

## Exercice #4

### La rupture du “Transcona Grain Elevator”



Figure 1: Rupture par rotation de la fondation superficielle du complexe de silos à grains de Transcona (circa 1913).

Le complexe de silos à grains de Transcona (Canada - Nord-Est de Winnipeg) consistant de 5 rangées de 13 silos (28 mètres de haut / 4.4 mètres de diamètre interne, épaisseur 5cm en béton - toit  $\sim$  rectangulaire de 20cm d'épaisseur) est rentré en service en septembre 1913. Mi-October 1913, alors que le taux de remplissage arriva à 87.5%, une rupture (lente) en rotation s'est produite. L'inclinaison finale (au bout de 24h) se 'stabilisa' autour de  $27^\circ$ . La fondation de cet ouvrage est un simple radier (dimensions  $b = 23.5$  m,  $L = 59.5$  m, épaisseur 1.5 mètre), à une profondeur de 3.7 m au dessous de la surface. On notera que le grain stocké avait un poids de  $\gamma = 13.81 \text{ kN/m}^3$  (valeur prenant en compte la 'porosité' de ce milieu granulaire). Un profil simplifié du sol est représenté sur la figure 2. La géologie du site consiste en une couche d'argile de même texture / composition mais 2 couches de propriétés mécanique différentes sont clairement visible.

On se propose de revisiter par différentes approches la capacité portante à court terme de cet ouvrage.

#### 0.1 Analyse limite cinématique du mécanisme de rupture (borne supérieure)

Tout d'abord, en s'inspirant du mécanisme de ruine observé réellement, on dérivera une borne supérieure de la capacité portante  $q_p$  en faisant l'hypothèse d'une semelle filante (calcul 2D - longueur de fondation infini) et d'un sol homogène de cohésion non-drainée  $c_u$  et d'une charge  $q$  à la profondeur de la fondation. On se reportera à la figure 3 pour une description du mécanisme de ruine (on notera que  $\sin \alpha = b/R$  pour simplifier les calculs). On néglige l'effet du poids du sol pour le calcul de cette borne supérieure.

- Obtenir une expression (semi-analytique) de la capacité portante
- Comparer le résultat obtenu avec la solution exacte de Prandtl
- Effectuer ensuite une application numérique pour le cas de Transcona - calculer un Facteur de sécurité
- Discuter comment prendre en compte le fait que le sol est mécaniquement inhomogène

#### 0.2 Calcul à court terme - approche classique

En utilisant la formule de la capacité portante à court terme vu en cours (Prandtl), estimer la capacité portante pour le cas des dimensions réelles de l'ouvrage. Discuter.

