EPFL 2012-2013 **Nom :** ______________________

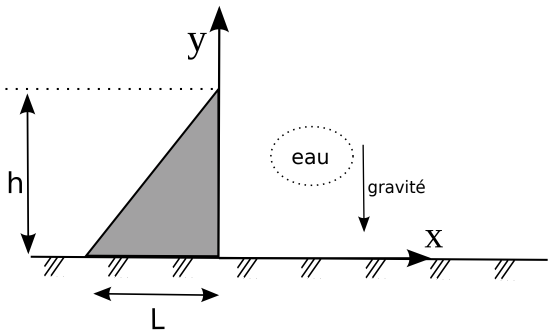
GC6 **Prénom :** ______________________

Examen Modélisation Numérique des Solides et Structures : partie pratique.

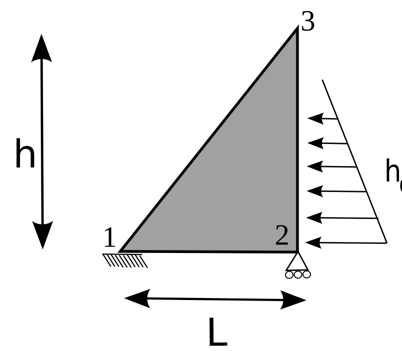
Notes de cours et livres autorisés
1h30, 30 points ($\frac{2}{3}$ du total)

Exercice 1 : ***Modélisation de barrage – 12 points***

On considère le barrage suivant :



Model de Barrage



Modélisation élément finis du barrage

On approxime la structure de ce barrage avec un élément linéaire triangulaire, d'épaisseur w, avec des appuis indiqués sur le schéma ci dessus et une loi de constitution linéaire élastique et isotrope avec λ et μ les coefficients de Lamé. Le bord $1-3$ est libre tandis que le bord $2-3$ subit la traction t_e imposée par l'eau qui est linéaire par morceaux :

$$t_e(y) = -w\rho_e g\,(h_e - y) \quad \forall y < h_e \qquad t(y) = 0 \quad \forall y > h_e$$

avec ρ_e la masse volumique de l'eau et g la constante de gravité.

1. Donner le tableau des conditions aux limites pour ce problème.(1 point)
   Solution :

$$\begin{bmatrix} u_{1\,x} \\ u_{1\,y} \\ u_{2\,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. Calculez les fonctions d'interpolation de l'élément 123 en utilisant le système d'axe proposé.(1 point)
   Solution :

$$N_1 = -\frac{x}{L}$$
$$N_2 = 1 + \frac{x}{L} - \frac{y}{h}$$
$$N_3 = \frac{y}{h}$$

3. Calculez la force consistante s'appliquant aux noeuds de l'élément. (1 point)
   Solution :

$$t_{i\,x} = \int_0^h t(y)N_i(y)dY = \int_0^{h_e} t(y)N_i(y)dY$$

$$\begin{bmatrix} t_{2\,x} \\ t_{3\,x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{w\rho_e g h_e^3}{6h} - \frac{w}{2}\rho_e g h_e^2 \\ -\frac{w\rho_e g h_e^3}{6h} \end{bmatrix}$$

4. Calculez la matrice $B(x, y)$ (1 point)

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{h} & 0 & \frac{1}{h} \\ 0 & -\frac{1}{L} & -\frac{1}{h} & \frac{1}{L} & \frac{1}{h} & 0 \end{bmatrix}$$

5. Calculez la matrice de rigidité globale. Pour ce faire, vous considererez la matrice de constitution de la théorie des déformations planes :

$$D = \begin{bmatrix} 2\mu + \lambda & \lambda & 0 \\ \lambda & 2\mu + \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$$

(2 points)
Solution :

