

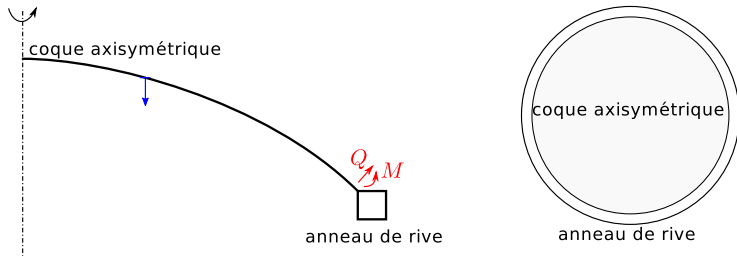
Méthode des éléments finis : les pièges à éviter

Jérémy Bleger

Modélisation numérique des solides et structures
25 mai 2016

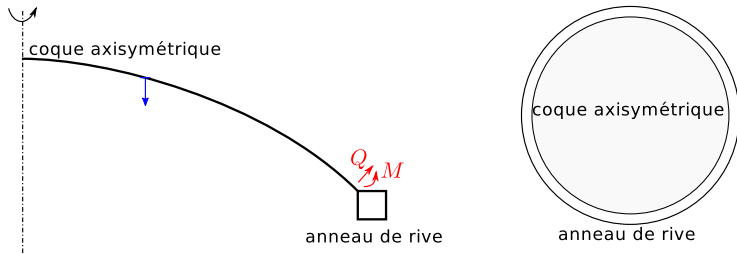
Le problème de Girkmann : attention à la "boîte noire"

Benchmark numérique proposé aux ingénieurs pour tester leurs méthodes



Le problème de Girkmann : attention à la "boîte noire"

Benchmark numérique proposé aux ingénieurs pour tester leurs méthodes

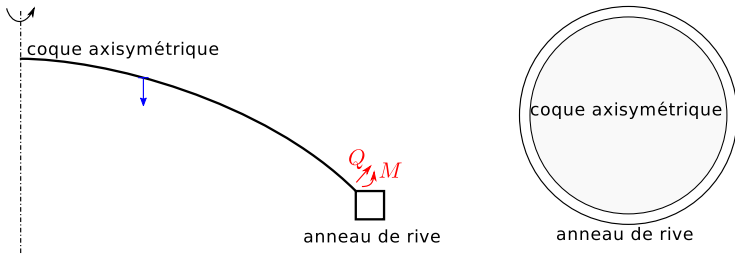


Résultat	Q [N/m]	M [Nm/m]
1	940.9	-36.63
2	593.8	-140.12
3	1140.0	-205.00
4	16660.0	17976.6
5	963.2	-33.73
6	1015.7	86.30
7	989.1	-89.11

15 résultats obtenus avec différentes hypothèses de modélisation

Le problème de Girkmann : attention à la "boîte noire"

Benchmark numérique proposé aux ingénieurs pour tester leurs méthodes



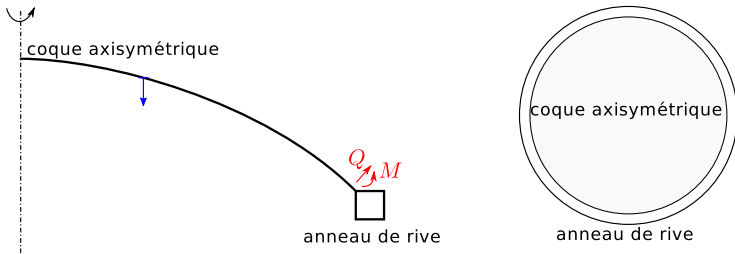
Résultat	Q [N/m]	M [Nm/m]
1	940.9	-36.63
2	593.8	-140.12
3	1140.0	-205.00
4	16660.0	17976.6
5	963.2	-33.73
6	1015.7	86.30
7	989.1	-89.11

15 résultats obtenus avec différentes hypothèses de modélisation

$$Q_{ex} \approx 944 \text{ N/m}, M_{ex} \approx -37 \text{ Nm/m}$$

Le problème de Girkmann : attention à la "boîte noire"

Benchmark numérique proposé aux ingénieurs pour tester leurs méthodes



Résultat	Q [N/m]	M [Nm/m]
1	940.9	-36.63
2	593.8	-140.12
3	1140.0	-205.00
4	16660.0	17976.6
5	963.2	-33.73
6	1015.7	86.30
7	989.1	-89.11

15 résultats obtenus avec différentes hypothèses de modélisation

$Q_{ex} \approx 944$ N/m, $M_{ex} \approx -37$ Nm/m

amplitude des erreurs

erreurs de signe

Prendre en main un nouveau logiciel



différentes interfaces, différents types d'éléments finis, de loi de comportement, de technique de résolution, etc...

Prendre en main un nouveau logiciel



différentes interfaces, différents types d'éléments finis, de loi de comportement, de technique de résolution, etc...

- lire la documentation
- lancer les exemples fournis avec le logiciel (tutoriels)
- tester sur des cas simples + **comparaison avec solutions analytiques**

Prendre en main un nouveau logiciel



différentes interfaces, différents types d'éléments finis, de loi de comportement, de technique de résolution, etc...

- lire la documentation
- lancer les exemples fournis avec le logiciel (tutoriels)
- tester sur des cas simples + **comparaison avec solutions analytiques**
 - ▶ traction/compression simple 2D/3D
 - ▶ cylindre sous pression
 - ▶ poutre console...

on peut trouver des bugs !

Sommaire

- 1 Généralités
- 2 Pièges liés à la modélisation du problème
- 3 Pièges liés à la discrétisation du problème
- 4 Pièges liés à la résolution du problème
- 5 Pièges liés à l'interprétation des résultats
- 6 Conclusion

Généralités

Quelques étourderies/erreurs fréquentes

- propriétés matérielles non affectées
- division entière $1/2 = 0$
- mauvaises valeurs numériques : **choix des unités**
- conditions aux limites insuffisantes \Rightarrow **mécanisme**
- $\nu = 0.5 \Rightarrow$ matrice de rigidité **singulière**

Généralités

Quelques étourderies/erreurs fréquentes

- propriétés matérielles non affectées
- division entière $1/2 = 0$
- mauvaises valeurs numériques : **choix des unités**
- conditions aux limites insuffisantes \Rightarrow **mécanisme**
- $\nu = 0.5 \Rightarrow$ matrice de rigidité **singulière**

Quelques conseils

- vérifier que la solution en déplacement **satisfait** les CL en déplacement
- vérifier que la solution en contrainte est **cohérente** avec les CL en contraintes (bords libres, efforts surfaciques) : les champs de contrainte calculés **ne sont pas nécessairement SA**
- tirer parti des **symétries du problème** (avec les CL appropriées)
- travailler en **unités SI**

Sommaire

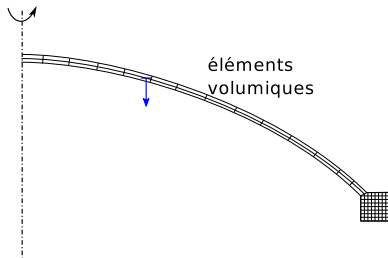
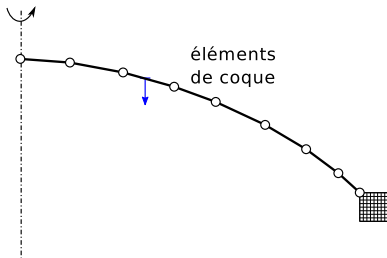
- 1 Généralités
- 2 Pièges liés à la modélisation du problème**
- 3 Pièges liés à la discrétisation du problème
- 4 Pièges liés à la résolution du problème
- 5 Pièges liés à l'interprétation des résultats
- 6 Conclusion

Choix de modélisation

Résolution d'un problème passe tout d'abord par un **choix de modélisation**

Ex. du problème de Girkmann :

- modèle axisymétrique ou modèle 3D complet ?
- modèle de coque ou milieu continu ?
- modèle de poutre ou milieu continu ?



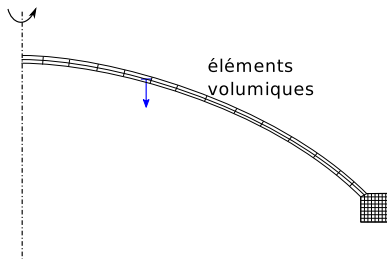
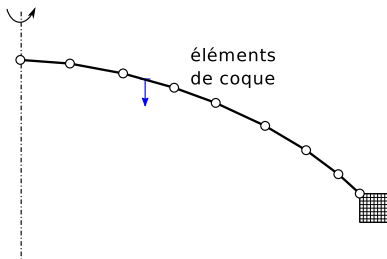
dans un second temps, quel **type d'élément fini** (linéaire, quadratique,...) pour le modèle choisi ?

