

Coefficients de poussée et de butée d'un sol sur une paroi

1 Description du problème

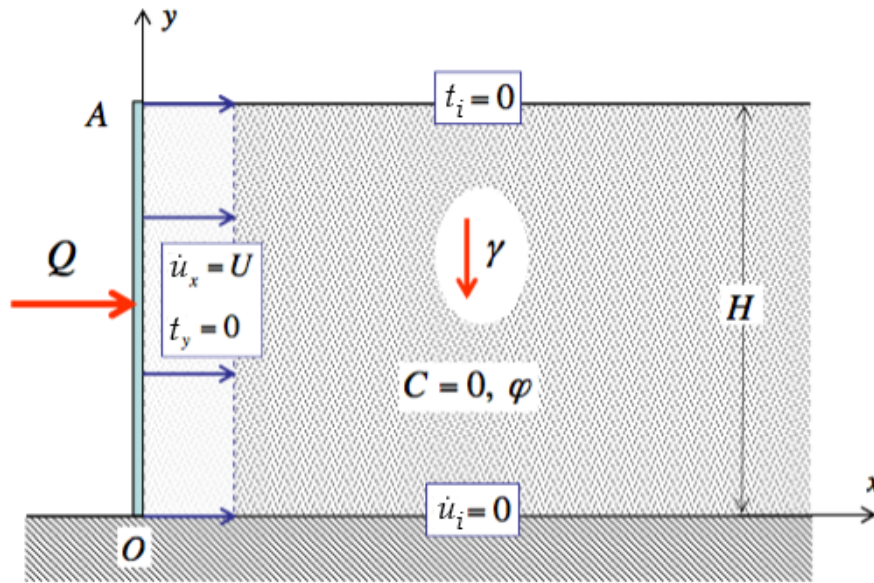


Figure 1: Description du problème.

Un massif de sol de hauteur H reposant sur un substratum horizontal est en contact avec un écran de soutènement vertical OA astreint à un mouvement de translation de vitesse horizontale égale à U . Le sol est supposé être purement frottant (sable sec), sa résistance étant modélisée par un critère de Coulomb de cohésion nulle ($C = 0$) et d'angle de frottement interne égal à ϕ . On désigne par γ le poids volumique du sol. Le problème étant traité en déformations planes dans le plan Oxy , les conditions aux limites sont les suivantes :

plan inférieur du massif en contact parfaitement adhérent avec le substratum :

$$\dot{u}_i(x > 0, y = 0) = 0 \quad (1)$$

plan supérieur du massif libre d'efforts :

$$t_i(x > 0, y = H) = 0 \quad (2)$$

sol en contact lisse avec l'écran de soutènement :

$$\dot{u}_x(x = 0, 0 \leq y \leq H) = U, \quad t_y(x = 0, 0 \leq y \leq H) = 0 \quad (3)$$

Paramètres de chargement du système

Etant donné un champ de vitesse virtuel \dot{u}_i cinématiquement admissible quelconque, c'est-à-dire vérifiant les données aux limites en vitesse ci-dessus, la puissance des efforts extérieurs dans un tel champ s'écrit

de façon générale :

$$P_e(\dot{u}) = \int_{\Omega} \gamma \dot{u}_i d\Omega + \int_{\partial\Omega} t_i \dot{u}_i da \quad (4)$$

soit dans le cas présent, en raisonnant par unité de longueur dans la direction transversale Oz :

$$P_e(\dot{u}) = \gamma \left(\int_{\Omega} -\dot{u}_y d\Omega \right) + \underbrace{\left(\int_{OA} \sigma_{xx} dy \right)}_Q \dot{u}_x \quad (5)$$

où Q représente la projection horizontale de la résultante des efforts exercés par la paroi de soutènement sur le massif de sol. ($Q = \int_{OA} \sigma_{xx} dy$) L'équation 5 met donc en évidence un mode de chargement à deux paramètres (Q, γ). On se propose de déterminer par la théorie du calcul à la rupture le domaine K des chargements potentiellement supportables.

