EPFL 2016-2017 **Nom :** ______________________

GC BA6 **Prénom :** ______________________

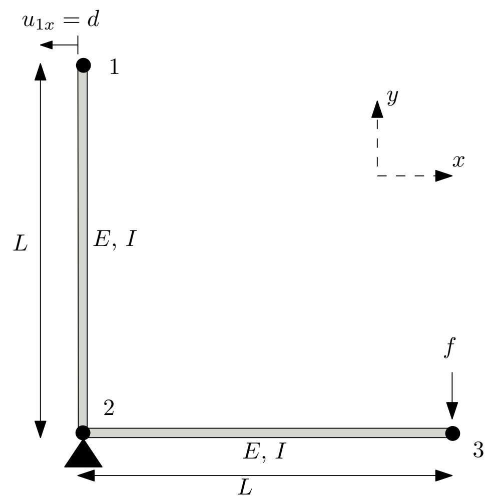
Examen – Modélisation Numérique des Solides et Structures : partie pratique.

Notes et livre du cours autorisés
1h30, 48 points ($\frac{2}{3}$ de la note de l'examen écrit)

Indication : Aucun des exercices ne nécessite de calculs lourds

Exercice 1 : *Poutres sans effort normal — 28 points*

1. On considère maintenant le bras de levier suivant :



(a) Dessinez la déformée de ce problème (au nœud 2, seuls les déplacements en x et y sont fixés). (1 point)

(b) Donnez la matrice de connectivité ainsi que la matrice de numéro d'équations. (2 points)

(c) Calculez la matrice de raideur pour ce problème en fonction de EI. (2 points)

Solution:

On a une fois de plus deux éléments. Mais la première matrice de raideur doit etre tournée avant assemblage. On commence par calculer la matrice de rotation :

$$[r] = \begin{bmatrix} C & S & 0 \\ -S & C & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Avec $C = 0$ $S = -1$

$$[r] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[R] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K^1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12EI & 6EI & 0 & -12EI & 6EI \\ 0 & 6EI & 4EI & 0 & -6EI & 2EI \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12EI & -6EI & 0 & 12EI & -6EI \\ 0 & 6EI & 2EI & 0 & -6EI & 4EI \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K^1] = \begin{bmatrix} 12EI & 0 & 6EI & -12EI & 0 & 6EI \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6EI & 0 & 4EI & -6EI & 0 & 2EI \\ -12EI & 0 & -6EI & 12EI & 0 & -6EI \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6EI & 0 & 2EI & -6EI & 0 & 4EI \end{bmatrix}$$

Et pour la deuxième matrice il s'agit simplement de l'étendre

$$[K^2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12EI & 6EI & 0 & -12EI & 6EI \\ 0 & 6EI & 4EI & 0 & -6EI & 2EI \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12EI & -6EI & 0 & 12EI & -6EI \\ 0 & 6EI & 2EI & 0 & -6EI & 4EI \end{bmatrix}$$

Ensuite on procède a l'assemblage :

$$[K] = 2EI \begin{bmatrix} 6 & 0 & 3 & -6 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & -3 & 6 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 3 & 0 & -6 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & -3 & 3 & 4 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & -3 & 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

(d) Donner la matrice de raideur réduite. (2 points)

Solution:

Avec les blocages (en rouge), on élimine les degrés de libertés $1, 4, 5$*, et en retirant les degrés de libertés dans l'axe des barres on retire* $2, 7$*. On garde donc les degrés* $3, 6, 8, 9$*.*

$$[K] = 2EI \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \tag{1}$$

(e) Calculer le vecteur de forces consistantes en identifiant les réactions. (2 points)

Solution:

$$[F] = \begin{bmatrix} R_{1x} \\ 0 \\ 0 \\ R_{2x} \\ R_{2y} \\ 0 \\ 0 \\ -f \\ 0 \end{bmatrix}$$

(f) Calculer le vecteur de forces consistantes réduit prenant en compte le déplacement imposé $u_{1x} = d$. (2 points)

Solution:

Pour le terme de déplacement en x du nœud 1 il faut prendre en compte le déplacement dans un terme de force équivalent. Ce dernier prend la forme :

$$F_{1\theta} = K_{31} u_{1u}, \qquad F_{6\theta} = K_{61} u_{1u}$$

$$[F] = \begin{bmatrix} 6EId \\ 6EId \\ -f \\ 0 \end{bmatrix}$$

(g) Comment procéderiez vous pour trouver tous les déplacements ? et toutes les réactions ? (1 point)