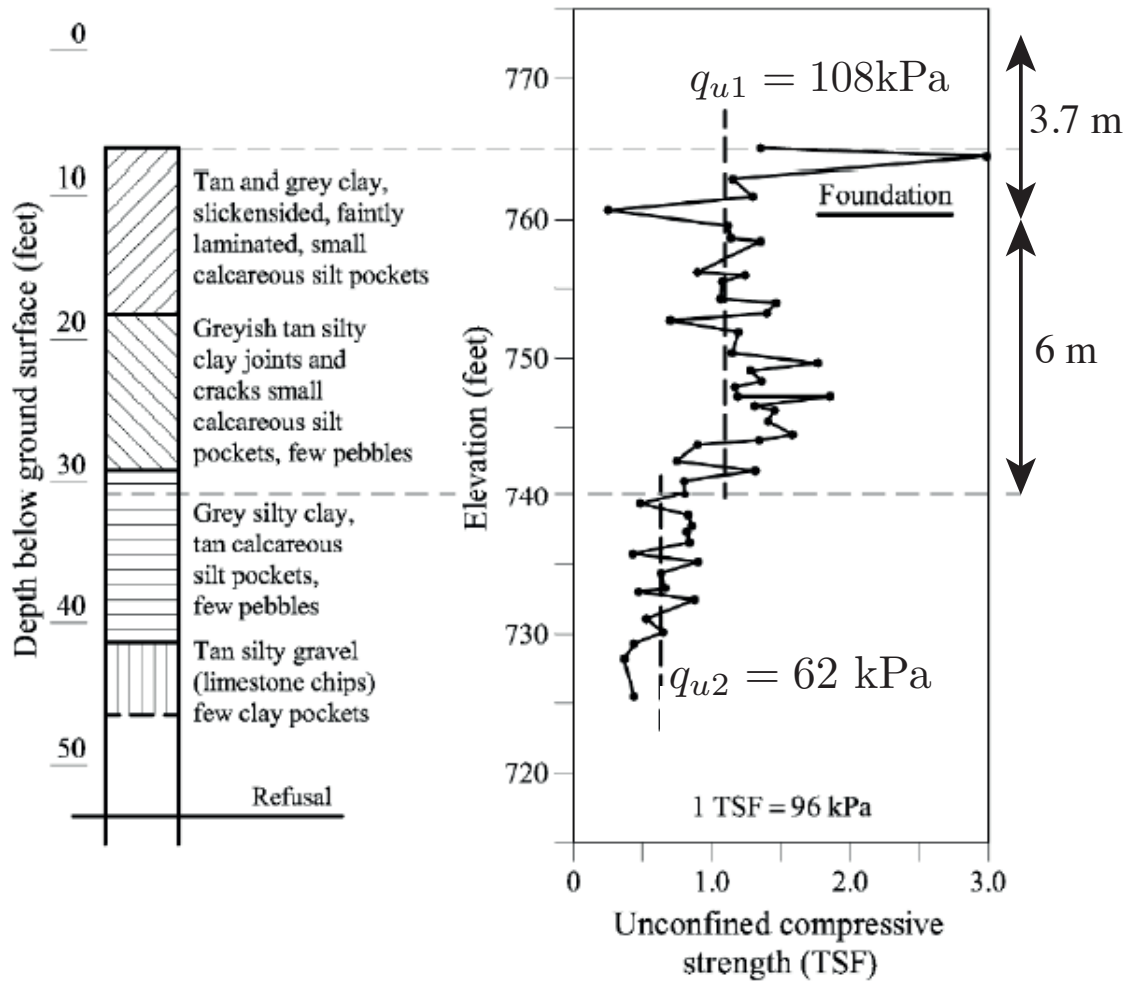


Figure 2: Profil lithographique du sol & résultats d'essai uni-axial non-drainée (en fonction de la profondeur). Le poids de l'argile dans les 2 couches est de  $\gamma = 18.7 \text{ kN/m}^3$ . On déduira  $c_u$  à partir de la résistance à la compression uniaxial non-drainée  $q_u$ . Données d'après Peck & Bryant, 1955.

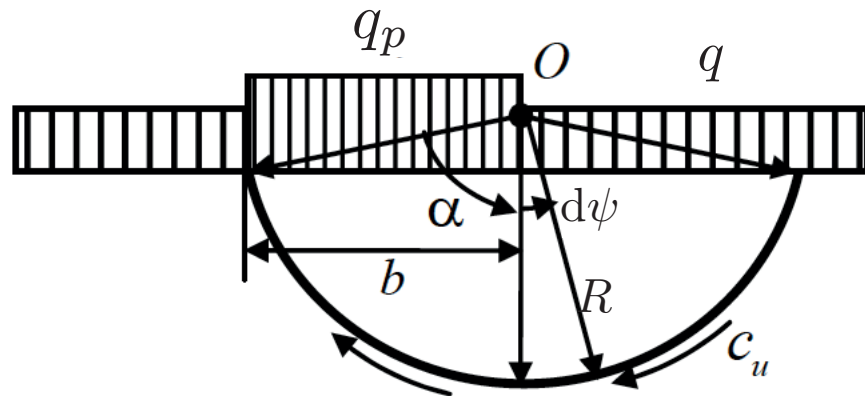


Figure 3: Mécanisme de ruine circulaire (avec un centre potentiellement au dessus du niveau de la fondation superficielle).