Choix de modélisation

Résolution d'un problème passe tout d'abord par un **choix de modélisation**

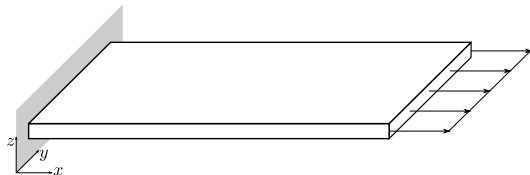
Ex. du problème de Girkmann :

- modèle axisymétrique ou modèle 3D complet ?
- modèle de coque ou milieu continu ?
- modèle de poutre ou milieu continu ?

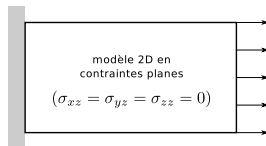
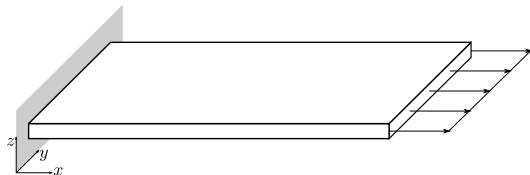


dans un second temps, quel **type d'élément fini** (linéaire, quadratique,...) pour le modèle choisi ?

Traction d'une plaque mince

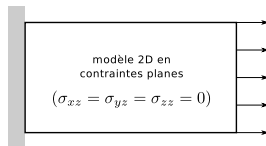
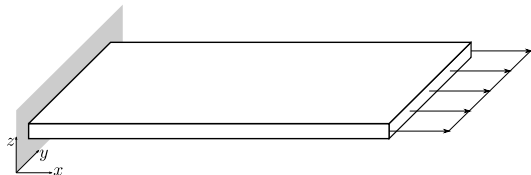


Traction d'une plaque mince



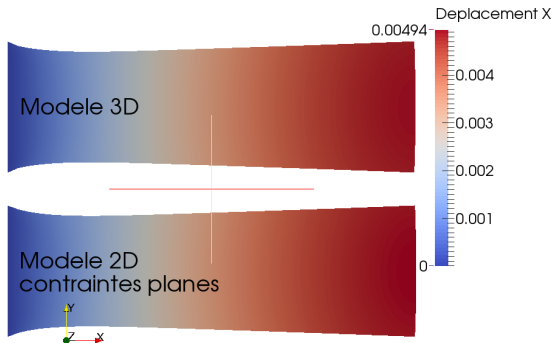
épaisseur faible : modèle 2D en contraintes planes

Traction d'une plaque mince



épaisseur faible : modèle 2D en contraintes planes

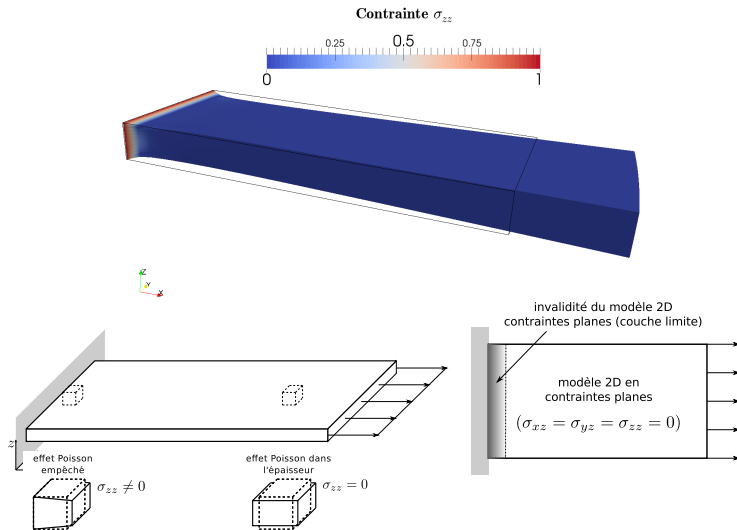
plaque 1 x 0.4, épaisseur 0.1, force volumique uniforme suivant x



Energie élastique :

$$\frac{E_{3D} - E_{2D}}{E_{3D}} \approx 1.3\%$$

Traction plaque mince



domaine de validité des modèles mécaniques

Plaque mince en flexion

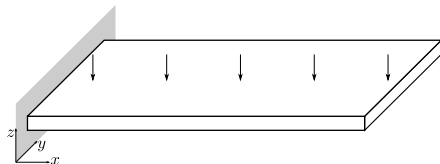


plaques minces en 3D :
1 élément dans l'épaisseur ?

Plaque mince en flexion

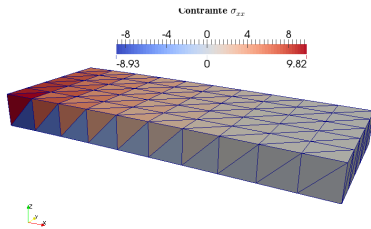


plaques minces en 3D :
1 élément dans l'épaisseur ?

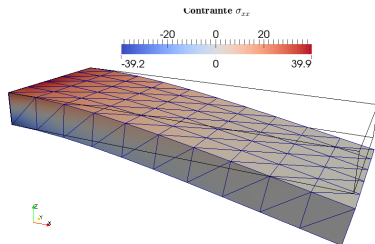


plaque 1 x 0.4, épaisseur 0.1, force
volumique uniforme suivant z ,
1 élément dans l'épaisseur

Plaque mince en flexion

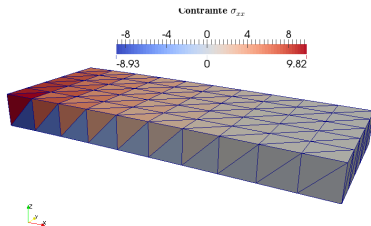


Éléments linéaires (Tet4)

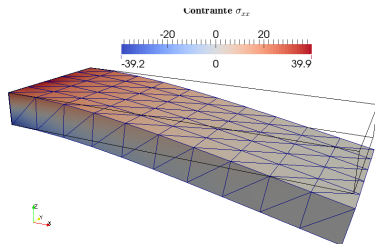


Éléments quadratiques (Tet10)

Plaque mince en flexion



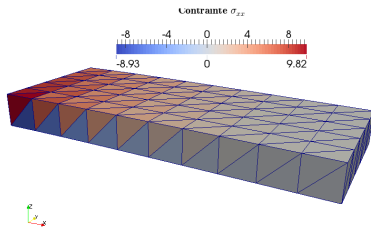
Éléments linéaires (Tet4)



Éléments quadratiques (Tet10)

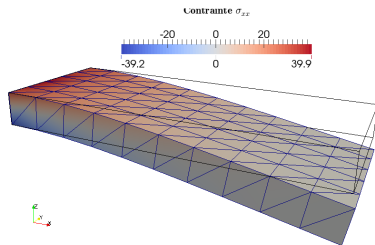
Flexion en élasticité : les contraintes axiales varient linéairement dans l'épaisseur

Plaque mince en flexion



Éléments linéaires (Tet4)

Flexion en élasticité : les contraintes axiales varient linéairement dans l'épaisseur



Éléments quadratiques (Tet10)

degré d'interpolation : augmenter le degré d'interpolation = "*p*-refinement"

Validation poutre console

On cherche à **valider un code EF 3D** sur le problème d'une poutre console sous charge volumique uniforme : $L = 10$, $h = b = 1$, $E = 10^4$, $\nu = 0$, $f = 1$

$$w_{theo} = \frac{qL^4}{8EI} = \frac{12fL^4}{8Eh^2} = 1.5$$

Validation poutre console

On cherche à **valider un code EF 3D** sur le problème d'une poutre console sous charge volumique uniforme : $L = 10$, $h = b = 1$, $E = 10^4$, $\nu = 0$, $f = 1$

$$w_{theo} = \frac{qL^4}{8EI} = \frac{12fL^4}{8Eh^2} = 1.5$$

$10N \times N \times N$ él. N	Tet. linéaires		
	w_{num}	Erreur	
1	0.374	75.1%	
5	1.33125	11.25%	
10	1.46177	2.55%	
20	1.49905	0.06%	
40	1.50871	-0.58%	

Validation poutre console

On cherche à **valider un code EF 3D** sur le problème d'une poutre console sous charge volumique uniforme : $L = 10$, $h = b = 1$, $E = 10^4$, $\nu = 0$, $f = 1$

$$w_{theo} = \frac{qL^4}{8EI} = \frac{12fL^4}{8Eh^2} = 1.5$$

$10N \times N \times N$ él. N	Tet. linéaires		Tet. quadratiques	
	w_{num}	Erreur	w_{num}	Erreur
1	0.374	75.1%	1.50884	-0.59%
5	1.33125	11.25%	1.51195	-0.80%
10	1.46177	2.55%	1.51197	-0.80%
20	1.49905	0.06%		
40	1.50871	-0.58%		