1. Approche statique par l'intérieur

Pour un champ de contraintes uniforme à droite de l'écran, déterminez une borne de la force horizontale de rupture de l'écran. Considérez les 2 cas $\sigma_{xx} < \sigma_{yy}$ et $\sigma_{yy} < \sigma_{xx}$ indépendamment pour obtenir une estimation du domaine des chargements possibles.

2. Approche cinématique par l'extérieur

En postulant un mécanisme de type "coin de Coulomb" (surface de glissement droite à partir du bas de l'écran accommodant toute la déformation plastique), trouver la force horizontale de rupture de l'écran (dépendant du mouvement de l'écran, donc 2 cas à considérer) et l'angle de la surface de rupture associée.

Correction

Coefficients de poussée et de butée d'un sol sur une paroi

1 Approche statique par l'intérieur

Dans ce système de coordonnées (avec y vers le haut), les équations d'équilibres se réduisent à:

$$\partial_x \sigma_{xx} + \partial_y \sigma_{xy} = 0 \quad (6)$$

$$\partial_x \sigma_{xy} + \partial_y \sigma_{yy} = -\gamma \quad (7)$$

On considère la famille de champs de contrainte définie par Figure 2.

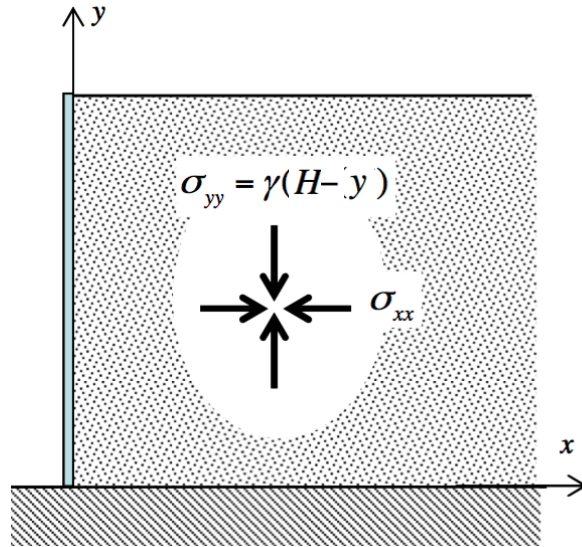


Figure 2: Schéma d'un champ de contrainte simple statiquement admissible pour ce cas.

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx}(y), \quad \sigma_{yy} = \gamma(H - y), \quad \sigma_{xy} = 0 \quad (8)$$

Ces champs de contrainte étant bien évidemment en équilibre avec le poids volumique γ du sol et respectant également les conditions aux limites en tractions. Ils sont par ailleurs en équilibre avec une valeur de l'effort qu'exerce l'écran de soutènement sur le sol égale à :

$$Q = \int_0^H \sigma_{xx}(y) dy \quad (9)$$

Le sol étant sans cohésion, son critère de résistance (Mohr-Coulomb) s'écrit:

$$\sigma_1 - \sigma_3 - (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \phi \leq 0 \quad (10)$$

où $\sigma_1 \geq \sigma_3$ sont les contraintes principales extrêmes. Deux cas sont à considérer:

Cas a) - Etat passif / butée

$\sigma_1 = \sigma_{xx}(y) \geq \sigma_{yy} = \gamma(H - y) = \sigma_3$. La condition de résistance s'écrit alors:

$$\sigma_{xx}(y) \leq K_p \gamma(H - y) \quad (11)$$

où K_p représente le coefficient de butée, défini par:

$$K_p = \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) \quad (12)$$

le cercle de Mohr relatif à l'état de contrainte dans le cas où l'inégalité 11 est une égalité, est représenté sur la Figure 3 . Il est tangent à la courbe intrinsèque.