### 0.3 Calcul à court terme - chargement différent

On effectue maintenant un calcul hypothétique, en prenant en compte a) qu'une action horizontale de  $2.5MN$  s'applique perpendiculairement à la plus grande dimension de l'ouvrage à mi-hauteur (charge extrême due au vent), et b) que les silos n'étaient pas rempli de manière uniforme: les trois rangées de silo d'un côté de l'ouvrage étaient plus rempli et comptaient au final pour 75% de la charge du aux grains (au lieu de 60% dans le cas d'un chargement uniforme).

Re-estimer la capacité portante pour ce cas en prenant la charge horizontale du même côté que les silos les plus rempli. Faites le calcul en prenant la cohésion non-drainée de la couche supérieure pour comparer.

## Correction Exercice #4 La rupture du “Transcona grain elevator”

On notera que les applications numériques ont été faites via mathematica - on reporte les résultats intermédiaires en troncant à 2 ou 3 décimales, mais le résultat final reporté a été obtenu sans troncature des résultats intermédiaires - vous pouvez donc avoir des petites différences avec vos calculs.

### 0.1 Analyse limite

Le mécanisme de ruine postulé est circulaire: i.e. une surface de glissement circulaire. Le cercle de rupture à un rayon  $R$ . En se référant à la figure 3 de l'énoncé, le champ de vitesse du bloc rigide en coordonnée polaire est du type  $\dot{u}_i = (\dot{u}_r = 0, \dot{u}_\theta(r) = r d\psi/dt)$  où  $d\psi$  représente un increment infinitésimal de rotation du mécanisme de ruine.

On peut écrire la puissance dissipée le long de l'arc de rupture pour un increment de vitesse de rotation  $d\psi/dt = \dot{\psi}$

$$\mathcal{P}_{diss}(\dot{\psi}) = \int_0^{2\alpha} \tau \times \dot{u}_\theta(r = R) R d\theta$$

et évidemment  $\tau = c_u$  à la rupture (champ de contraintes satisfaisant le critère), on a donc

$$\mathcal{P}_{diss}(\dot{\psi}) = 2\alpha c_u R^2 \dot{\psi}.$$

La puissance des efforts extérieurs est au vu du chargement et du mécanisme:

$$\mathcal{P}_{ext}(\dot{\psi}) = \int_0^b (q_p - q) \dot{u}_\theta(r) dr = (q_p - q) \frac{b^2}{2} \dot{\psi}$$

En utilisant le PPV, on obtient donc:

$$q_p - q = 4\alpha \left(\frac{R}{b}\right)^2 c_u = \underbrace{4\alpha (\sin \alpha)^{-2}}_{N_c(\alpha)} c_u$$

qu'il convient de minimiser par rapport à l'angle  $\alpha$  définissant la longueur de la surface de glissement ( $2R\alpha$ ). En notant  $x = \sin \alpha$ , cela revient à minimiser  $\arcsin x/x^2$ , i.e. trouver la racine de l'équation suivante (racine de la dérivée)

$$\frac{1}{x^2 \sqrt{1-x^2}} - \frac{2 \arcsin x}{x^3}$$

Numériquement on obtient  $x \approx 0.919$ , soit  $\alpha \approx 67.78^\circ = 1.16556$  radians. Graphiquement, on peut aussi déterminer le minimum de  $N_c(\alpha)$  - c.f. Fig. 4.

On obtient donc finalement la forme suivante de la borne supérieure:

$$q_p = 4 \times 1.380 c_u + q = 5.5202 c_u + q$$

que l'on peut comparer avec la solution exacte de Prandtl  $q_p = (2 + \pi)c_u + q$ . On voit que 5.5202 est assez proche  $2 + \pi = 5.14159...$  en fait une erreur relative de seulement 7.3%, en étant bien sûr plus élevé car c'est une borne supérieure de la solution exacte de Prandtl.

