

# Notes - stabilité des pentes ouvrages géotechniques

B. Lecampion

May 4, 2020

## 1 Stabilité d'une pente infinie - glissement plan

### 1.1 Cas sans eau

#### 1.1.1 Approche par facteur de sécurité

On se réfère à la Fig. 1. On étudie le cas d'un glissement plan parallèle à une surface inclinée infinie d'inclinaison  $\beta$ .

On définit le facteur de sécurité comme le rapport entre la force résistante le long du glissement  $F_{resistance} = T$  et la force motrice venant de l'inclinaison du terrain  $F_{motrice}$ .

Comme la pente est infinie on peut raisonner sur un élément unitaire  $L \equiv 1$  dans la direction de la pente (cf. Fig. ). Le poids  $W$  de cet élément est simplement

$$W = \gamma L d = \gamma L H \cos \beta$$

La composante normale du poids sur la surface de glissement est donc

$$W_N = N = W \cos \beta$$

et la composante tangentielle qui est la force motrice

$$W_T = F_{motrice} = W \sin \beta$$

La force résistance le long du glissement plan est obtenu en utilisant le critère de Mohr-Coulomb qui relie la contrainte normal et tangentielle à la rupture

$$F_{resistance} = T = cL + N \tan \phi$$

On obtient donc le facteur de sécurité

$$F_s = \frac{F_{resistance}}{F_{motrice}} = \frac{cL + N \cos \beta \tan \phi}{N \sin \beta}$$

que l'on peut réécrire

$$F_s = \frac{c}{\gamma H \sin \beta \cos \beta} + \frac{\tan \phi}{\tan \beta}$$

et on retrouve bien le résultat intuitif que pour un sol sans cohésion, l'inclinaison de la pente maximale est égale au coefficient de friction du sol (angle au repos).

#### 1.1.2 Lien avec l'analyse limite

On se propose de faire maintenant un raisonnement similaire par une approche cinématique en analyse limite - qui nous donnera donc une borne supérieure. Ici, on fait également le calcul pour un élément unitaire le long de la surface de rupture.

L'analyse limite est basé sur le modèle rigide plastique. On prendra tout d'abord un critère de Mohr-Coulomb associé. On a vu (cf cours d'analyse limite), que le long d'une surface de glissement, pour un critère de Mohr-Coulomb de type associé la discontinuité de vitesse (qui vu que seul la partie supérieure de la pente

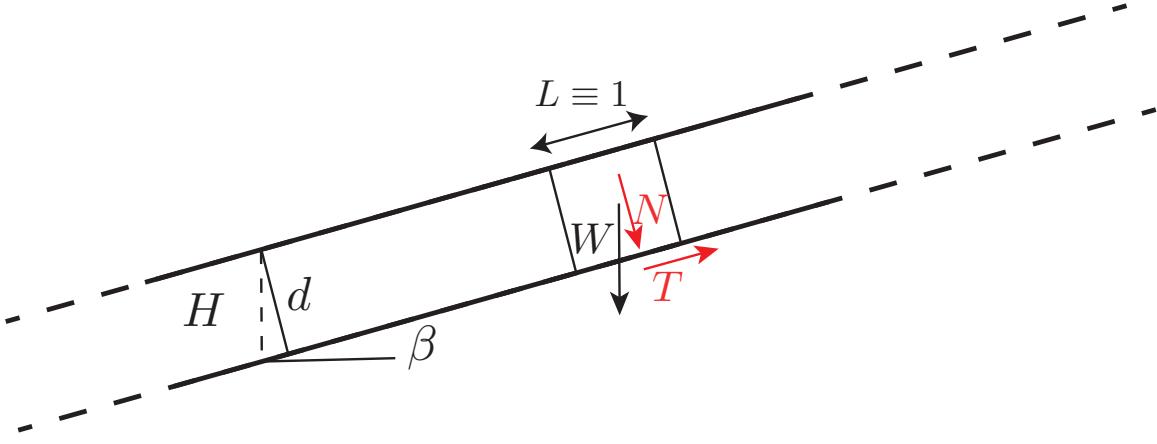


Figure 1: Glissement plan à une profondeur  $H$  - pente infinie.

bouge correspond ici à la vitesse de la partie supérieure de la pente qui glisse)  $\dot{U}$  fait un angle égale à  $\phi$  avec la surface de glissement.