Validation poutre console

On cherche à **valider un code EF 3D** sur le problème d'une poutre console sous charge volumique uniforme : $L = 10$, $h = b = 1$, $E = 10^4$, $\nu = 0$, $f = 1$

$$w_{EB} = \frac{qL^4}{8EI} = \frac{12fL^4}{8Eh^2} = 1.5$$

$10N \times N \times N$ él. N	Tet. linéaires		Tet. quadratiques	
	w_{num}	Erreur	w_{num}	Erreur
1	0.374	75.1%	1.50884	-0.59%
5	1.33125	11.25%	1.51195	-0.80%
10	1.46177	2.55%	1.51197	-0.80%
20	1.49905	0.06%		
40	1.50871	-0.58%		

Théorie de **poutre de Timoshenko** ($\kappa = 5/6$) :

$$w_{Tim} = \frac{qL^4}{8EI} \left(1 + \frac{4EI}{\kappa \mu AL^2} \right) = w_{EB} \left(1 + 0.8 \left(\frac{h}{L} \right)^2 \right) = 1.512$$

Validation poutre console

On cherche à **valider un code EF 3D** sur le problème d'une poutre console sous charge volumique uniforme : $L = 10$, $h = b = 1$, $E = 10^4$, $\nu = 0$, $f = 1$

$$w_{EB} = \frac{qL^4}{8EI} = \frac{12fL^4}{8Eh^2} = 1.5$$

$10N \times N \times N$ él. N	Tet. linéaires		Tet. quadratiques	
	w_{num}	Erreur	w_{num}	Erreur
1	0.374	75.1%	1.50884	-0.59%
5	1.33125	11.25%	1.51195	-0.80%
10	1.46177	2.55%	1.51197	-0.80%
20	1.49905	0.06%		
40	1.50871	-0.58%		

Théorie de **poutre de Timoshenko** ($\kappa = 5/6$) :

$$w_{Tim} = \frac{qL^4}{8EI} \left(1 + \frac{4EI}{\kappa\mu AL^2} \right) = w_{EB} \left(1 + 0.8 \left(\frac{h}{L} \right)^2 \right) = 1.512$$

domaine de validité des modèles mécaniques

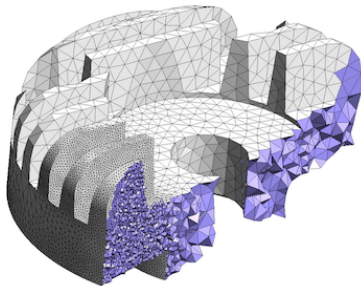
Sommaire

- 1 Généralités
- 2 Pièges liés à la modélisation du problème
- 3 Pièges liés à la discrétisation du problème**
- 4 Pièges liés à la résolution du problème
- 5 Pièges liés à l'interprétation des résultats
- 6 Conclusion

Génération de maillage

Générer un maillage peut être une étape relativement complexe : il se peut que cette étape soit elle-même source d'erreur

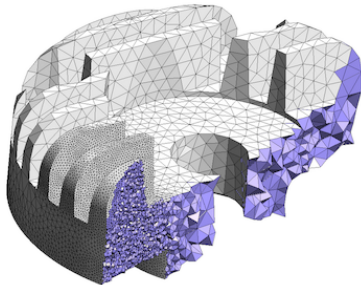
- définition de la géométrie
- qualité des éléments
- conversion de format



Génération de maillage

Générer un maillage peut être une étape relativement complexe : il se peut que cette étape soit elle-même source d'erreur

- définition de la géométrie
- qualité des éléments
- conversion de format



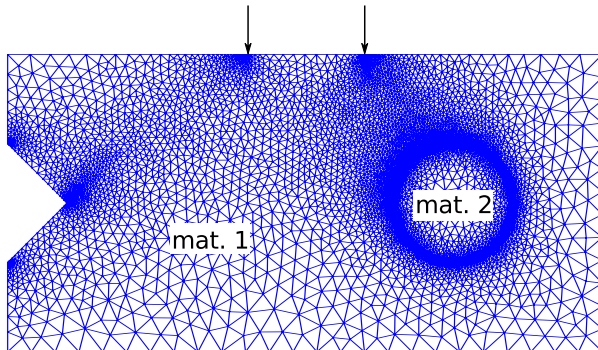
Suivant l'algorithme choisi pour la génération de maillage, un maillage 3D peut contenir : des tétraèdres, des hexaèdres, des pyramides, des prismes...

certains codes EF n'acceptent pas toutes les formes...

Qualité du maillage

Pour augmenter la précision de la solution, une bonne pratique consiste à **rafiner le maillage** dans les zones sources de potentielles **singularités** :

- coins
- efforts concentrés
- interfaces, discontinuités de propriétés matérielles



Convergence de la solution par rapport à la taille de maille, en termes de :
déplacement, contraintes, énergie

Qualité du maillage

La **forme des éléments** importe également sur la qualité de l'approximation :
les éléments ne doivent pas être trop allongés (si solution \approx isotrope)

Qualité du maillage

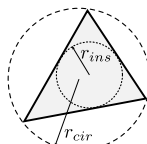
La **forme des éléments** importe également sur la qualité de l'approximation :

les éléments ne doivent pas être trop allongés (si solution \approx isotrope)

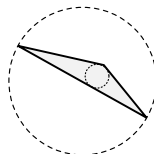
Mesure du **rapport d'aspect**, par ex. :

$$R = \frac{\text{rayon cercle circonscrit}}{2 \times \text{rayon cercle inscrit}} = \frac{r_{cir}}{2r_{ins}}$$

$$(R_{\text{equilateral}} = 1)$$



$$R \approx 1.06$$



$$R \approx 3$$

Qualité du maillage

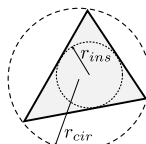
La **forme des éléments** importe également sur la qualité de l'approximation :

les éléments ne doivent pas être trop allongés (si solution \approx isotrope)

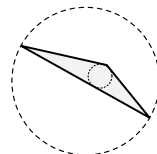
Mesure du **rapport d'aspect**, par ex. :

$$R = \frac{\text{rayon cercle circonscrit}}{2 \times \text{rayon cercle inscrit}} = \frac{r_{cir}}{2r_{ins}}$$

$$(R_{\text{equilateral}} = 1)$$

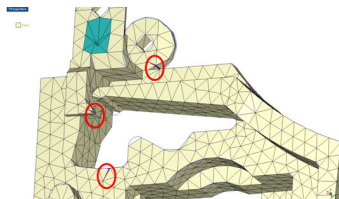


$$R \approx 1.06$$

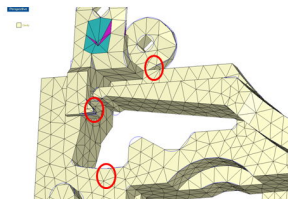


$$R \approx 3$$

Before

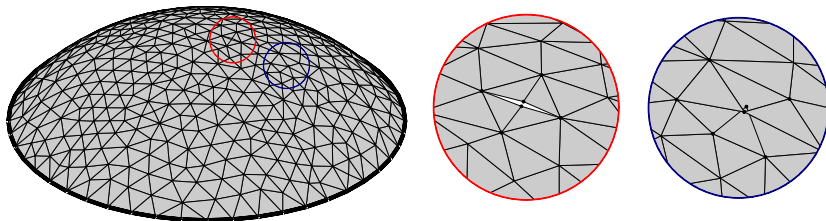


After



Qualité du maillage

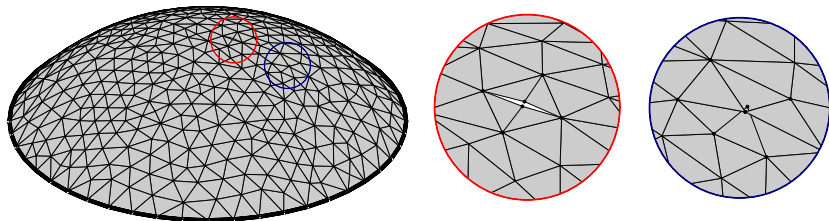
Suivant la provenance du maillage, il peut présenter des **défauts** :



- nœuds non connectés
- éléments se superposant
- maillage non conforme

Qualité du maillage

Suivant la provenance du maillage, il peut présenter des **défauts** :