### Application au cas de Transcona

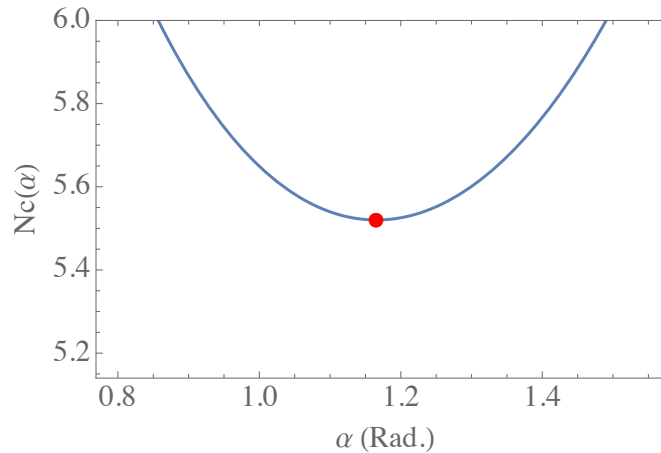
Généralisant le cas 2D à une fondation finite et prenant en compte l'effet de la profondeur, la capacité portante à court terme dans ce cas (sol et fondation horizontale, chargement centrée purement vertical):

$$q_p = c_u N_c s_c d_c + q$$

avec  $N_c = 5.52$  (obtenue précédemment),  $s_c = 1 + 0.2b/L$  et  $d_c = 1 + 0.4t/b$  ( $t$  profondeur de l'assise).

La fondation étant à 3.7 mètres de la surface, en prenant la cohésion non-drainée de la couche proche de la surface  $c_u = q_u/2$  (Tresca), on obtient en utilisant le facteur de forme  $s_c = 1 + 0.2b/L \approx 1.079$  et le facteur de correction du à la profondeur de la fondation  $d_c = 1 + 0.4 \times 3.7/23.5 \approx 1.063$ .

$$q_p = 5.5202 \times (108/2) \times 1.079 \times 1.063 + 18.7 \times 3.7 \approx 411 \text{ kPa}$$

Figure 4: Mécanisme de ruine circulaire -  $N_c(\alpha) = 4\alpha / \sin^2 \alpha$ .

qu'il convient de comparer au chargement. La résultante du au poids de la structure peut être estimer comme suit (en prenant  $\gamma_b = 25\text{kN/m}^3$ ):

$$E_s = \gamma_b \times \left[ \underbrace{bL \times 1.5}_{\text{radier}} + \underbrace{5 \times 13 \times 28 \times \pi((4.4 + 0.05)^2 - 4.4^2)/4}_{\text{silos}} + \underbrace{bL \times 0.2}_{\text{toit}} \right] \approx 75.23\text{MN}$$

et la résultante du au grain dans les silos:

$$E_g = 13.81 \times (5 \times 13 \times 28 \times \pi \times 4.4^2/4) \times 0.875 \approx 334.44\text{MN}$$

$$E_t = E_g + E_s = 409\text{MN}$$

soit une pression sur la fondation de

$$p = \frac{E_g + E_s}{b \times L} \approx 293\text{kPa}$$

On voit donc que avec un tel calcul, la stabilité de la structure est assurée:

$$F_s = 411/293 = 1.403$$

A l'époque (et après) le fait que la structure ait rompu malgré un tel coefficient de sécurité est resté mystérieux jusqu'au mesures mécaniques effectuées dans les années 1940 qui ont mis en évidence une couche avec une cohésion 2 fois plus faible 6 mètres en dessous le niveau de fondation.

**Prise en compte de l'hétérogénéité du sol** Tout d'abord on peut estimer la capacité portante en prenant la cohésion non-drainée de la couche de sol inférieure qui est la plus faible. On obtient

$$q_p = 5.5202 \times (62/2) \times 1.079 \times 1.063 + 18.7 \times 3.7 \approx 265\text{kPa}.$$

On s'aperçoit cette fois-ci évidemment que la structure n'est pas stable  $F_s \approx 0.9$ . En revanche designer avec une telle valeur aurait eu comme conséquence une solution bien plus chère (trop conservatif): augmentation de la taille du radier ou une solution avec un certains nombre de pieux.

