

**Correction – Modélisation Numérique des Solides et Structures : partie pratique.**

Notes de cours et livre autorisés

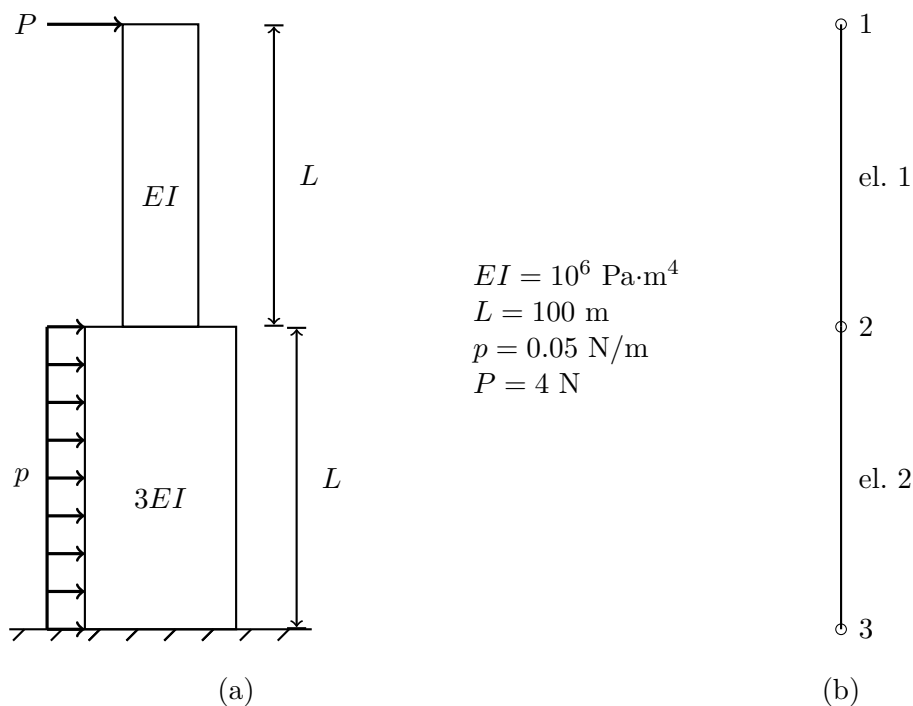
2h, 30 points ( $\frac{2}{3}$  du total)**Exercice 1 : Deux poutres sous charge – 10 points**

FIGURE 1 – Deux poutres sous charge : (a) schéma, (b) discretisation éléments finis

Considérons le système à deux poutres avec une pression appliquée et charge concentrée sur un côté, comme représenté sur la Figure 1. Modéliser le système comme indiqué sur la figure par des éléments poutres sans déplacement axial.

1. Donner les matrices de rigidité locales pour les éléments 1 et 2. (2 pts)

$$\mathbf{K}_1^e = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 12/L^2 & 6/L & -12/L^2 & 6/L \\ 6/L & 4 & -6/L & 2 \\ -12/L^2 & -6/L & 12/L^2 & -6/L \\ 6/L & 2 & -6/L & 4 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

$$\mathbf{K}_2^e = \frac{3EI}{L} \begin{bmatrix} 12/L^2 & 6/L & -12/L^2 & 6/L \\ 6/L & 4 & -6/L & 2 \\ -12/L^2 & -6/L & 12/L^2 & -6/L \\ 6/L & 2 & -6/L & 4 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

2. Calculer les coefficients de la matrice de rigidité globale et le vecteur des forces global. (2 pts)

$$\mathbf{K} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 12/L^2 & 6/L & -12/L^2 & 6/L & 0 & 0 \\ 6/L & 4 & -6/L & 2 & 0 & 0 \\ -12/L^2 & -6/L & 48/L^2 & 12/L & -36/L^2 & 18/L \\ 6/L & 2 & 12/L & 16 & -18/L & 6 \\ 0 & 0 & -36/L^2 & -18/L & 36/L^2 & -18/L \\ 0 & 0 & 18/L & 6 & -18/L & 12 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 12 & 600 & -12 & 600 & 0 & 0 \\ 600 & 40000 & -600 & 20000 & 0 & 0 \\ -12 & -600 & 48 & 1200 & -36 & 1800 \\ 600 & 20000 & 1200 & 160000 & -1800 & 60000 \\ 0 & 0 & -36 & -1800 & 36 & -1800 \\ 0 & 0 & 1800 & 60000 & -1800 & 120000 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

$$\mathbf{f} = \begin{Bmatrix} P \\ 0 \\ pL/2 \\ pL^2/12 \\ pL/2 + R_{u_3} \\ -pL^2/12 + R_{\theta_3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2.5 \\ 41.667 \\ 2.5 + R_{u_3} \\ -41.667 + R_{\theta_3} \end{Bmatrix}. \quad (5)$$