- nœuds non connectés
- éléments se superposant
- maillage non conforme

il se peut que le calcul élément fini soit possible même avec ces défauts, mais la solution EF sera différente de celle attendue

certaines mailleurs peuvent détecter et résoudre automatiquement ces problèmes

Sommaire

- 1 Généralités
- 2 Pièges liés à la modélisation du problème
- 3 Pièges liés à la discrétisation du problème
- 4 Pièges liés à la résolution du problème**
- 5 Pièges liés à l'interprétation des résultats
- 6 Conclusion

Résolution de systèmes linéaires

La solution EF (en élasticité linéaire, HPP) revient à **résoudre un système linéaire** de la forme :

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{d}\} = \{\mathbf{F}\} \quad (1)$$

Résolution de systèmes linéaires

La solution EF (en élasticité linéaire, HPP) revient à **résoudre un système linéaire** de la forme :

$$[K]\{\mathbf{d}\} = \{\mathbf{F}\} \quad (1)$$

en pratique, **on ne calcule jamais** $[K]^{-1}$ mais **on trouve** $\{\mathbf{d}^*\}$ **qui vérifie** (1)

Résolution de systèmes linéaires

La solution EF (en élasticité linéaire, HPP) revient à **résoudre un système linéaire** de la forme :

$$[K]\{d\} = \{F\} \quad (1)$$

en pratique, **on ne calcule jamais** $[K]^{-1}$ mais **on trouve** $\{d^*\}$ **qui vérifie** (1)

Différentes techniques

- **solveurs directs** : on construit une **factorisation** de $[K]$ (LU, Cholesky,...) dont l'"inversion" est immédiate

Résolution de systèmes linéaires

La solution EF (en élasticité linéaire, HPP) revient à **résoudre un système linéaire** de la forme :

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{d}\} = \{\mathbf{F}\} \quad (1)$$

en pratique, **on ne calcule jamais** $[\mathbf{K}]^{-1}$ mais **on trouve** $\{\mathbf{d}^*\}$ **qui vérifie** (1)

Différentes techniques

- **solveurs directs** : on construit une **factorisation** de $[\mathbf{K}]$ (LU, Cholesky,...) dont l'"inversion" est immédiate
- **solveurs itératifs** : on construit **de manière itérative** (gradient conjugué, Gauss-Seidel,...) une suite de candidats $\{\mathbf{d}^k\}$ qui va converger vers la solution $\{\mathbf{d}^k\} \rightarrow \{\mathbf{d}^*\}$

Résolution de systèmes linéaires

La solution EF (en élasticité linéaire, HPP) revient à **résoudre un système linéaire** de la forme :

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{d}\} = \{\mathbf{F}\} \quad (1)$$

en pratique, **on ne calcule jamais** $[\mathbf{K}]^{-1}$ mais **on trouve** $\{\mathbf{d}^*\}$ qui vérifie (1)

Différentes techniques

- **solveurs directs** : on construit une **factorisation** de $[\mathbf{K}]$ (LU, Cholesky,...) dont l'"inversion" est immédiate
- **solveurs itératifs** : on construit **de manière itérative** (gradient conjugué, Gauss-Seidel,...) une suite de candidats $\{\mathbf{d}^k\}$ qui va converger vers la solution $\{\mathbf{d}^k\} \rightarrow \{\mathbf{d}^*\}$

Il existe toujours un **résidu numérique** (souvent très faible devant l'erreur EF) :

$$\|[\mathbf{K}]\{\mathbf{d}_{\text{calculé}}\} - \{\mathbf{F}\}\| = \epsilon > 0$$

arrondis numériques (méthodes directes), **tolérance de la convergence** (méthodes itératives)

Conditionnement de la matrice de raideur

il se peut que le système (1) soit **mal résolu** : mauvais choix de méthode, mauvais choix de paramètres du solveur,... \Rightarrow calculer le résidu numérique

Conditionnement de la matrice de raideur

il se peut que le système (1) soit **mal résolu** : mauvais choix de méthode, mauvais choix de paramètres du solveur,... \Rightarrow calculer le résidu numérique

La solution est sensible au **conditionnement** de la matrice $[\mathbf{K}]$:

$$\text{cond}([\mathbf{K}]) = \frac{\text{plus grande valeur propre}}{\text{plus petite valeur propre}} = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}$$

Conditionnement de la matrice de raideur

il se peut que le système (1) soit **mal résolu** : mauvais choix de méthode, mauvais choix de paramètres du solveur,... \Rightarrow calculer le résidu numérique

La solution est sensible au **conditionnement** de la matrice $[\mathbf{K}]$:

$$\text{cond}([\mathbf{K}]) = \frac{\text{plus grande valeur propre}}{\text{plus petite valeur propre}} = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}$$

plus $\text{cond}([\mathbf{K}])$ est grand, plus la solution sera **sensible aux perturbations**

$$\text{erreur max. solution} = \text{cond}([\mathbf{K}]) \cdot (\text{erreur max. données})$$

Conditionnement de la matrice de raideur

il se peut que le système (1) soit **mal résolu** : mauvais choix de méthode, mauvais choix de paramètres du solveur,... \Rightarrow calculer le résidu numérique

La solution est sensible au **conditionnement** de la matrice $[\mathbf{K}]$:

$$\text{cond}([\mathbf{K}]) = \frac{\text{plus grande valeur propre}}{\text{plus petite valeur propre}} = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}$$

plus $\text{cond}([\mathbf{K}])$ est grand, plus la solution sera **sensible aux perturbations**

$$\text{erreur max. solution} = \text{cond}([\mathbf{K}]) \cdot (\text{erreur max. données})$$

Exemple : système à 2 ressorts avec $k_1 \ll k_2$

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F \end{Bmatrix} \Rightarrow d_1^* = \frac{F}{k_1}, \quad d_2^* = \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right) F \sim \frac{F}{k_1}$$

$$\text{cond}([\mathbf{K}]) \sim \frac{k_2}{k_1}$$

Conditionnement de la matrice de raideur

Exemple : système à 2 ressorts avec $k_1 \ll k_2$

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F \end{Bmatrix} \implies d_1^* = \frac{F}{k_1}, \quad d_2^* = \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right) F \sim \frac{F}{k_1}$$

$$\text{cond}([K]) \sim \frac{k_2}{k_1}$$

Conditionnement de la matrice de raideur

Exemple : système à 2 ressorts avec $k_1 \ll k_2$

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F \end{Bmatrix} \implies d_1^* = \frac{F}{k_1}, \quad d_2^* = \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right) F \sim \frac{F}{k_1}$$

$$\text{cond}([\mathbf{K}]) \sim \frac{k_2}{k_1}$$

perturbation dans $[\mathbf{K}]$: $[\mathbf{K}_{pert}] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 + \epsilon & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$

Conditionnement de la matrice de raideur

Exemple : système à 2 ressorts avec $k_1 \ll k_2$

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F \end{Bmatrix} \implies d_1^* = \frac{F}{k_1}, \quad d_2^* = \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right) F \sim \frac{F}{k_1}$$

$$\text{cond}([K]) \sim \frac{k_2}{k_1}$$

perturbation dans $[K]$: $[K_{\text{pert}}] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 + \epsilon & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$

Ex. $k_2 = 10^8$, $k_1 = 0.75$, $F = 1$, format de données en simple précision (8 chiffres significatifs) : $k_1 + k_2 \approx k_1 + k_2 + \epsilon = 10^8 + 1$

$$d_1^{\text{pert}} = 1, \quad d_2^{\text{pert}} \approx 1$$

$$d_1^* = 4/3 = 1.3333333..., \quad d_2^* \approx 1.333333$$

Conditionnement de la matrice de raideur

Exemple : système à 2 ressorts avec $k_1 \ll k_2$

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F \end{Bmatrix} \implies d_1^* = \frac{F}{k_1}, \quad d_2^* = \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right) F \sim \frac{F}{k_1}$$

$$\text{cond}([K]) \sim \frac{k_2}{k_1}$$

perturbation dans $[K]$: $[K_{\text{pert}}] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 + \epsilon & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$

Ex. $k_2 = 10^8$, $k_1 = 0.75$, $F = 1$, format de données en simple précision (8 chiffres significatifs) : $k_1 + k_2 \approx k_1 + k_2 + \epsilon = 10^8 + 1$

$$d_1^{\text{pert}} = 1, \quad d_2^{\text{pert}} \approx 1$$

$$d_1^* = 4/3 = 1.3333333..., \quad d_2^* \approx 1.333333$$

Attention donc au conditionnement de la matrice : en double précision (15 chiffres significatifs), on peut aller jusqu'à des conditionnements de l'ordre de 10^{12}