$$\begin{aligned} K &= \int_\Omega B^T D B d\Omega = \int_\Omega d\Omega B^T D B = \frac{whL}{2} B^T D B \\ &= \frac{whL}{2} B^T \begin{bmatrix} 2\mu + \lambda & \lambda & 0 \\ \lambda & 2\mu + \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{h} & 0 & \frac{1}{h} \\ 0 & -\frac{1}{L} & -\frac{1}{h} & \frac{1}{L} & \frac{1}{h} & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{whL}{2} \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{h} & 0 & \frac{1}{h} \\ 0 & -\frac{1}{L} & -\frac{1}{h} & \frac{1}{L} & \frac{1}{h} & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -\frac{2\mu+\lambda}{L} & 0 & \frac{2\mu+\lambda}{L} & -\frac{\lambda}{h} & 0 & \frac{\lambda}{h} \\ -\frac{\lambda}{L} & 0 & \frac{\lambda}{L} & -\frac{2\mu+\lambda}{h} & 0 & \frac{2\mu+\lambda}{h} \\ 0 & -\frac{\mu}{L} & -\frac{\mu}{h} & \frac{\mu}{L} & \frac{\mu}{h} & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{whL}{2} \begin{bmatrix} \frac{2\mu+\lambda}{L^2} & 0 & -\frac{2\mu+\lambda}{L^2} & \frac{\lambda}{hL} & 0 & -\frac{\lambda}{hL} \\ 0 & \frac{\mu}{L^2} & \frac{\mu}{hL} & -\frac{\mu}{L^2} & -\frac{\mu}{hL} & 0 \\ -\frac{2\mu+\lambda}{L^2} & \frac{\mu}{hL} & \frac{2\mu+\lambda}{L^2} + \frac{\mu}{h^2} & -\frac{\lambda}{hL} - \frac{\mu}{hL} & -\frac{\mu}{h^2} & \frac{\lambda}{hL} \\ \frac{\lambda}{hL} & -\frac{\mu}{L^2} & -\frac{\lambda}{hL} - \frac{\mu}{hL} & \frac{2\mu+\lambda}{h^2} + \frac{\mu}{L^2} & \frac{\mu}{hL} & -\frac{2\mu+\lambda}{h^2} \\ 0 & -\frac{\mu}{hL} & -\frac{\mu}{h^2} & \frac{\mu}{hL} & \frac{\mu}{h^2} & 0 \\ -\frac{\lambda}{hL} & 0 & \frac{\lambda}{hL} & -\frac{2\mu+\lambda}{h^2} & 0 & \frac{2\mu+\lambda}{h^2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

6. Écrire le système d'équation correspondant aux inconnues en déplacement. (1 point)
Solution :

$$K^p = \frac{whL}{2} \begin{bmatrix} \frac{2\mu+\lambda}{L^2} + \frac{\mu}{h^2} & -\frac{\mu}{h^2} & \frac{\lambda}{hL} \\ -\frac{\mu}{h^2} & \frac{\mu}{h^2} & 0 \\ \frac{\lambda}{hL} & 0 & \frac{2\mu+\lambda}{h^2} \end{bmatrix}$$

7. Trouver le déplacement de chacun des noeuds en fonction de h_e, ρ_e, g lorsque $\lambda = 16$, $\mu = 4$ et $w = h = L = 1$ (2 points)

Solution :

$$\frac{whL}{2}\begin{bmatrix} \frac{2\mu+\lambda}{L^2}+\frac{\mu}{h^2} & -\frac{\mu}{h^2} & \frac{\lambda}{hL} \\ -\frac{\mu}{h^2} & \frac{\mu}{h^2} & 0 \\ \frac{\lambda}{hL} & 0 & \frac{2\mu+\lambda}{h^2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{2\,x} \\ u_{3\,x} \\ u_{3\,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{w\rho_e g h_e^3}{6h} - \frac{w}{2}\rho_e g h_e^2 \\ -\frac{w\rho_e g h_e^3}{6h} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 28 & -4 & 16 \\ -4 & 4 & 0 \\ 16 & 0 & 24 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{2\,x} \\ u_{3\,x} \\ u_{3\,y} \end{bmatrix} = \rho_e g h_e^2 \begin{bmatrix} \frac{h_e}{6} - \frac{1}{2} \\ \frac{-h_e}{6} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_{2\,x} \\ u_{3\,x} \\ u_{3\,y} \end{bmatrix} = \frac{\rho_e g h_e^2}{20}\begin{bmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 3 & 13 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{h_e}{6} - \frac{1}{2} \\ \frac{-h_e}{6} \\ 0 \end{bmatrix}$$

8. Ajoutez le poids propre de la structure (le barrage a une masse volumique ρ) avant de résoudre à nouveau. (1 point)
   Solution :
   Avec w l'épaiseur :

$$t_{i\,y} = -\rho g w \int_{-L}^{0}\int_{0}^{h(1-\frac{x}{L})} N_i(x,y)dydx$$

   Pour le nœud 3 :