La puissance des efforts extérieurs dans ce cas est:

$$\mathcal{P}_{ext}(\dot{U}) = \int_V \gamma \dot{U}_z dV = \gamma \|\dot{U}\| \sin(\beta - \phi) \times L \times H \cos \beta$$

et la puissance dissipée le long de la surface de glissement (puissance résistance maximale) est

$$\mathcal{P}_{diss}(\dot{U}) = \int_L c \|\dot{U}\| \cos \phi ds = c \|\dot{U}\| \cos \phi \times L$$

et on obtient en utilisant le ratio de la puissance dissipée et de la puissance extérieure et la puissance des effort extérieurs, le coefficient de sécurité suivant:

$$F_s^{UB} = \frac{c \cos \phi}{\gamma H \cos \beta \sin(\beta - \phi)}$$

et pour un sol de cohésion nulle, ce facteur de sécurité est zero ! On aurait pu déjà déduire ce résultat car la puissance dissipée est facteur de  $c$ .

### 1.1.3 Ecoulement plastique non-associé

Ce résultat non-intuitif et différent de celui précédemment obtenu est du à l'hypothèse de plasticité associée. Une telle hypothèse n'est pas réaliste car le fait que le vecteur vitesse fait un angle égal au coefficient de friction implique une dilatance continue pendant la déformation. Expérimentalement, on observe que après une certaine distance de glissement la dilatance "sature" et la vitesse de glissement devient parallèle à la surface de glissement. Il convient donc de lever la restriction de prendre un critère de plasticité non-associé. On introduit donc un potentiel plastique  $g$  différent du critère de rupture  $f$ - dans le repère contraintes normale / tangentielle à la surface de glissement plan.

$$\begin{aligned} f(\sigma_n, \tau) &= \tau - c - \sigma_n \tan \phi \\ g(\sigma_n, \tau) &= \tau - \sigma_n \tan \psi \end{aligned}$$

où  $\psi$  est l'angle de dilatance ( $\psi < \phi$ ) avec

$$\begin{aligned} t_i &= \sigma_{ij} n_j \text{ vecteurs contraintes sur } S_\Sigma \\ t_s &= \tau = s_i \sigma_{ij} n_j \text{ contrainte de cisaillement sur } S_\Sigma \\ t_n &= \sigma_n = n_i \sigma_{ij} n_j \text{ contrainte normale sur } S_\Sigma \end{aligned}$$

où  $n_j$  est la normale à la surface de glissement  $S_\Sigma$  et  $s_i$  le vecteur tangent associé.

On écrira l'écoulement plastique non-associé sous la forme

$$[[\dot{u}_i]] = \lambda_d \frac{\partial g}{\partial t_i} \quad f(t_i) = 0$$

où  $\lambda_d$  est un multiplicateur plastique de dimensions  $[L/T]$  ici et  $\lambda_d f = 0$  et  $\lambda_d \geq 0$ . on obtient donc

$$\begin{aligned} [[\dot{u}_n]] &= -\lambda_d \tan \psi \\ [[\dot{u}_s]] &= \lambda_d \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} [[\dot{u}_n]] &= -\|\dot{U}\| \sin \psi \\ [[\dot{u}_s]] &= \|\dot{U}\| \cos \psi \end{aligned}$$

On peut donc calculer la puissance dissipée (unitaire) le long d'une surface de glissement  $p_{diss}$

$$p_{diss} = t_i [[\dot{u}_i]] = \tau [[\dot{u}_s]] + \sigma_n [[\dot{u}_n]]$$

avec la rupture  $f = 0$ , i.e.  $\tau = c + \sigma_n \tan \phi$

$$p_{diss} = (c + \sigma_n \tan \phi) \|\dot{U}\| \cos \psi - \sigma_n \|\dot{U}\| \sin \psi$$

Pour une rupture développée ayant atteint l'état critique, la dilatance devient nulle (déformation purement cisailante), i.e.  $\psi = 0$ . On obtient alors

$$p_{diss}^{CS} = (c + \sigma_n \tan \phi) \|\dot{U}\|$$

où le superscript *CS* est une abréviation de “critical state”.

