EPFL 2011-2012 **Nom** : ______________________

GC6 **Prénom** : ______________________

Examen Modélisation Numérique des Solides et Structures : partie pratique.

Notes de cours et livres autorisés
1h30, 30 points ($\frac{2}{3}$ du total)

Exercice 1 (Le pont de Sutong – 10 points)
Le pont de Sutong est le pont à haubans ayant la plus grande portée du monde (1088 mètres).

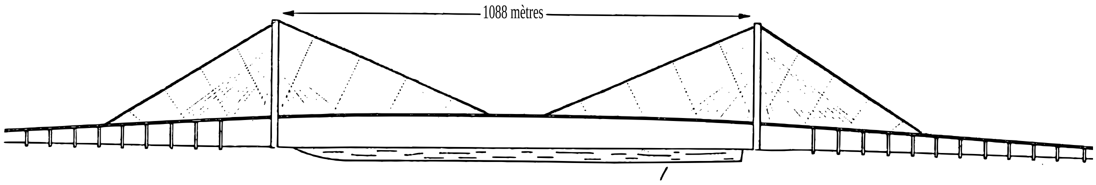

FIGURE 1 –

Nous considérons un pont très long supporté par plusieurs piliers et renforcé par des haubans (Figure 2). Une analyse préliminaire 2D peut être effectuée sur une partie du pont (Figure 3).

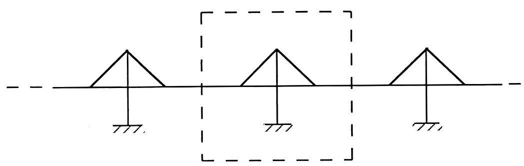

FIGURE 2 –

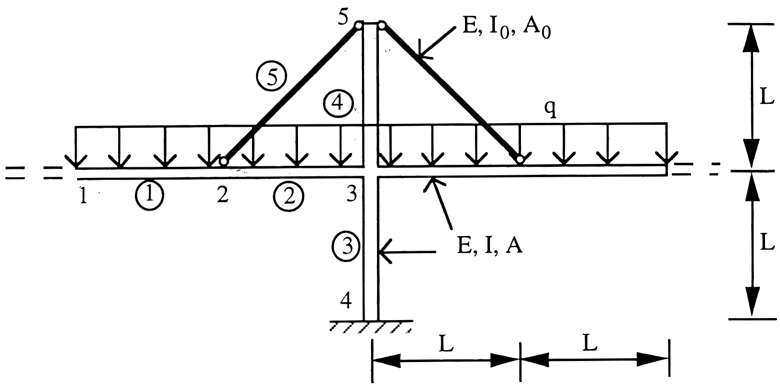

FIGURE 3 –

1. On prend la moitié de la structure dans la Figure 3 grâce à la symétrie du problème.
   - Donner les connectivités des éléments. (1 point)
   - Indiquer la nature de chaque élément (barre ou poutre) selon leur fonctions dans la demi-structure ainsi que la section considérée pour chaque élément. (1 point)
   - Définir les 6 degrés de liberté non nuls selon les conditions aux limites et les représenter dans un tableau. (2 points)
2. Donner le vecteur de charges équivalents pour l'élément ②. (1 point)
3. Donner les matrices de rigidité locales pour les éléments ②, ③ et ④. (2 points)
4. Calculer les coefficients de la matrice de rigidité assemblée qui concernent le noeud 3. (2 points)
5. Donner la réaction d'appui verticale en fonction du déplacement nodal (sans calculer ce déplacement). (1 point)

Exercice 2 (Expansion thermique – 20 points)
On considère un solide 3D parallépipèdique de section carrée 2×2 dans le plan (x, y) et de longueur $L \gg 2$ dans la direction z. Cette structure 3D de modules élastiques E et $\nu = 0$ est encastrée sur deux faces et libre sur les deux autres. Dans sa configuration initiale l'état de contraintes est nul, il n'y a aucune sollicitation (Figure 4).

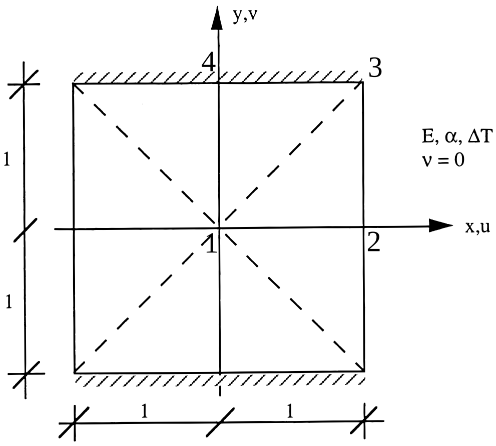

FIGURE 4 –

Le solide est conducteur de chaleur et est soumis à une augmentation de température ΔT (le matériau est isotrope et a un coefficient de dilatation thermique α). On souhaite estimer l'état de déformation et de contrainte en étudiant le comportement thermo-élastique (stationnaire) d'une "tranche" d'épaisseur unité suivant z. Cette "tranche" est discrétisée par des éléments finis linéaires de type T3 (triangle à 3 noeuds).

1. Quelles sont les conditions aux limites en déplacement et en contrainte ? (1 point)
2. Quels sont les plans de symétrie et les conditions de symétrie ? Définir le sous problème sur lequel travailler. (2 points)
3. Calculer les fonctions d'interpolations de l'élément 123. (2 points)
4. Calculez la matrice $\mathbf{B}_{123}(x, y)$ qui permet de calculer le tenseur des petites déformations dans cet élément : $\epsilon(x, y) = \begin{pmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ u_{,y} + v_{,x} \end{pmatrix} = \mathbf{B}(x, y) \cdot \mathbf{u}$.
(2 points)
5. On considère la matrice de la loi constitutive $\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{pmatrix}$.
A quelle théorie se rapporte cette matrice $\mathbf{D}$? (1 point)
6. Calculez la matrice de rigidité locale à l'élément 123. (2 points)
7. En considérant pour l'élément 134 que

$$\mathbf{k}_{134} = \frac{E}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Proposez un schéma présentant l'assemblage de la matrice de rigidité globale. Quelles sont les propriétés de la matrice de rigidité ? Quelle est sa taille ? Calculez les coefficients k_{11}, k_{12}, k_{21}, k_{22} et k_{33}. (2 points)

8. En présence d'un champ de temperature la loi de Hooke 2D s'écrit :

$$\sigma = \mathbf{D}\epsilon - \underbrace{\frac{E\alpha\Delta T}{1-2\nu}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\sigma_{\mathbf{th}}}$$

Montrez que le vecteur de charges équivalent aux contraintes internes $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{th}}$ du à un changement de température ΔT au point 2 est $f_2^{th} = \frac{E\alpha\Delta T}{1-2\nu}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. (2 points)

9. Déduire des questions précédentes :
   - le déplacement du noeud 1 en fonction de $E, \alpha, \Delta T$. (1 point)
   - les composantes des contraintes totales $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ au noeud 2. (2 points)
10. Donnez une description de la solution exacte de ce problème. La solution numérique de ce problème vous semble-t-elle correcte ? (1 point)
11. Que proposez vous pour améliorer l'erreur numérique ? (1 point)
12. On considère maintenant que les bords en haut et en bas sont des appuis sur rouleaux. Sans faire de calculs donner une description de la solution exacte pour ce nouveau cas de charge et l'erreur numérique qui sera obtenue avec ce même maillage. Justifiez votre réponse. (1 point)