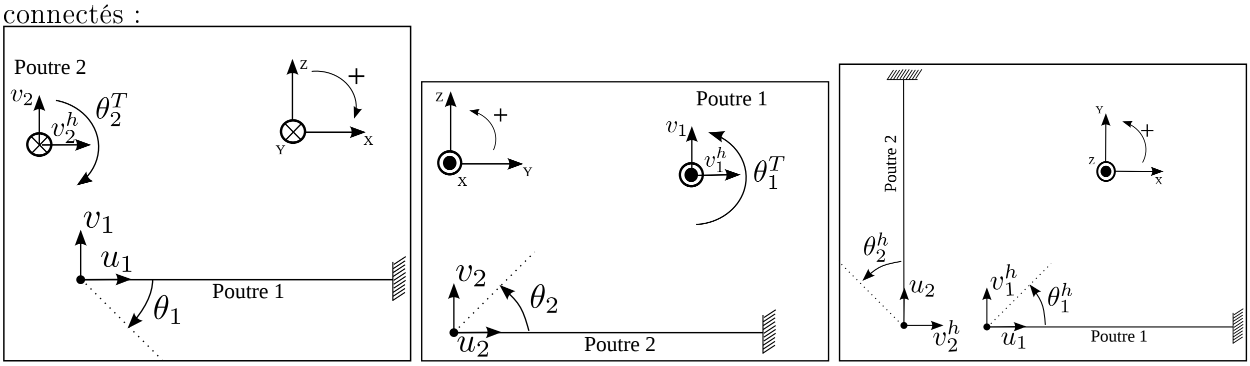
   (2 points)
6. Écrire le système d'équation correspondant aux inconnues en déplacement. (1 point)
7. Trouver le déplacement de chacun des noeuds en fonction de h_e, ρ_e, g lorsque $\lambda = 16$, $\mu = 4$ et $w = h = L = 1$. (2 points)
8. Ajoutez le poids propre de la structure (le barrage a une masse volumique ρ) avant de résoudre à nouveau. (1 point)
9. Comment qualifieriez-vous la qualité numérique de la solution ? (1 point)
10. Comment peut-on améliorer la solution du problème ? Justifiez. (1 point)

Exercice 2 : ***Système de poutres encastrées – 10 points***

On considère le problème suivant constitué de deux poutres de Bernouilli identiques de taille L, de module de Young E, de moment d'inertie I (le même pour toutes les directions), de constante de torsion J et de module de glissement G. Le lien entres ces poutres ainsi que le cas de charge sont représentés sur le schéma suivant :



1. Décrire les caractéristiques du problème : donner le nombre de degrés de libertés par poutre en décrivant leur nature. Pourquoi doit-on utiliser des poutres de Bernouilli 3D ? (1 point)
2. Identifiez le nombre de degrés de libertés. (1 point)
3. Étant donné que les poutres sont reliées par une liaison rigide, les degrés de libertés à la jointure doivent être mis en relation. Les schémas suivants permettent de mettre en relation les degrés de libertés ainsi connectés :



De la même manière que $u_1 = v_2^h$ associez u_2,v_2^h,θ_2,θ_2^T,θ_2^h, v_1,v_1^h,θ_1,θ_1^T,θ_1^h. (1 point)

4. En utilisant les symétries et l'hypothèse des petites déformations, déterminez les degrés de libertés (DDL) nuls et ramenez le nombre total d'inconnues à 3. (1 point)
5. A partir de maintenant, on considère le cas où $L = E = I = J = G = 1$. Définir les sous matrices de rigidité $\tilde{K}_1$ et $\tilde{K}_2$ de chaque élément dans leur repère local correspondant aux DDL non nuls. (2 points)
6. Définir la sous-matrice K_2 de l'élément 2 correspondant aux DDL non nuls dans le repère global en utilisant une matrice de rotation. (1 point)
7. Assemblez la matrice de rigidité globale K (1 point).
8. Écrire le système $Kd = P$ en définissant P le vecteur de forces ponctuelles. (1 point)
9. Trouver les déplacements inconnus. (1 point).

15.2 Structure spatiale – Poutre à 12 degrés de liberté
Axes locaux (x, y, z) (fig. 15.1)

$$\mathbf{k} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} k_{i1} & k_{i2} & k_{i3} & k_{i4} & k_{i5} & k_{i6} & k_{i7} & k_{i8} & k_{i9} & k_{i\,10} & k_{i\,11} & k_{i\,12} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12\,EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12\,EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12\,EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12\,EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12\,EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12\,EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12\,EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12\,EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \end{array}$$