En re-faisant à l'état critique le calcul pour cette surface de rupture plane infinie. La puissance des efforts est également changée car la vitesse de glissement est parallèle au plan de glissement

$$\mathcal{P}_{ext}(\dot{U}) = \int_V \gamma \dot{U}_z dV = \gamma \|\dot{U}\| \sin(\beta) \times L \times H \cos \beta$$

et la puissance dissipée est - comme  $\sigma_n = \frac{W}{L} \cos \beta = \gamma H \cos^2 \beta$

$$\mathcal{P}_{diss}(\dot{U}) = \int_L p_{diss} ds = (c + \gamma H \cos^2 \beta \tan \phi) \|\dot{U}\| L$$

et on obtient un facteur de sécurité

$$F_s = \frac{c}{\gamma H \cos \beta \sin \beta} + \frac{\tan \phi}{\tan \beta}$$

On retrouve exactement le résultat obtenu préalablement par une approche d'équilibre limite - qui faisait l'hypothèse implicite d'un écoulement non-associé (pas de dilatance). Il est important de se rappeler que la dilatance du sol “sature” pour des déplacement suffisant et la déformation plastique s'effectue alors sans dilatance (sans changement de volume). L'hypothèse d'un écoulement associé n'est pas réaliste pour analyser des grand glissement. Les méthodes de stabilité des pentes se placent souvent à l'état critique (sans dilatance - écoulement non-associé) implicitement.

## 1.2 Présence d'eau

Faisons maintenant, le calcul pour le cas d'une nappe à une distance  $h_w$  du glissement plan. Dans ce cas l'écoulement d'eau est parallèle au plan de glissement et à la surface. Il convient cette fois ci d'écrire le critère de Mohr-Coulomb en contraintes effectives. La pression d'eau  $u$  le long de la surface de glissement est ici:

$$u = \gamma_w H_w \cos \beta$$

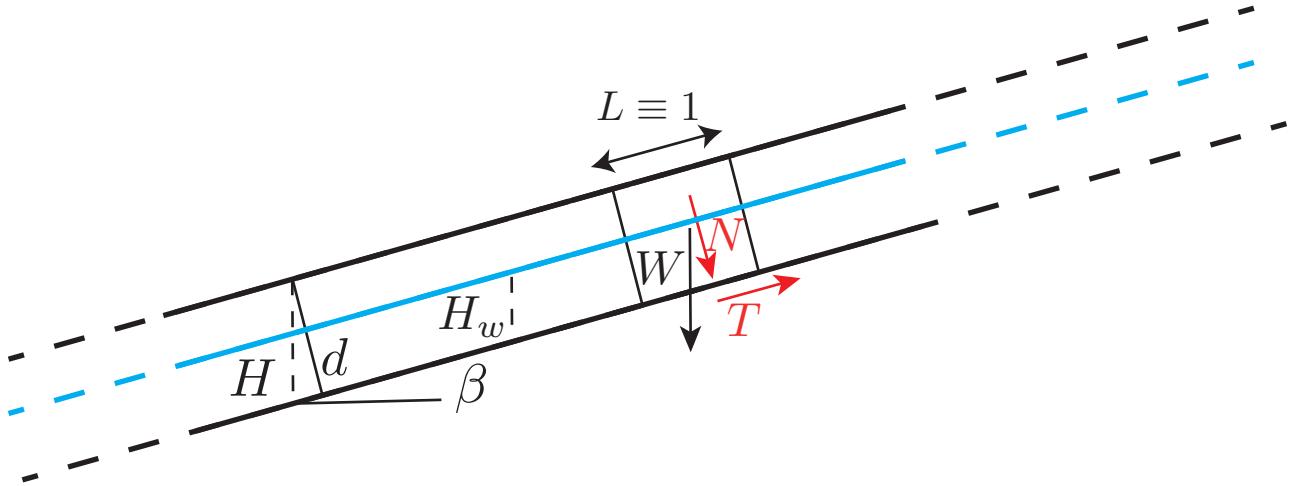


Figure 2: Pente infine avec écoulement parallèle

et sa résultante est  $u \cos \beta \times L$ . La force résistante (puissance dissipée / par la vitesse de glissement) devient