Conditionnement de la matrice de raideur

Quelques **sources de mauvais conditionnement** :

- différences importantes de raideurs entre matériaux : ex. précédent, zones rigides modélisées comme des milieux élastiques de très grande raideur, **pénalisation de la raideur** pour le traitement des conditions aux limites

Conditionnement de la matrice de raideur

Quelques **sources de mauvais conditionnement** :

- différences importantes de raideurs entre matériaux : ex. précédent, zones rigides modélisées comme des milieux élastiques de très grande raideur, **pénalisation de la raideur** pour le traitement des conditions aux limites
- éléments de **tailles très différentes** : ex. 2 éléments barre :

$$[K] = EA \begin{bmatrix} 1/L_1 + 1/L_2 & -1/L_2 \\ -1/L_2 & 1/L_2 \end{bmatrix}$$

Conditionnement de la matrice de raideur

Quelques **sources de mauvais conditionnement** :

- différences importantes de raideurs entre matériaux : ex. précédent, zones rigides modélisées comme des milieux élastiques de très grande raideur, **pénalisation de la raideur** pour le traitement des conditions aux limites
- éléments de **tailles très différentes** : ex. 2 éléments barre :

$$[K] = EA \begin{bmatrix} 1/L_1 + 1/L_2 & -1/L_2 \\ -1/L_2 & 1/L_2 \end{bmatrix}$$

- éléments de **poutres très élancées** : $I \ll AL^2$ si $h \ll L$

$$[K_{el}] = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & \dots \\ 0 & 12EI/L^3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

ex. poutre $L = 10\text{m}$, $h = 10\text{cm}$, $L/h = 10^3$, $\text{cond}([K]) \approx L^2/h^2 = 10^6$.

Conditionnement de la matrice de raideur

Quelques **sources de mauvais conditionnement** :

- différences importantes de raideurs entre matériaux : ex. précédent, zones rigides modélisées comme des milieux élastiques de très grande raideur, **pénalisation de la raideur** pour le traitement des conditions aux limites
- éléments de **tailles très différentes** : ex. 2 éléments barre :

$$[\mathbf{K}] = EA \begin{bmatrix} 1/L_1 + 1/L_2 & -1/L_2 \\ -1/L_2 & 1/L_2 \end{bmatrix}$$

- éléments de **poutres très élancées** : $I \ll AL^2$ si $h \ll L$

$$[\mathbf{K}_{el}] = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & \dots \\ 0 & 12EI/L^3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

ex. poutre $L = 10\text{m}$, $h = 10\text{cm}$, $L/h = 10^3$, $\text{cond}([\mathbf{K}]) \approx L^2/h^2 = 10^6$.

- **finesse de la discrétisation** : $\text{cond}([\mathbf{K}]) \approx 1/(\text{taille de maille})^2$

Conditionnement de la matrice de raideur

Quelques **sources de mauvais conditionnement** :

- différences importantes de raideurs entre matériaux : ex. précédent, zones rigides modélisées comme des milieux élastiques de très grande raideur, **pénalisation de la raideur** pour le traitement des conditions aux limites
- éléments de **tailles très différentes** : ex. 2 éléments barre :

$$[K] = EA \begin{bmatrix} 1/L_1 + 1/L_2 & -1/L_2 \\ -1/L_2 & 1/L_2 \end{bmatrix}$$

- éléments de **poutres très élancées** : $I \ll AL^2$ si $h \ll L$

$$[K_{el}] = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & \dots \\ 0 & 12EI/L^3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

ex. poutre $L = 10\text{m}$, $h = 10\text{cm}$, $L/h = 10^3$, $\text{cond}([K]) \approx L^2/h^2 = 10^6$.

- **finesse de la discrétisation** : $\text{cond}([K]) \approx 1/(\text{taille de maille})^2$
- existence de **modes rigides** : $\text{cond}([K]) = \infty$

Phénomènes de verrouillage

Le **verrouillage** ("locking") traduit l'incapacité de certains éléments finis à représenter certains modes de déformation particuliers.

A maillage fixé, la qualité de la solution peut fortement se détériorer lorsque l'on fait varier certaines caractéristiques mécaniques.

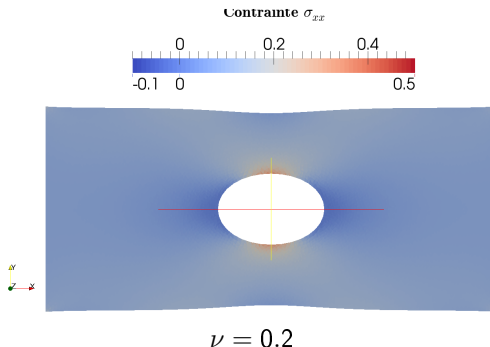
- **verrouillage volumique** : la qualité de la solution se détériore lorsque le coefficient de Poisson $\nu \rightarrow 1/2$ (matériau incompressible)
En 2D, le problème apparaît pour une interpolation linéaire (triangles T3) :

Phénomènes de verrouillage

Le **verrouillage** ("locking") traduit l'incapacité de certains éléments finis à représenter certains modes de déformation particuliers.

A maillage fixé, la qualité de la solution peut fortement se détériorer lorsque l'on fait varier certaines caractéristiques mécaniques.

- **verrouillage volumique** : la qualité de la solution se détériore lorsque le coefficient de Poisson $\nu \rightarrow 1/2$ (matériau incompressible)
En 2D, le problème apparaît pour une interpolation linéaire (triangles T3) :

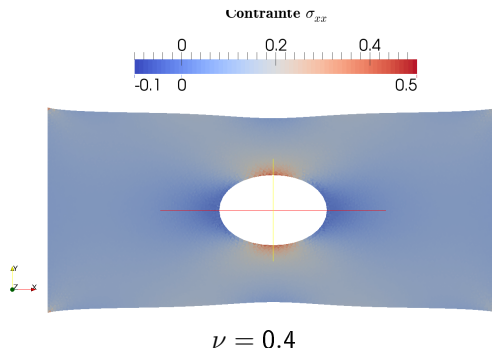


Phénomènes de verrouillage

Le **verrouillage** ("locking") traduit l'incapacité de certains éléments finis à représenter certains modes de déformation particuliers.

A maillage fixé, la qualité de la solution peut fortement se détériorer lorsque l'on fait varier certaines caractéristiques mécaniques.

- **verrouillage volumique** : la qualité de la solution se détériore lorsque le coefficient de Poisson $\nu \rightarrow 1/2$ (matériau incompressible)
En 2D, le problème apparaît pour une interpolation linéaire (triangles T3) :

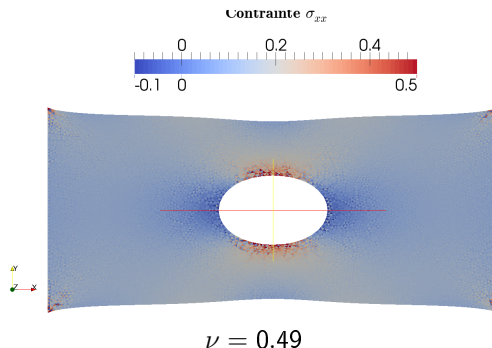


Phénomènes de verrouillage

Le **verrouillage** ("locking") traduit l'incapacité de certains éléments finis à représenter certains modes de déformation particuliers.

A maillage fixé, la qualité de la solution peut fortement se détériorer lorsque l'on fait varier certaines caractéristiques mécaniques.

- **verrouillage volumique** : la qualité de la solution se détériore lorsque le coefficient de Poisson $\nu \rightarrow 1/2$ (matériau incompressible)
En 2D, le problème apparaît pour une interpolation linéaire (triangles T3) :

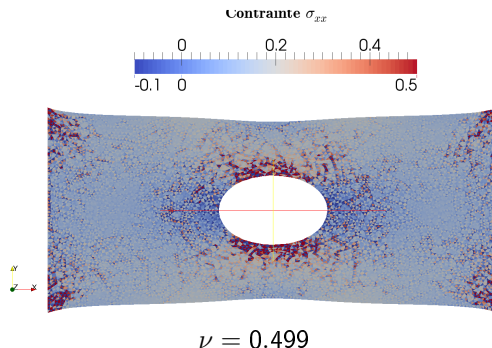


Phénomènes de verrouillage

Le **verrouillage** ("locking") traduit l'incapacité de certains éléments finis à représenter certains modes de déformation particuliers.