3. Ecrire le système d'équation à résoudre et préciser la méthode de résolution. (2 pts)

$$\begin{bmatrix} 12 & 600 & -12 & 600 & 0 & 0 \\ 600 & 40000 & -600 & 20000 & 0 & 0 \\ -12 & -600 & 48 & 1200 & -36 & 1800 \\ 600 & 20000 & 1200 & 160000 & -1800 & 60000 \\ 0 & 0 & -36 & -1800 & 36 & -1800 \\ 0 & 0 & 1800 & 60000 & -1800 & 120000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2.5 \\ 41.667 \\ 2.5 + R_{u_3} \\ -41.667 + R_{\theta_3} \end{Bmatrix}. \quad (6)$$

Lorsque  $u_3$  et  $\theta_3$  égales à zéro, quatre premières lignes sont utilisées. Il s'agit d'un système de quatre équations et quatre inconnues.

4. Afin de faciliter les calculs, nous vous donnons le déplacement  $u_1 = 4.9306$  m et la rotation  $\theta_1 = -0.0428$  rad. Calculer les valeurs des inconnues en déplacement manquantes. (2 pts)

Utilisant la matrice de rigidité globale et le vecteur des forces global,

$$2.5 = -12u_1 - 600\theta_1 + 48u_2 + 1200\theta_2 \quad (7)$$

$$41.67 = 600u_1 + 20000\theta_1 + 1200u_2 + 160000\theta_2 \quad (8)$$

$\rightarrow u_2 = 1.3194$  m et  $\theta_2 = -0.0228$  rad.

5. Trouver les forces de réaction au noeud 3. (2 pts)

Utilisant la matrice de rigidité globale le vecteur des forces global (bas deux lignes),

$$-36u_2 - 1800\theta_2 = 2.5 + R_{u_3} \quad (9)$$

$$1800u_2 + 60000\theta_2 = -41.67 + R_{\theta_3} \quad (10)$$

$R_{u_3} = -9$  N et  $R_{\theta_3} = 1050$  N.m.

## Exercice 2 : Element plan soumis à une pression latérale – $x$ points

Une structure dont l'épaisseur  $t$  est petite par rapport aux autres dimensions est étudiée à l'aide d'éléments rectangulaires quadratiques. La figure 2 présente un élément de la structure.

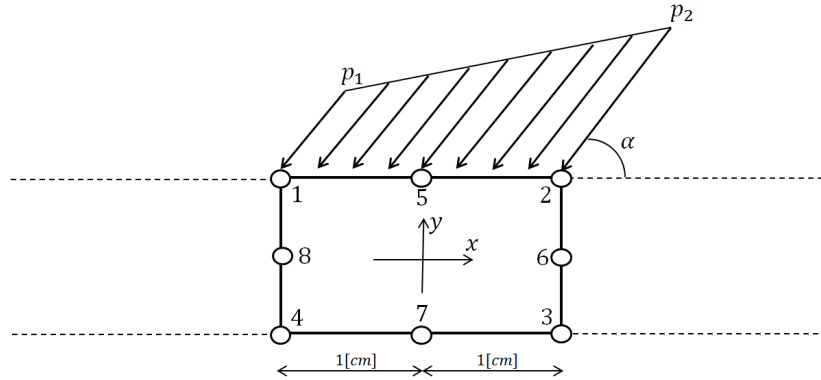


FIGURE 2 – Élément rectangulaire quadratique à 8 noeuds.

1. Quel état plan permet de représenter cette structure à l'aide d'élément 2D ? Donner la matrice constitutive  $\mathbf{D}$  relative à cet état plan en fonction du module d'élasticité et du coefficient de poisson.