$$F_{\text{résistante}} = (c + (\gamma H - \gamma_w H_w) \cos^2 \beta \tan \phi) L$$

et le facteur de sécurité est maintenant

$$F_s = \frac{c}{\gamma H \sin \beta \cos \beta} + \frac{(\gamma H - \gamma_w H_w) \tan \phi}{\gamma H} \frac{\tan \phi}{\tan \beta}$$

On notera que pour le cas  $H_w = H$  et un sol de cohésion nulle comme  $\gamma_w \approx \gamma/2$ , le facteur de sécurité est divisé par 2 en présence d'eau !

$$F_s = \frac{(\gamma H - \gamma_w H_w) \tan \phi}{\gamma H} \frac{\tan \phi}{\tan \beta} \approx \frac{1}{2} \frac{\tan \phi}{\tan \beta}$$

## 2 Stabilité d'un talus fini

### 2.1 Glissement plan

On se souvient que pour un talus vertical ( $\beta = \pi/2$ ), les bornes de l'analyse limite (sup et inf) donnent (cf semaine 2):

$$3.73 \frac{\cos \phi}{1 - \sin \phi} \leq \frac{\gamma H}{c} \leq 3.83 \frac{\cos \phi}{1 - \sin \phi}$$

et on avait obtenu par un calcul par l'extérieur (cinématique) en faisant l'hypothèse d'un glissement plan

$$\left( \frac{\gamma H}{c} \right)^+ = 4 \frac{\cos \phi}{1 - \sin \phi}$$

On étend ici ce calcul au cas d'un talus d'inclinaison  $\beta$ . (sans écoulement d'eau). Les résultats seront applicables soit à court terme ( $c = c_u$ ,  $\phi = 0$ ) notamment dans les argiles, soit pour le cas sans eau.

On se réfère à la figure 3. Comme dans le cas d'un talus vertical ( $\beta = \pi/2$ ), la puissance des efforts extérieurs est:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{ext.}}(\dot{U}) &= \int_{OAB} \gamma \dot{U}_z \, dS = \int_{OAB} \gamma \|\dot{U}\| \cos(\alpha + \phi) \, dS \\ &= \gamma \|\dot{U}\| \cos(\alpha + \phi) \times \left( \frac{1}{2} H^2 \tan \alpha - \frac{1}{2} H^2 \cot \beta \right) \end{aligned}$$

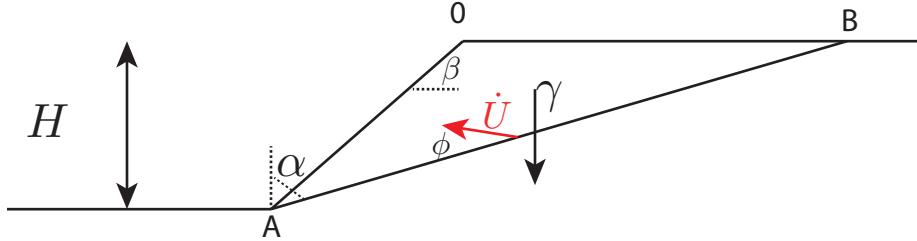


Figure 3: Talus incliné - glissement plan.

La puissance dissipée le long de la surface de glissement (modèle associé) est identique que pour le cas vertical:

$$\mathcal{P}_{diss}(\dot{U}) = \int_{AB} c \|\dot{U}\| \cos \phi ds = \frac{H}{\cos \alpha} c \|\dot{U}\| \cos \phi$$

L'application du PPV donne l'expression suivante de la borne supérieure paramétrée par  $\alpha$ :

$$\frac{\gamma H}{c} = 2 \frac{\cos \phi}{\cos(\alpha + \phi)} \frac{1}{(\sin \alpha - \cos \alpha \cot \beta)}$$

Il convient donc de minimiser cette expression par rapport à  $\alpha$  pour obtenir la borne supérieure la plus petite. Que l'on obtient pour e.