**Moyenne géométrique des cohesions non-drainées** Dans la pratique, il est courant de moyenner la cohésion drainée des couches jusqu'à une profondeur égale à  $b/2$  (profondeur du mécanisme de ruine), ce qui donnerait ici

$$\bar{c}_u = (108/2) * \frac{6}{11.75} + (62/2) * (1 - \frac{6}{11.75}) \approx 42.74\text{kPa}$$

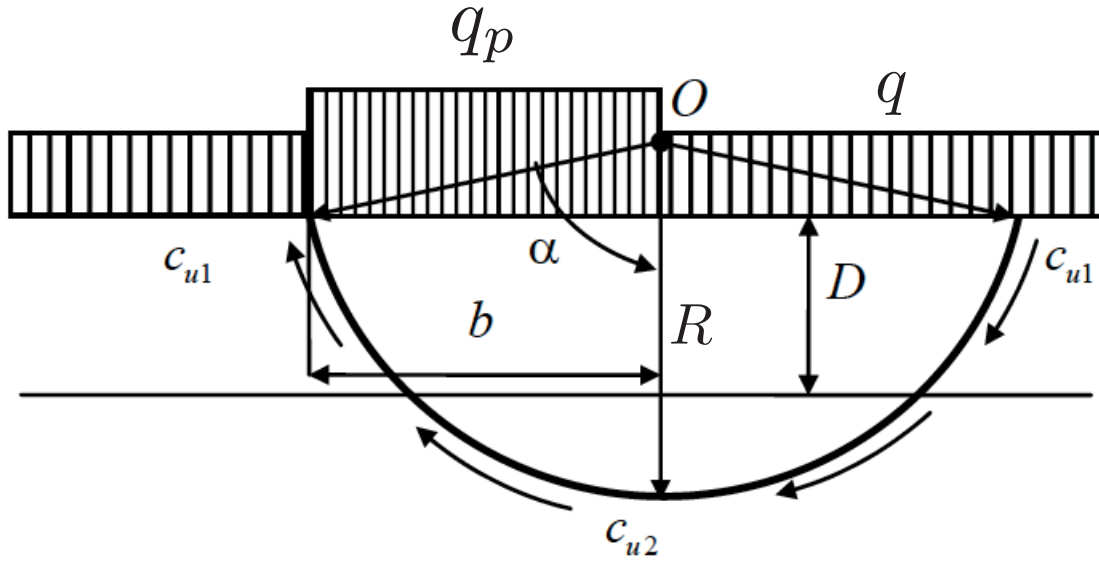


Figure 5: Mécanisme de ruine circulaire prenant en compte l'existence d'une couche de cohésion non-drainée plus faible à une profondeur  $D$  du niveau de la fondation (d'après Puzrin et al. 2010).

ce qui donne une capacité portante de

$$q_p = 5.5202 \times (42.7) \times 1.079 \times 1.063 + 18.7 \times 3.7 \approx 339.8 \text{ kPa}$$

qui donne un facteur de sécurité de  $F_s = 339.8/293 > 1$ . En revanche, la structure a rompu pour une pression sous la fondation de  $p = 293 \text{ kPa}$ . **On voit donc qu'un tel moyennage n'est pas du côté de la sécurité (on surestime la capacité portante) !** Il convient de faire une approche plus rigoureuse prenant en compte l'effet géométrique lié à l'hétérogénéité du sol.