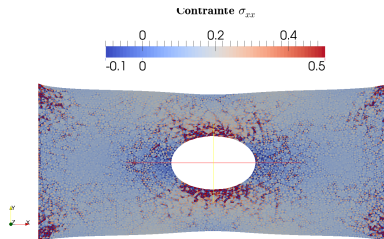
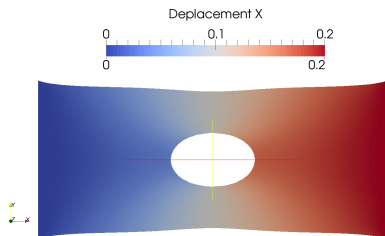
A maillage fixé, la qualité de la solution peut fortement se détériorer lorsque l'on fait varier certaines caractéristiques mécaniques.

- **verrouillage volumique** : la qualité de la solution se détériore lorsque le coefficient de Poisson $\nu \rightarrow 1/2$ (matériau incompressible)
En 2D, le problème apparaît pour une interpolation linéaire (triangles T3) :

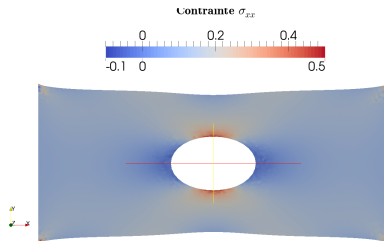
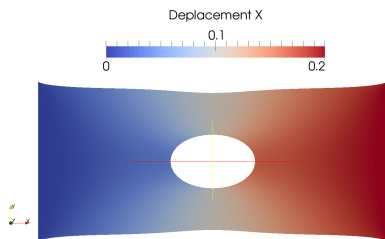


Phénomènes de verrouillage : verrouillage volumique

Solution en déplacement semble OK mais pas celle en contraintes! ($\nu = 0.499$)

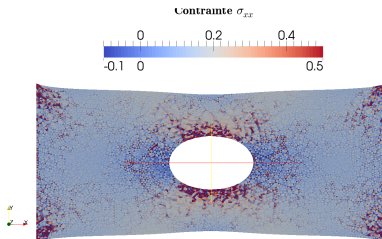
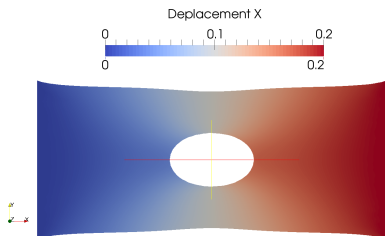


Le problème semble résolu avec des triangles quadratiques (T6) ($\nu = 0.499$)

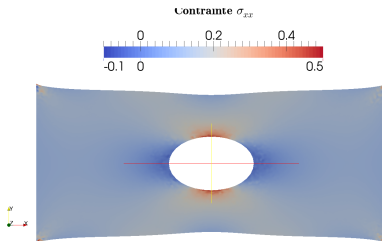
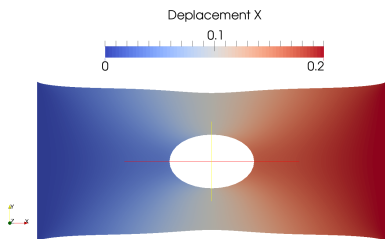


Phénomènes de verrouillage : verrouillage volumique

Solution en déplacement semble OK mais pas celle en contraintes! ($\nu = 0.499$)



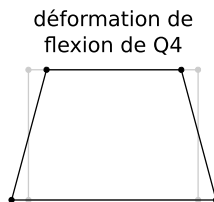
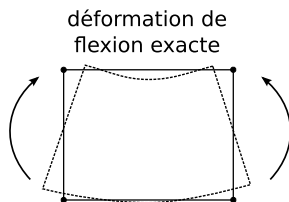
Le problème semble résolu avec des triangles quadratiques (T6) ($\nu = 0.499$)



interpolation quadratique **pas suffisante en général** (3D notamment)

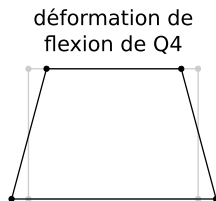
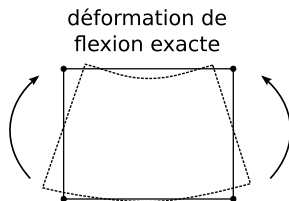
Phénomènes de verrouillage : verrouillage en cisaillement

- **verrouillage en cisaillement** : les éléments quadrilatères linéaires (Q4) ne représentent pas correctement la **flexion simple**



Phénomènes de verrouillage : verrouillage en cisaillement

- **verrouillage en cisaillement** : les éléments quadrilatères linéaires (Q4) ne représentent pas correctement la **flexion simple**

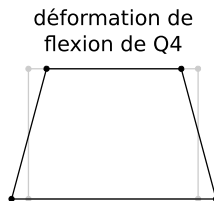
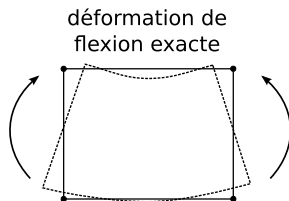


$$u_x = -\alpha xy, u_y = 0 \implies \epsilon_{xy} = -\alpha x \neq 0$$

en flexion, Q4 présente des **déformations de cisaillement parasites** qui contribuent à l'énergie de déformation lorsque l'élancement devient grand

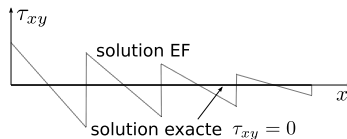
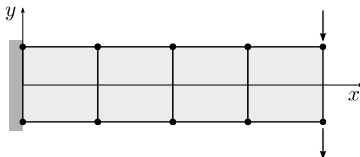
Phénomènes de verrouillage : verrouillage en cisaillement

- **verrouillage en cisaillement** : les éléments quadrilatères linéaires (Q4) ne représentent pas correctement la **flexion simple**



$$u_x = -\alpha xy, \quad u_y = 0 \implies \epsilon_{xy} = -\alpha x \neq 0$$

en flexion, Q4 présente des **déformations de cisaillement parasites** qui contribuent à l'énergie de déformation lorsque l'élancement devient grand
la **solution se détériore lorsque** $h/L \rightarrow 0$



Phénomènes de verrouillage

- il existe d'autres phénomènes liés au verrouillage :

Phénomènes de verrouillage

- il existe d'autres phénomènes liés au verrouillage :
 - ▶ en cisaillement pour les poutres de Timoshenko/plaques de Reissner

Phénomènes de verrouillage

- il existe d'autres phénomènes liés au verrouillage :
 - ▶ en cisaillement pour les poutres de Timoshenko/plaques de Reissner
 - ▶ en membrane pour les éléments de coque

Phénomènes de verrouillage

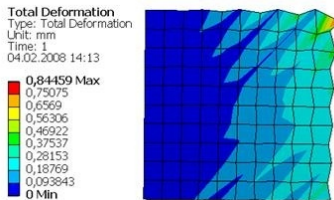
- il existe d'autres phénomènes liés au verrouillage :
 - ▶ en cisaillement pour les poutres de Timoshenko/plaques de Reissner
 - ▶ en membrane pour les éléments de coque
- apparaissent lorsque les équations changent de nature : $\operatorname{div} \underline{u} = 0$ lorsque $\nu \rightarrow 1/2$, $\theta = v'$ lorsque $h/L \rightarrow 0, \dots$

Phénomènes de verrouillage

- il existe d'autres phénomènes liés au verrouillage :
 - ▶ en cisaillement pour les poutres de Timoshenko/plaques de Reissner
 - ▶ en membrane pour les éléments de coque
- apparaissent lorsque les équations changent de nature : $\operatorname{div} \underline{u} = 0$ lorsque $\nu \rightarrow 1/2$, $\theta = v'$ lorsque $h/L \rightarrow 0, \dots$
- il existe des **méthodes sophistiquées pour éviter le verrouillage** : intégration réduite, approches mixtes, éléments incompatibles, ...