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} \cos(\alpha + \phi) (\sin \alpha - \cos \alpha \cot \beta) &= 0 \\ \sin(2\alpha + \beta + \phi) &= 0 \end{aligned}$$

à savoir pour

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\phi + \beta}{2}$$

[On retrouve bien  $\alpha = \pi/4 - \phi/2$  pour le cas  $\beta = \pi/2$ ]. La borne supérieure est au final:

$$\frac{\gamma H}{c} = \frac{4 \cos \phi \sin \beta}{1 - \cos(\beta - \phi)}$$

[On retrouve bien  $4 \cos \phi / (1 - \sin \phi)$  pour le cas  $\beta = \pi/2$ ].

Le facteur de sécurité (rapport puissance dissipée max / puissance des efforts extérieurs) est

$$F_s = \frac{c}{\gamma H} \frac{4 \cos \phi \sin \beta}{1 - \cos(\beta - \phi)}$$

Le cas  $\phi = 0$ , se simplifie en

$$F_s = \frac{c}{\gamma H} \frac{4 \sin \beta}{1 - \cos \beta} = \frac{c}{\gamma H} \frac{4}{\tan \beta/2}$$

## 2.2 Glissement circulaire

On effectue ici une approche de type équilibre limite qui est très souvent utilisé en mécanique des sols - attention cela diffère de l'analyse limite par l'extérieur dans le sens que l'on utilise pas le principe des travaux virtuels.

Considérons le cas d'un talus incliné dans un milieu purement cohérent ( $\phi = 0$ ) de cohésion  $c$  avec une surface de glissement circulaire de rayon  $R$  passant par le bas de talus et ayant comme centre le haut du talus (point O). Il est classique de définir un coefficient de sécurité comme le rapport entre le moment résistant (du à la cohésion sur le plan de glissement) et le moment moteur du poids du sol en mouvement. On a ici

$$\mathcal{M}_{resistant} = c \times R(\pi - \beta) \times R$$

$$\mathcal{M}_{moteur} = W \sin(\beta/2) \times |OG|$$

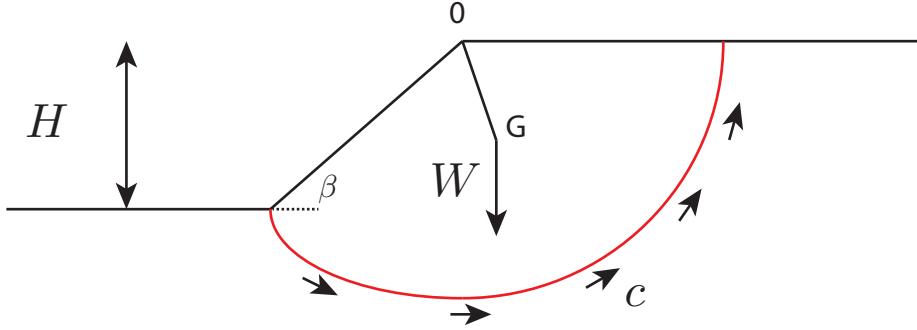


Figure 4: Talus incliné - sol purement cohérent - glissement circulaire

avec le poids  $W$  de la section circulaire égal à

$$W = \gamma R^2(\pi - \beta)$$

La distance  $|OG|$  entre le centre de gravité et le centre de la section circulaire est donnée par

$$|OG| = \frac{2R \sin(\pi - \beta)}{3(\pi - \beta)}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} F_s &= \frac{3cR^2(\pi - \beta)}{2\gamma R^3 \sin(\beta/2) \sin(\pi - \beta)} \\ &= \frac{c}{\gamma H} \frac{3(\pi - \beta) \sin \beta}{2 \sin(\beta/2) \sin(\beta)} \\ &= \frac{c}{\gamma H} \frac{3(\pi - \beta)}{2 \sin(\beta/2)} \end{aligned}$$

On notera que la limite

$$\lim_{\beta \rightarrow \pi/2} F_s = \frac{c}{\gamma H} \frac{3\pi}{2\sqrt{2}} \approx 3.332 \frac{c}{\gamma H}$$

est différente de la meilleure estimation obtenue par l'analyse limite qui se situe entre 3.73 et 3.83 ( $\times \frac{c}{\gamma H}$ )!