**Mécanisme de ruine en prenant en compte les deux couches** On peut généraliser l'approche cinématique effectué précédemment au cas bi-couche. La puissance des efforts extérieurs reste inchangé. En revanche la puissance dissipée devient:

$$\mathcal{P}_{diss}(\dot{\psi}) = [2\alpha c_{u,1} + 2\beta(c_{u,2} - c_{u,1})] \times R^2 \dot{\psi}.$$

où  $\beta$  correspond à l'angle de transition entre les 2 couches, soit

$$\beta = \arccos\left(\frac{D + \sqrt{R^2 - b^2}}{R}\right)$$

ce qui permet d'écrire la borne supérieure (fonction de  $\alpha$ ) :

$$q_p = q + N_c c_{u,1}$$

$$N_c = 4 \left(\frac{R}{b}\right)^2 \left(\alpha + \arccos\left(\frac{D + \sqrt{R^2 - b^2}}{R}\right) \times (c_{u,2}/c_{u,1} - 1)\right)$$

On a toujours  $\sin \alpha = b/R$ . En notant  $m = D/b \dots$

$$N_c = 4 \times (\sin \alpha)^{-2} \left(\alpha + \arccos\left(m \sin \alpha + \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}\right) \times (c_{u,2}/c_{u,1} - 1)\right)$$

Il est un peu plus compliqué de minimiser cette borne supérieure (pour une valeur de  $m$  et  $c_{u,2}/c_{u,1}$ ) - mais numériquement/graphiquement e.g. par dichotomie cela reste simple (minimisation d'une fonction scalaire). Ici

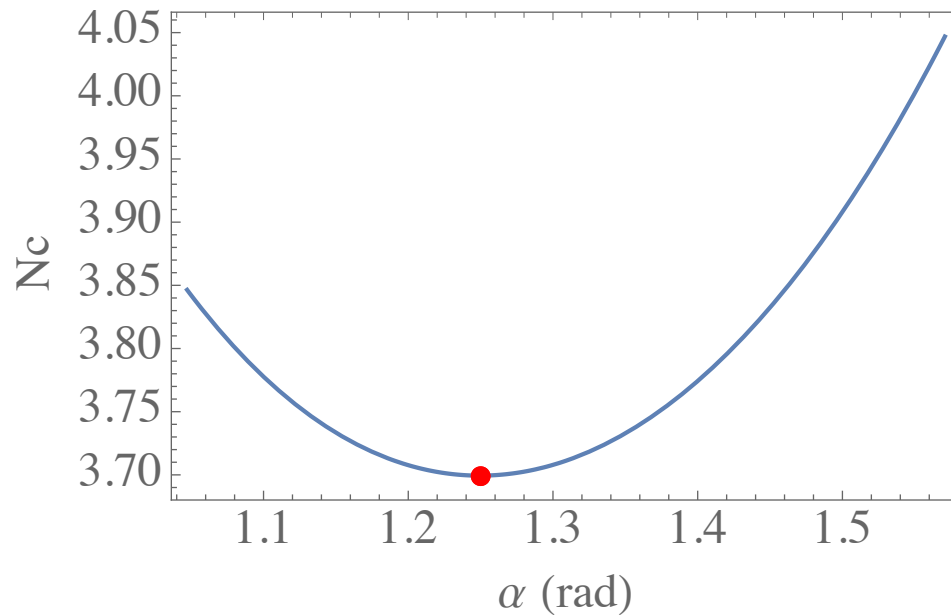


Figure 6: Borne supérieure- mécanisme à 2 couches  $c_{u,2}/c_{u,1} = 0.57$ ,  $D/b = 0.255$  - Dans le cas de Transcona, le minimum est  $N_c = 3.71$  et l'angle correspondant  $\alpha \approx 1.25$  rad =  $71.6^\circ$ .

dans le cas de Transcona, on a  $m = D/b = 6/23.5$  et  $c_{u,2}/c_{u,1} = 62/108$ . On obtient comme minimum  $N_c \approx 3.71$  (voir Fig.6).

On a donc l'estimation suivante en prenant en compte le facteur de forme ( $s_c = 1 + 0.2b/L$ ) et de profondeur ( $d_c = 1 + 0.4t/b$ )

$$q_p = N_c s_c d_c c_{u,1} + q \approx 3.7 \times 54 \times 1.079 \times 1.063 + 3.7 \times 18.7 = 294.5 \text{ kPa}$$

qui est légèrement supérieur à la charge de ruine (293 kPa). Un résultat très précis, et cohérent avec le fait que la borne calculée pour ce cas bi-couches par l'extérieur est théoriquement une borne supérieure.