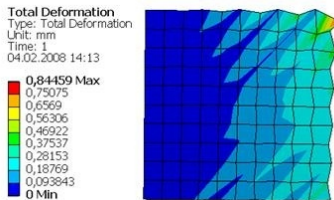
Phénomènes de verrouillage

- il existe d'autres phénomènes liés au verrouillage :
 - en cisaillement pour les poutres de Timoshenko/plaques de Reissner
 - en membrane pour les éléments de coque
- apparaissent lorsque les équations changent de nature : $\text{div } \underline{u} = 0$ lorsque $\nu \rightarrow 1/2$, $\theta = v'$ lorsque $h/L \rightarrow 0, \dots$
- il existe des **méthodes sophistiquées pour éviter le verrouillage** : intégration réduite, approches mixtes, éléments incompatibles, ...
- empêcher le verrouillage peut provoquer l'apparition de **modes rigides** : par ex. mode dits "hourglass" pour le Q4



Phénomènes de verrouillage

- il existe d'autres phénomènes liés au verrouillage :
 - en cisaillement pour les poutres de Timoshenko/plaques de Reissner
 - en membrane pour les éléments de coque
- apparaissent lorsque les équations changent de nature : $\text{div } \underline{u} = 0$ lorsque $\nu \rightarrow 1/2$, $\theta = v'$ lorsque $h/L \rightarrow 0, \dots$
- il existe des **méthodes sophistiquées pour éviter le verrouillage** : intégration réduite, approches mixtes, éléments incompatibles, ...
- empêcher le verrouillage peut provoquer l'apparition de **modes rigides** : par ex. mode dits "hourglass" pour le Q4



⇒ l'utilisation de ces approches requiert une certaine expérience, attention aux **choix par défaut, lire la documentation**

Sommaire

- 1 Généralités
- 2 Pièges liés à la modélisation du problème
- 3 Pièges liés à la discrétisation du problème
- 4 Pièges liés à la résolution du problème
- 5 Pièges liés à l'interprétation des résultats**
- 6 Conclusion

Représentation d'un champ mécanique

Une fois connue la solution EF discrète $\{\mathbf{u}\} = \{u_i\}_{i=1,\dots,N_{no}}$, l'interpolation permet de remonter à un champ défini sur toute la structure :

$$u(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{N_{no}} N_i(\underline{x}) u_i$$

Représentation d'un champ mécanique

Une fois connue la solution EF discrète $\{\mathbf{u}\} = \{u_i\}_{i=1,\dots,N_{no}}$, l'interpolation permet de remonter à un champ défini sur toute la structure :

$$u(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{N_{no}} N_i(\underline{x}) u_i$$

On cherche, en général, à représenter ce champ de manière visuelle : on entre dans la phase de **post-traitement/visualisation** des résultats

Représentation d'un champ mécanique

Une fois connue la solution EF discrète $\{\mathbf{u}\} = \{u_i\}_{i=1,\dots,N_{no}}$, l'interpolation permet de remonter à un champ défini sur toute la structure :

$$u(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{N_{no}} N_i(\underline{x}) u_i$$

On cherche, en général, à représenter ce champ de manière visuelle : on entre dans la phase de **post-traitement/visualisation** des résultats

Certains logiciels EF utilisent des **outils de post-traitement intégrés**, on peut également utiliser des **logiciels dédiés** à la visualisation de données (par ex. Paraview)

Représentation d'un champ mécanique

Une fois connue la solution EF discrète $\{\mathbf{u}\} = \{u_i\}_{i=1,\dots,N_{no}}$, l'interpolation permet de remonter à un champ défini sur toute la structure :

$$u(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{N_{no}} N_i(\underline{x}) u_i$$

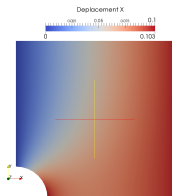
On cherche, en général, à représenter ce champ de manière visuelle : on entre dans la phase de **post-traitement/visualisation** des résultats

Certains logiciels EF utilisent des **outils de post-traitement intégrés**, on peut également utiliser des **logiciels dédiés** à la visualisation de données (par ex. Paraview)

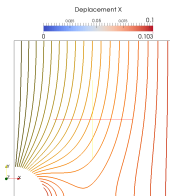
cette étape peut être également à l'origine d'**erreurs d'interprétation des résultats**

Représentation d'un champ mécanique

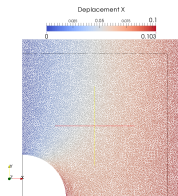
Différents modes de représentation d'un champ de déplacement (en 2D) :



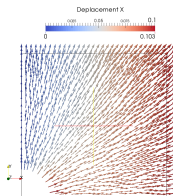
iso-surfaces



iso-contours



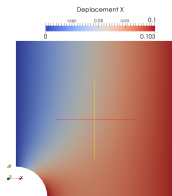
déformée



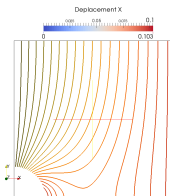
vecteurs

Représentation d'un champ mécanique

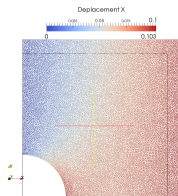
Différents modes de représentation d'un champ de déplacement (en 2D) :



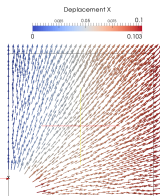
iso-surfaces



iso-contours



déformée

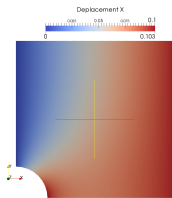


vecteurs

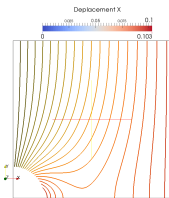
en 3D, possibilité de faire des coupes, des projections sur des plans, etc...

Représentation d'un champ mécanique

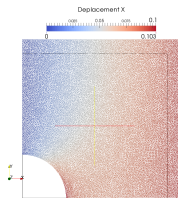
Différents modes de représentation d'un champ de déplacement (en 2D) :



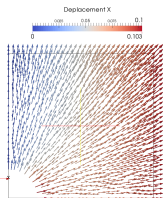
iso-surfaces



iso-contours



déformée



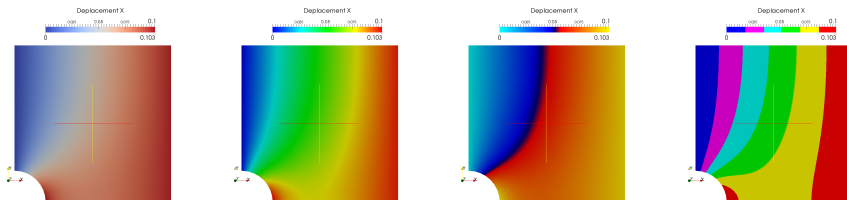
vecteurs

en 3D, possibilité de faire des coupes, des projections sur des plans, etc...

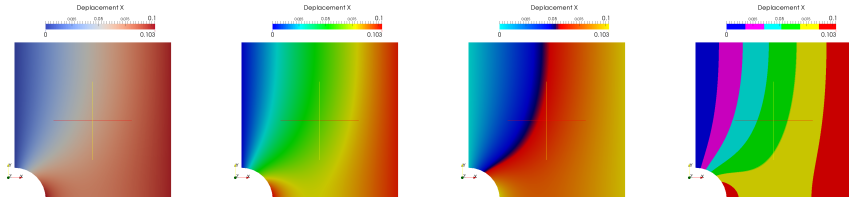
Représentation d'un champ de tenseur (contraintes) :

- par un scalaire : composante particulière, norme (plusieurs définitions)
- par des vecteurs : contraintes et directions principales

Représentation d'un champ mécanique

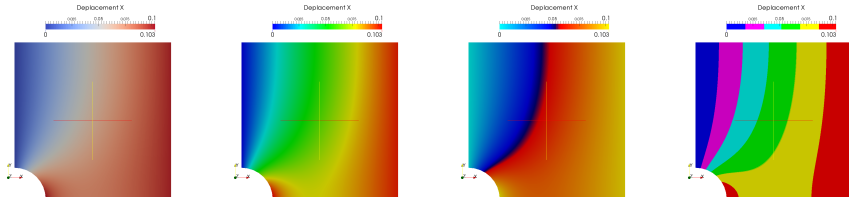


Représentation d'un champ mécanique

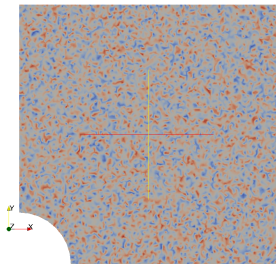


Attention au choix de la palette de couleurs !

Représentation d'un champ mécanique

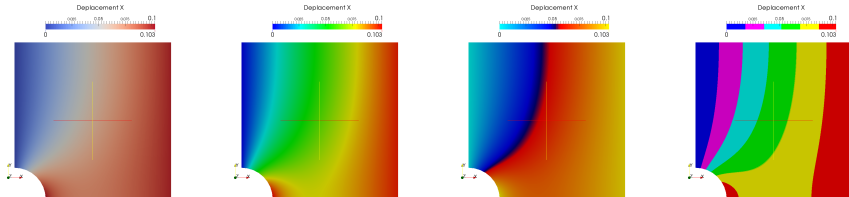


Attention au choix de la palette de couleurs !

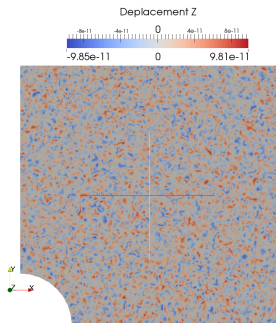


Déplacement suivant Z ?