Ce résultat est une illustration du fait que les approches de type équilibre limite ne donnent ni une borne sup ou inf. En revanche les estimations obtenues pour des ruptures de glissements sont assez proches et donnent des résultats conservatifs.

### 2.3 Glissement circulaire avec écoulement

En pratique, pour des sols frottant, surfaces de glissement seront des spirales logarithmiques. Une première approche consiste à garder l'hypothèse d'un glissement circulaire mais de relâcher l'hypothèse que le centre du cercle se situe en haut du talus et que le rayon du cercle de glissement est égal à  $H/\sin \beta$ . Il convient alors d'optimiser par rapport à la position du centre du cercle afin d'obtenir le coefficient de sécurité le plus faible.

Abaques de Caquot-Kérisel

## 2.4 Méthode des tranches (tiré de Lancellotta)

### 8.19.2 Method of slices

The previous analysis is very effective in determining the safety factor when considering a homogeneous infinite slope and the failure mechanism is of the translational type. The method of slices has been developed to analyse more complex situations, and where more than one layer with different strength parameters is present, the expected groundwater regime differs from simple patterns and the failure surface may be composite.

In this method (see Figure 8.60) the soil mass is subdivided into a number of vertical slices and the equilibrium of each slice is then considered. If a number of  $n$  slices is considered, the unknowns are the following:

- $n$  forces  $N'_i$  normal to the base of each slice;
- $(n - 1)$  normal forces  $E'_i$  and  $(n - 1)$  shear forces  $X_i$  at the interface of slices;
- $n$  coordinates  $a$  to locate the normal forces  $N'_i$ ;
- $(n - 1)$  coordinates  $b$  to locate the interface forces  $E'_i$ .

If the further unknown of the safety factor is added (note that the safety factor gives the possibility of expressing the shear forces at the bottom in terms of  $N'_i$ ), then the total number of unknowns is  $(5n - 2)$  to be compared with the number  $3n$  of available equilibrium equations.

Presuming that the slices are so thin that the forces  $N'_i$  can be located on the centroid of each slice, then there are  $(4n - 2)$  unknowns, but the problem still remains statically undetermined. It is then necessary to introduce additional assumptions in order to remove the extra unknowns. These assumptions usually refer to the interface forces, and they explain the differences between various methods (see for example Morgenstern and Price, 1965; Sarma, 1973). In the sequel, we limit the presentation to some approximate methods of analysis, which has been proved to give satisfactory results.

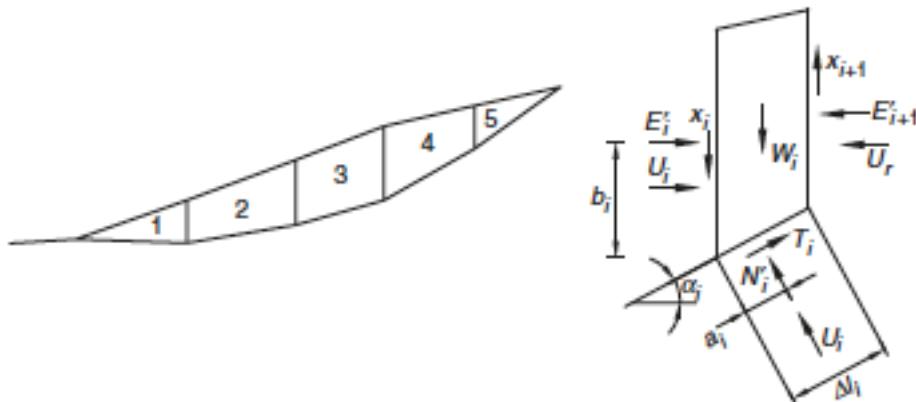


Figure 8.60 Method of slices.