## 0.2 Calcul à court terme approche classique

C'est évidemment trivial. La capacité portante est donnée par la même formule mais avec  $N_c = 2 + \pi$ .

On obtient des résultats assez similaires que précédemment (normal il n'y a que 7% de différence entre la solution de Prandtl et notre borne supérieure):

- en prenant  $c_u = 108/2$

$$q_p \approx 387 \text{ kPa}$$

- en prenant  $c_u = 62/2$

$$q_p \approx 252 \text{ kPa}$$

- en prenant la moyenne géométrique:

$$q_p \approx 321 \text{ kPa}$$

On remarque encore qu'utiliser une moyenne géométrique résulte en une capacité portante plus grande que la charge de 293 kPa observé lors de la ruine.

### 0.3 Chargement différent

On a ici une action horizontale supplémentaire et un excentrement de la charge normale du au remplissage non-uniforme des silos. Calculons d'abord l'excentrement. Pour ce faire on calcule les moments par rapport au centre de la fondation du au remplissage non-uniforme des silos (3 + 2) et de la charge horizontale s'appliquant à mi-hauteur :

$$M = 2.5 * (28/2 + 1.5) + 0.75 \times E_g \times (b/2 - 3b/5/2) - (1 - 0.75) \times E_g \times (b/2 - 2b/5/2) \approx 628.2 MNm$$

on a l'excentrement:

$$e = M/E_t = 1.54m$$

soit une largeur utile  $b' = b - 2e = 20.42m$  et toujours  $L' = L$ .

L'action horizontale implique une inclinaison de la résultante. La capacité portante à court terme dans ce cas est donnée par:

$$q_p = c_u N_c i_c s_c d_c + q$$

avec  $N_c = 2 + \pi$ ,  $s_c = 1 + 0.2b'/L' \approx 1.068$  et  $d_c = 1 + 0.4t/b' \approx 1.072$

$$i_c = \frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{H}{b' \times L' \times c_u}} \right)$$

En faisant le calcul pour la couche supérieure  $c_u = 108/2kPa$ , on a

$$i_c = 0.5 \times (1 + \sqrt{1 - 2.5 \times 10^3 / (20.42 * 59.5 * 54)}) = 0.99$$

on obtient:

$$q_p \approx 384kPa$$

et prenant en compte évidemment la réduction de la surface utile, le facteur de sécurité est

$$F_s = \frac{q_p \times b' \times L'}{E_t} = 1.14$$

On remarque une forte réduction comparé au cas centré et sans action horizontale supplémentaire en utilisant  $N_c = 2 + \pi$  ( $F_s = 1.403$ ).

## Résumé

1. On voit par cet exemple l'importance d'une investigation géotechnique détaillée du site. Effectivement lors du dimensionnement, aucun test géotechnique n'avait été réalisé sur les couches de sols profondes. Les ingénieurs pensaient que le sol était uniforme mécaniquement (juste à la vue des échantillons). Evidemment une couche 2 fois plus faible change complètement la donne au niveau du dimensionnement.
2. La formule  $q_p = c_u N_c + q$  en prenant la moyenne géométrique des cohésions non-drainées n'est pas du côté de la sécurité. En revanche, prendre  $c_u$  la plus petite résulte dans un design très conservatif.
3. On voit l'intérêt d'une approche d'analyse limite prenant en compte l'hétérogénéité du sol - qui peut être faites ici assez simplement pour un mécanisme de ruine circulaire en approche cinématique. Les résultats obtenus sont bons. Dans la pratique (pour des configurations plus complexe), on peut utiliser des logiciels de calculs faisant de l'analyse limite numérique (il en existe assez peu - Optum G2 est un de ces logiciels).