Pour rappel, la matrice constitutive permet de lier les contraintes aux déformations pour chaque élément :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{D} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

Comme  $t$  est petit par rapport aux autres dimensions, il s'agit d'un état plan de contrainte pour lequel la matrice constitutive vaut :

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu)/2 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

2. Combien de degrés de liberté possède l'élément de la figure 2 et quels sont-ils ?  
Chaque noeud possède deux degrés de liberté  $u$  et  $v$  correspondant respectivement à un déplacement dans la direction  $x$  et  $y$ , soit un total de 16 degrés de liberté.
3. La face supérieure de l'élément de la figure 2 est soumise à une pression inclinée répartie linéairement entre une valeur  $p_1$  et  $p_2$  (en  $[\text{N/cm}]$ ). Calculez la répartition nodale de cette pression et exprimez le vecteur force  $\mathbf{f}$  pour cet élément.

Les fonctions d'interpolation quadratiques suivantes sont définies le long de la face 1 – 5 – 2 :

$$\mathbf{N}(x) = [N_1(x), N_5(x), N_2(x)] = [-0.5x(1 - x), 1 - x^2, 0.5x(1 + x)], \quad (13)$$

tandis que la répartition de la force de pression est décrite par :

$$\mathbf{p}(x) = 0.5(1 - x)\mathbf{p}_1 + 0.5(1 + x)\mathbf{p}_2. \quad (14)$$

La répartition nodale de la pression est calculée par l'intégrale suivante :

$$\mathbf{f}^{1-5-2} = \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T(x) \mathbf{p}(x) dx = \frac{1}{3} [\mathbf{p}_1, 2(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2), \mathbf{p}_2]^T \quad (15)$$

En projetant  $\mathbf{p}(x) = (-p^x, -p^y)$  sur le système d'axe défini à la figure 2, on obtient le vecteur des forces suivants pour l'élément :

$$\mathbf{f} = -\frac{1}{3} \begin{Bmatrix} p_1^x \\ p_1^y \\ p_2^x \\ p_2^y \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2(p_1^x + p_2^x) \\ 2(p_1^y + p_2^y) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (16)$$

**Exercice 3 : Analyse d'une structure composée d'une poutre et d'une barre.**

1. Indiquer les degrés de liberté nuls et non nuls à chaque noeud.

The degrees of freedom are indicated in Figure 3. Because the beam structure has rotational degrees

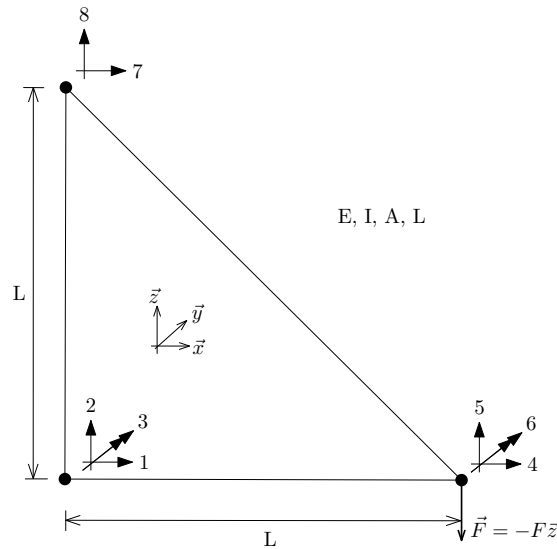


FIGURE 3 – degrees of freedom of the structures composed with a beam and bar.

of freedom with the two translational degrees of freedom, it has total 6 components of displacement ( $d_1, d_2, d_3, d_4, d_5$  and  $d_6$ ). On the other hands, the bar structure has only four displacements ( $d_4, d_5, d_7$  and  $d_8$ ).