### 8.19.3 Simplified Bishop method

In this method (Bishop, 1955), the failure surface is represented by a circular sliding surface (rotational failure). With reference to Figure 8.61, equating the moment about O of the weight of the soil with the moment of the forces acting on the sliding surface, the safety factor is given by:

$$F = \frac{R \cdot \sum [c'l_i + (N_i - U_i) \tan \varphi']}{\sum W_i x_i}, \quad (8.118)$$

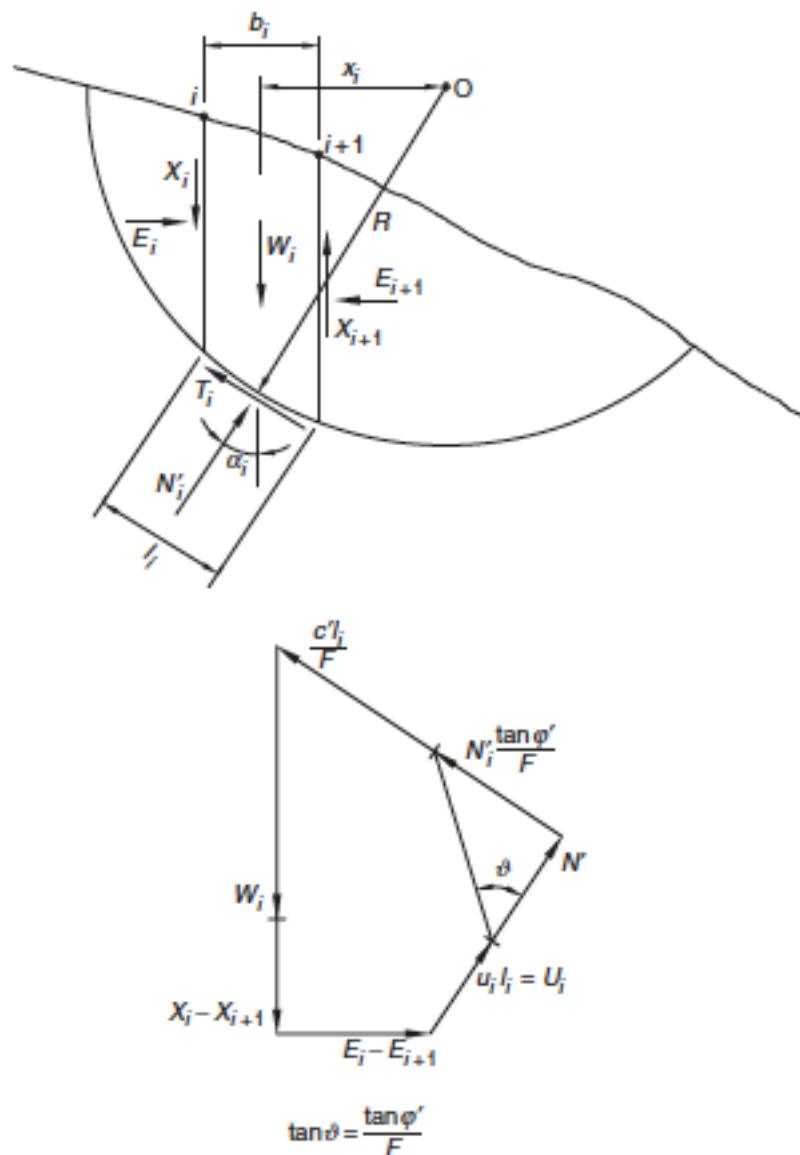


Figure 8.61 Simplified Bishop method.