Représentation d'un champ mécanique



Attention au choix de la palette de couleurs !



Déplacement suivant $Z \Rightarrow$ **toujours représenter l'échelle de couleurs**

Calcul/représentation des contraintes

Les contraintes sont, en général, **calculées aux points de Gauss** de l'élément (stockage des matrices **[B]**)

Calcul/représentation des contraintes

Les contraintes sont, en général, **calculées aux points de Gauss** de l'élément (stockage des matrices **[B]**)

Pour pouvoir les représenter sous formes d'isovaleurs par ex., il convient d'**extrapoler** ces valeurs sur toute la structure.

Calcul/représentation des contraintes

Les contraintes sont, en général, **calculées aux points de Gauss** de l'élément (stockage des matrices **[B]**)

Pour pouvoir les représenter sous formes d'isovaleurs par ex., il convient d'**extrapoler** ces valeurs sur toute la structure. Il y a **plusieurs façons** de faire :

- dans un élément, on cherche un champ polynomial (par ex. d'ordre égal à celui des déformations) qui soit le plus proche des valeurs aux points de Gauss \Rightarrow le champ obtenu est **discontinu** d'un élément à l'autre

Calcul/représentation des contraintes

Les contraintes sont, en général, **calculées aux points de Gauss** de l'élément (stockage des matrices **[B]**)

Pour pouvoir les représenter sous formes d'isovaleurs par ex., il convient d'**extrapoler** ces valeurs sur toute la structure. Il y a **plusieurs façons** de faire :

- dans un élément, on cherche un champ polynomial (par ex. d'ordre égal à celui des déformations) qui soit le plus proche des valeurs aux points de Gauss \Rightarrow le champ obtenu est **discontinu** d'un élément à l'autre
 - ▶ pour un T3, 1 point de Gauss, déformations constantes $\Rightarrow \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{x}}_g)$ constant par élément

Calcul/représentation des contraintes

Les contraintes sont, en général, **calculées aux points de Gauss** de l'élément (stockage des matrices **[B]**)

Pour pouvoir les représenter sous formes d'isovaleurs par ex., il convient d'**extrapoler** ces valeurs sur toute la structure. Il y a **plusieurs façons** de faire :

- dans un élément, on cherche un champ polynomial (par ex. d'ordre égal à celui des déformations) qui soit le plus proche des valeurs aux points de Gauss \Rightarrow le champ obtenu est **discontinu** d'un élément à l'autre
 - ▶ pour un T3, 1 point de Gauss, déformations constantes $\Rightarrow \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{x}}_g)$ constant par élément
- à chaque nœud, on calcule un champ de contrainte sous la forme d'une moyenne des valeurs aux points de Gauss les plus proches \Rightarrow le champ est **continu**

Calcul/représentation des contraintes

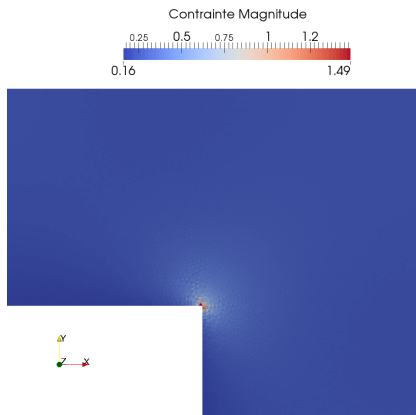
Les contraintes sont, en général, **calculées aux points de Gauss** de l'élément (stockage des matrices **[B]**)

Pour pouvoir les représenter sous formes d'isovaleurs par ex., il convient d'**extrapoler** ces valeurs sur toute la structure. Il y a **plusieurs façons** de faire :

- dans un élément, on cherche un champ polynomial (par ex. d'ordre égal à celui des déformations) qui soit le plus proche des valeurs aux points de Gauss \Rightarrow le champ obtenu est **discontinu** d'un élément à l'autre
 - pour un T3, 1 point de Gauss, déformations constantes $\Rightarrow \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{x}}_g)$ constant par élément
- à chaque nœud, on calcule un champ de contrainte sous la forme d'une moyenne des valeurs aux points de Gauss les plus proches \Rightarrow le champ est **continu**

La MEF traditionnelle est une **approche par les déplacements** ! Les champs de contraintes que l'on calcule **ne sont pas en équilibre** (statiquement admissibles).

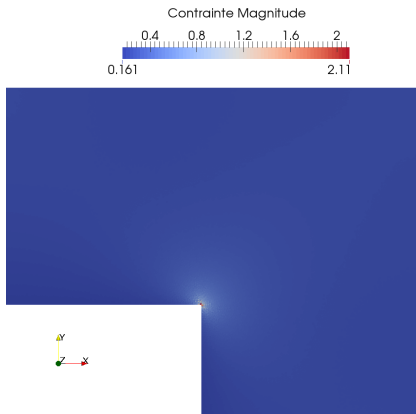
Contrainte maximale



Premier maillage

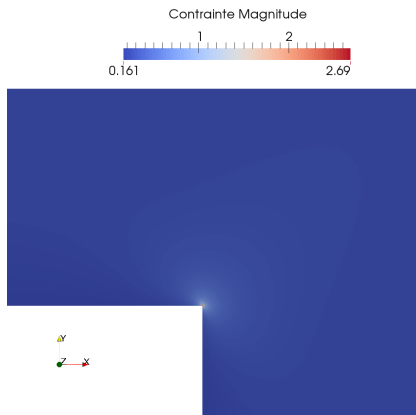
Contrainte maximale : 1.49

Contrainte maximale



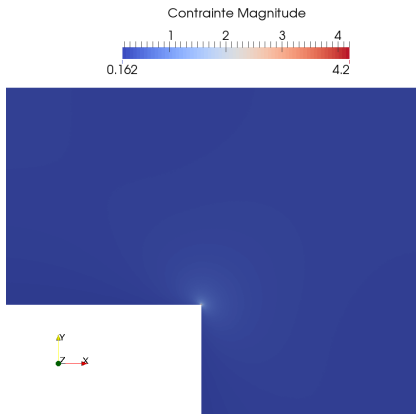
Maillage 2x plus fin Contrainte maximale : 2.11

Contrainte maximale



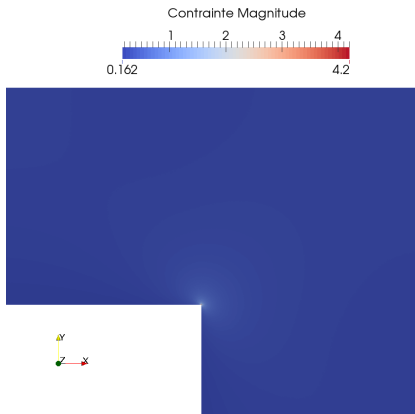
Maillage 5x plus fin Contrainte maximale : 2.69

Contrainte maximale



Maillage 10x plus fin Contrainte maximale : 4.2

Contrainte maximale



Maillage 10x plus fin Contrainte maximale : 4.2

Milieu continu : **les contraintes divergent** au niveau d'un coin rentrant/d'une fissure

EF : **les contraintes restent finies** à **maillage fixé**, mais **ne convergent pas** en raffinant le maillage

Sommaire

- 1 Généralités
- 2 Pièges liés à la modélisation du problème
- 3 Pièges liés à la discrétisation du problème
- 4 Pièges liés à la résolution du problème
- 5 Pièges liés à l'interprétation des résultats
- 6 Conclusion**

Les résultats d'un calcul EF semblent étranges

Différentes sources d'erreur possibles

- problème dans les données ?
- problème de modélisation ?
- problème de maillage ?
- problème de discrétisation EF ?
- problème de résolution ?
- problème d'interprétation ?

Les résultats d'un calcul EF semblent étranges

Différentes sources d'erreur possibles

- problème dans les données ?
- problème de modélisation ?
- problème de maillage ?
- problème de discrétisation EF ?
- problème de résolution ?
- problème d'interprétation ?

Comment trouver le coupable ?

- simplifier petit à petit le problème
- éliminer les suspects potentiels
- faire varier les paramètres
- se ramener à des cas où la solution est connue



Garder un esprit critique

- les calculs EF ne délivrent pas une **vérité absolue**
- les **sources d'erreurs** sont nombreuses
- la représentation visuelle peut **fausser l'interprétation**
- il est bon de **douter méthodiquement** de ses propres calculs et de ceux des autres



« Je pensais qu'il fallait [...] que je rejetasse comme absolument faux tout ce en quoi je pourrais imaginer le moindre doute », R. Descartes, *Discours de la méthode*, 1637