2. Donner la matrice de rigidité locale de l'élément barre, puis la transformer dans le repère global. De même pour l'élément poutre. The beam structure is not inclined. Therefore, the stiffness matrix of

the beam can be written as :

$$\mathbf{k}_{\text{beam}}^{\text{local}} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}. \quad (17)$$

On the other hands, the bar structures is rotated by  $3\pi/4$ . We need to consider rotating with rotational matrix  $\mathbf{T}$  as follows :

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{\text{bar}}^{\text{local, unrotated}} &= \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{with } \mathbf{T} = \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 \\ -S & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & S \\ 0 & 0 & -S & C \end{bmatrix} \\ \mathbf{k}_{\text{bar}}^{\text{local, rotated}} &= \mathbf{T}^T \mathbf{k}_{\text{bar}}^{\text{local, unrotated}} \mathbf{T} \\ &= \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \quad \text{with } C = \cos \frac{3\pi}{4} \text{ and } S = \sin \frac{3\pi}{4} \end{aligned} \quad (18)$$

3. En tenant compte des conditions aux limites, établir le système d'équation global traduisant l'équilibre. (Calculer  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{f}$ .)

The two local stiffness matrices are assembled to the global matrix  $\mathbf{K}^{\text{global}}$ . The  $\mathbf{K}^{\text{global}}$  considering the force and displacement boundary conditions is shown as

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{\text{global}} &= \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} + \frac{EA}{2L} & -\frac{EA}{2L} & 0 & -\frac{EA}{2L} & \frac{EA}{2L} \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{EA}{2L} & \frac{12EI}{L^3} + \frac{EA}{2L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{EA}{2L} & -\frac{EA}{2L} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{2L} & \frac{EA}{2L} & 0 & \frac{EA}{2L} & -\frac{EA}{2L} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{2L} & -\frac{EA}{2L} & 0 & -\frac{EA}{2L} & \frac{EA}{2L} \end{bmatrix} \\ \mathbf{u}^{\text{global}} &= \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \\ d_7 \\ d_8 \end{bmatrix} \quad \text{and } \mathbf{f}^{\text{global}} = \mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\bar{F} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ R_7 \\ R_8 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (19)$$

With these matrix and vectors, the system of equations to solve is  $\mathbf{Ku} = \mathbf{f}$ . In this system, we have three unknowns ( $d_4$ ,  $d_5$  and  $d_6$ ) and three equations (from fourth to sixth rows and columns).

4. Expliquer comment calculer l'effort normal dans la barre inclinée à partir du système  $\mathbf{Ku} = \mathbf{f}$ .

Once we compute the solutions (translational displacements on node  $z$  :  $d_4$  and  $d_5$ ) from the previous system, then we evaluate effective displacements on node  $z$  in the direction of bar as follows :

$$d_{\text{eff}} = d_5 \sin \frac{\pi}{4} - d_4 \cos \frac{\pi}{4} \quad (20)$$

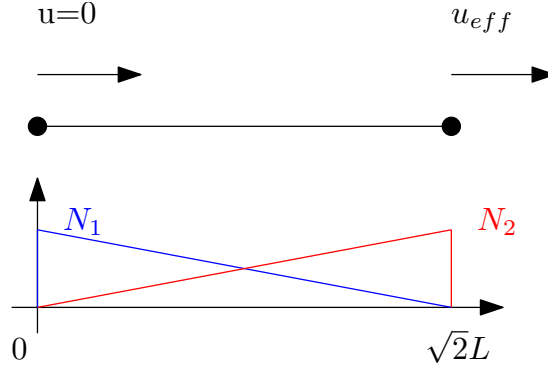


FIGURE 4 – system of tilted bar structure

With the  $d_{\text{eff}}$ , the bar structures can be understood as shown in Figure 4

The normal force in bar can be computed using the derivatives of shape functions as follows :

$$N(s) = EA\epsilon(s) = EA \left[ \frac{dN_1(s)}{ds} \quad \frac{dN_2(s)}{ds} \right] [0 \quad d_{\text{eff}}]^T = \frac{EA}{\sqrt{2}L} d_{\text{eff}} \quad (21)$$

with the  $N_1(s) = \frac{-1}{\sqrt{2}L}(s - \sqrt{2}L)$  and  $N_2(s) = \frac{1}{\sqrt{2}L}s$  within  $0 \leq s \leq \sqrt{2}L$ .

5. Dans le cas où  $\mathbf{F} = F_y \mathbf{y}$ , calculer le déplacement horizontal au noeud 2 et l'effort normal dans la barre inclinée.

A bar structure does not have resistive force against bending deformations. Therefore, the force  $F_y$  is only loaded by the beam structure meaning that the axial force of bar is zero. By using the beam deflection equation, we find the horizontal displacement of node 2 is  $d_y = \frac{FL^3}{3EI}$ .