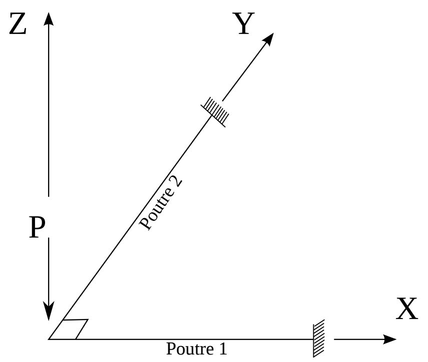
$$t_{3\,y} = -\rho g w \int_{-1}^{0}\int_{0}^{(1-x)} ydydx = -\frac{7}{6}\rho g w$$

$$\begin{bmatrix} u_{2\,x} \\ u_{3\,x} \\ u_{3\,y} \end{bmatrix} = \frac{\rho_e g h_e^2}{20}\begin{bmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 3 & 13 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{h_e}{6} - \frac{1}{2} \\ -\frac{h_e}{6} \\ -\frac{7}{6}\frac{\rho}{\rho_e}\frac{1}{h_e^2} \end{bmatrix}$$

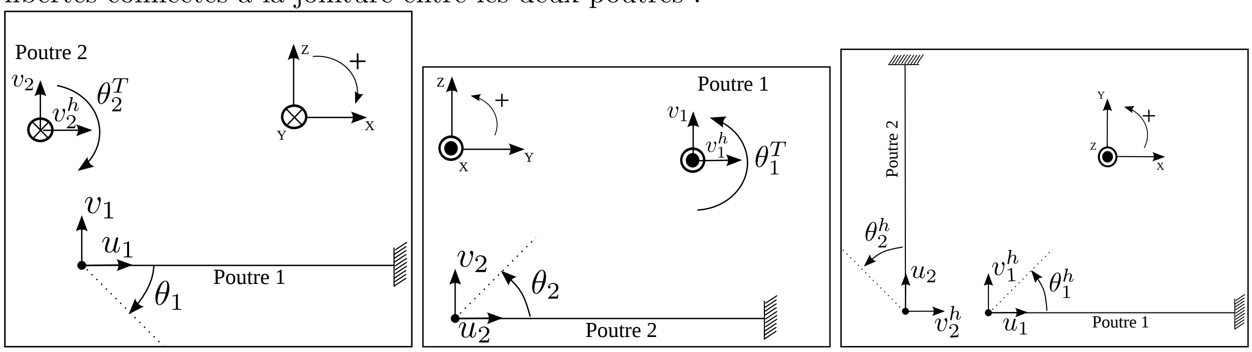
9. Comment qualifieriez vous la qualité numérique de la solution ? (1 point)
   Solution :
   Le poid propre va amener un terme de force lineaire qui induit un stress linéaire qui ne peut etre représenté par cet élément (stress constants uniquement).
10. Comment peut-on améliorer la solution du problème ? Justifiez. (1 point)
    Solution :
    On peut soit raffiner le maillage pour obtenir une approximation du stress lineaire par une courbe constante par morceaux ou bien augmenter l'ordre de l'élément pour un triangle quadratique.

Exercice 2 : ***Système de poutres encastrées – 10 points***

On considère le problème suivant constitué de deux poutres de Bernouilli identiques de taille L, de module de Young E, de moment d'inertie I (le même pour toutes les directions), de constante de torsion J et de module de glissement G. Le lien entres ces poutres ainsi que le cas de charge sont représentés sur le schéma suivant :



1. Décrire les caractéristiques du problème : donner le nombre de degrés de libertés par poutre en décrivant leur nature. Pourquoi doit-on utiliser des poutres de Bernouilli 3D ? (1 point)
   Solution : Il s'agit d'un probleme 3D : Le fléchissement et la torsion sont a prendre en compte par des poutres de Bernouilli 3D chaqune avec 12 degrés de libertés. Sur chaque noeud on a un deplacement axial, une fleche horizontale et une verticale, un angle de torsion, un angle de flechissement horizontal et un vertical : 6 degrés de libertés par noeuds.
2. Identifiez le nombre de degrés de libertés. (1 point)
   Solution : Les blocages agissent sur deux noeuds blocant 12 degres de libertés. On descend a 12 degrés de libertés. A la liaison entre les poutres les 6 degrés de libertés de la première poutre sont liés avec ceux de la deuxieme poutre. On descend donc a 6 degrés de libertés.
3. Etant donné que les poutres sont reliées par une laison rigide, les degrés de libertés à la jointure doivent être mis en relation. Les schémas suivants permettent de mettre en relation les degrés de libertés connectés à la jointure entre les deux poutres :