the magnitude of the mobilized shear strength being:

$$T_i = \frac{c'l_i + (N_i - U_i)\tan\varphi'}{F}. \quad (8.119)$$

From the vertical equilibrium of the slice:

$$W_i - T_i \sin \alpha_i - N_i \cos \alpha_i - (X_{i+1} - X_i) = 0, \quad (8.120)$$

we can derive the value of  $N_i$ , and, by substituting this value into (8.118), the expression of the safety factor becomes:

$$F = \frac{\sum \left[ (c'b_i + W_i(1 - r_u)\tan\varphi' + (X_i - X_{i+1})\tan\varphi') \frac{1}{M_\alpha} \right]}{\sum W_i \sin \alpha_i}, \quad (8.121)$$

where:

$$M_\alpha = \cos \alpha_i \left( 1 + \frac{\tan\varphi' \tan \alpha_i}{F} \right) \quad (8.122)$$

and  $r_u$  is the ratio which gives the pore pressure as a function of the total weight of the column of the soil above the considered point, i.e.:

$$r_u = \frac{u_i b_i}{W_i}. \quad (8.123)$$

Assuming that  $X_i - X_{i+1} = 0$  throughout, the factor of safety can be computed by means of the approximate expression:

$$F = \frac{\sum \left[ (c'b_i + W_i(1 - r_u)\tan\varphi') \frac{1}{M_\alpha} \right]}{\sum W_i \sin \alpha_i}, \quad (8.124)$$

where  $M_\alpha$  is given by (8.122).

Note that in equation (8.124) the safety factor appears within the summation on the r.h.s. as well on the l.h.s., so that an iterative procedure is needed. An initial value of the safety factor is guessed (closed to unity) and inserted in the r.h.s. and the value of  $F$  is computed. This value is the new input on the r.h.s. and the procedure is repeated until an almost constant value of  $F$  is attained (usually three to four iterations provide the required convergency).

Equilibre dans le repère normal - tangentiel à la ligne de glissement

$$\frac{u_i b_i}{\cos \alpha_i} + \frac{\sigma' b_i}{\cos \alpha_i} - (W_i + \Delta X_i) \cos \alpha_i + \Delta E_i \sin \alpha_i = 0$$

$$T_{Ri} - (W_i + \Delta X_i) \sin \alpha_i - \Delta E_i \cos \alpha_i = 0$$

avec

$$T_{Ri} = (c' + \sigma' \tan \phi) \frac{b_i}{\cos \alpha_i} / F_s$$

et la définition du facteur de sécurité à partir de l'équilibre global des moments par rapport au centre du cercle de rupture:

$$F_s = \frac{\sum_i (c' + \sigma' \tan \phi) b_i / \cos \alpha_i}{\sum_i W_i \sin \alpha_i}$$

**Fellenius:**  $\Delta X_i = 0$  et  $\Delta E_i = 0$  alors on obtient

$$\sigma' b_i = W_i \cos^2 \alpha - u_i b_i$$

et au final

$$F_s = \frac{\sum_i (c' b_i + (W_i \cos^2 \alpha - u_i b_i) \tan \phi) / \cos \alpha}{\sum_i W_i \sin \alpha}$$

**Bishop simplifié**  $\Delta X_i = 0$  on obtient

$$\Delta E_i = T_{Ri} / \cos \alpha_i - (W_i) \tan \alpha_i$$

$$\frac{\sigma' b_i}{\cos \alpha_i} = (W_i) \cos \alpha_i - \frac{u_i b_i}{\cos \alpha_i} - T_{Ri} \tan \alpha_i + (W_i) \tan \alpha_i \sin \alpha_i$$

soit encore

$$\sigma' b_i = (W_i - u_i b_i) - (c' + \sigma' \tan \phi) b_i \frac{\tan \alpha_i}{F_s}$$

i.e.

$$(c' + \sigma' \tan \phi) b_i (1 + \tan \alpha_i \tan \phi / F_s) = c' b_i + (W_i - u_i b_i) \tan \phi$$

d'où on obtient le facteur de sécurité

$$F_s = \frac{\sum_i (c' b_i + (W_i - u_i b_i) \tan \phi) \times \frac{1}{\cos \alpha_i \times (1 + \tan \alpha_i \tan \phi / F_s)}}{\sum_i W_i \sin \alpha}$$