   De la même manière que $u_1 = v_2^h$ associez u_2,v_2^h,θ_2,θ_2^T,θ_2^h, v_1,v_1^h,θ_1,θ_1^T,θ_1^h. (1 point)
   Solution : par lecture des schemas on a $v_1 = v_2$, $u_1 = v_2^h$, $v_1^h = u_2$, $\theta_1^T = \theta_2$, $\theta_2^T = \theta_1$ et $\theta_1^h = \theta_2^h$. Le nombre de degrés de libertés devient 6.
4. En utilisant les symétries et l'hypothèse des petites déformations, déterminez les degrés de libertés (DDL) nuls et ramenez le nombre total d'inconnues à 3. (1 point)
   Solution : Par symmetries (de la situation et du chargement) on a $\theta_1^h = \theta_2^h = 0$ et $u_1 = u_2 = 0$ pour les degrés nuls. Le nombre de degrés de libertés tombe a 3. *Remarque : le fléchissement doit également être symmétrique donc $\theta_1 = -\theta_2$ qui forme une contrainte de liaison. le nombre de degrés de libertés total peut etre directement vu comme 2. Mais ce n'était pas demandé.*
5. A partir de maintenant, on considère le cas où $L = E = I = J = G = 1$. Définir les sous matrices de rigidité $\tilde{K}_1$ et $\tilde{K}_2$ de chaque élément dans leur repère local correspondant aux DDL non nuls. (2 points)
   Solution : Par lecture des tables en retirant les degrés nuls on obtient :

$$\tilde{K}_1 \begin{pmatrix} v_1 \\ \theta_1^T \\ \theta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12EI/L^3 & 0 & -6EI/L^2 \\ 0 & GJ/L & 0 \\ -6EI/L^2 & 0 & 4EI/L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \theta_1^T \\ \theta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \theta_1^T \\ \theta_1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

et

$$\tilde{K}_2 \begin{pmatrix} v_2 \\ \theta_2^T \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12EI/L^3 & 0 & 6EI/L^2 \\ 0 & GJ/L & 0 \\ 6EI/L^2 & 0 & 4EI/L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_2 \\ \theta_2^T \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_2 \\ \theta_2^T \\ \theta_2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

6. Définir la sous-matrice K_2 de l'élément 2 correspondant aux DDL non nuls dans le repère global en utilisant une matrice de rotation. (1 point)
Solution : pour la deuxieme poutre on utilise la matrice de rotation de 90 degrés :
$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$
pour définir :
$$K_2 = R^T \begin{pmatrix} 12 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 4 \end{pmatrix} R = \begin{pmatrix} 12 & 6 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$
On remarque que l'effet est une permutation $\theta_2 \to \theta_1^T$ et $\theta_2^T \to \theta_1$ ce qui est confirmé par le résultat de la question 3.
7. Assemblez la matrice de rigidité globale K (1 point).
Solution :
$$K = \begin{pmatrix} 24 & 6 & -6 \\ 6 & 4+1 & 0 \\ -6 & 0 & 4+1 \end{pmatrix} \tag{5}$$
8. Écrire le système $Kd = P$ en définissant P le vecteur de forces ponctuelles. (1 point)
Solution :
$$K \begin{pmatrix} v_1 \\ \theta_1^T \\ \theta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 6 & -6 \\ 6 & 4+1 & 0 \\ -6 & 0 & 4+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \theta_1^T \\ \theta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -P \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$
9. Trouver les déplacements inconnus (1 point).
Solution :
L'inversion de la matrice 3×3 donne :
$$K^{-1} = \frac{1}{240} \begin{pmatrix} 25 & -30 & 30 \\ -30 & 84 & -36 \\ 30 & -36 & 84 \end{pmatrix} \tag{7}$$
Ce qui permet d'obtenir la relation :
$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \theta_1^T \\ \theta_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -\frac{5P}{6} \\ P \\ -P \end{pmatrix} \tag{8}$$
10. Comment le nombre de degrés de libertés aurait pu être réduit à 2 ? (1 point)
Solution : On voit que la relation $\theta_1 = -\theta_2 = -\theta_1^T$ est facilement respectée avec ce case de charge en changant le systeme pour :
$$K \begin{pmatrix} v_1 \\ -\theta_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 6 & -6 \\ 6 & 4+1 & 0 \\ -6 & 0 & 4+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ -\theta_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -P \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{9}$$
On peut donc reduire le probleme a :
$$\begin{pmatrix} 24 & -12 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -P \\ 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$
Alors en inversant la petite 2×2 :

$$\begin{pmatrix} 24 & -12 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{48} \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 6 & 24 \end{pmatrix} \tag{11}$$

et le resultat est alors :

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -\frac{5P}{6} \\ -P \end{pmatrix} \tag{12}$$