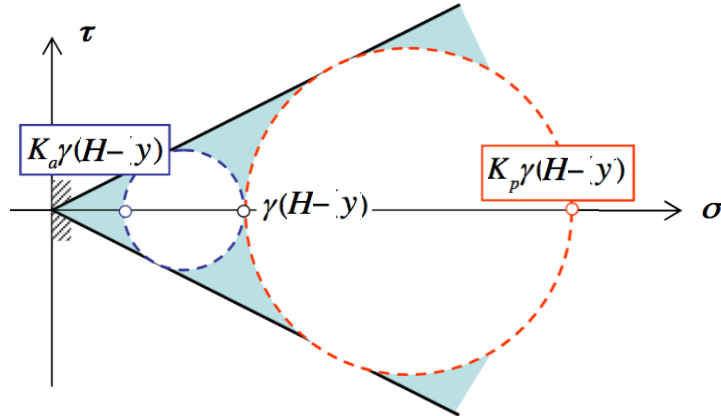


Figure 3: Cercle de Mohr

Cas b) - Etat actif / poussée

$\sigma_3 = \sigma_{xx}(y) \leq \sigma_{yy} = \gamma(H-y) = \sigma_1$. La condition de résistance devient:

$$\sigma_{xx}(y) \geq K_a \gamma(H-y) \quad (13)$$

où K_a représente le *coefficient de poussée*, défini par:

$$K_a = \frac{1 - \sin \phi}{1 + \sin \phi} = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right) \quad (14)$$

le cercle de Mohr associé à cet «état limite de butée» étant représenté sur la même Figure 3.

Il en résulte que la famille de champs de contrainte considérée respecte le critère de résistance du sol en tout point si et seulement si la double inégalité suivante est satisfaite :

$$0 \leq y \leq H : K_a \gamma(H-y) \leq \sigma_{xx}(y) \leq K_p \gamma(H-y) \quad (15)$$

et la valeur correspondante de l'effort Q varie dans l'intervalle :

$$\gamma K_a \int_0^H (H-y) dy = \frac{1}{2} K_a \gamma H^2 \leq Q \leq \gamma K_p \int_0^H (H-y) dy = \frac{1}{2} K_p \gamma H^2 \quad (16)$$

Nous obtenons ainsi une approche par l'intérieur du domaine des charges admissibles K (selon le déplacement de l'écran):

$$\frac{1}{2} K_a \gamma H^2 \leq Q \leq \frac{1}{2} K_p \gamma H^2 \Rightarrow (Q, \gamma) \in K \quad (17)$$

2 Approche cinématique par l'extérieur

Cette approche est mise en œuvre en considérant les deux mécanismes par bloc en translation (selon le sens de déplacement de l'écran) représentés sur la Figure 4.

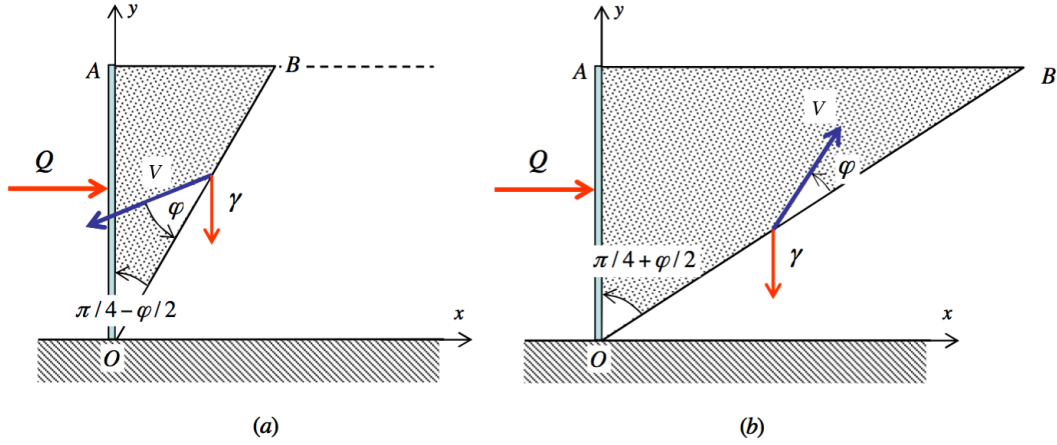


Figure 4: Deux mécanismes de translation: a) lorsque l'écran s'éloigne du sol (cas actif / poussée), b) lorsque l'écran se déplace vers le sol (cas passif / butée).

Cas actif (Fig. 4a))

Le mécanisme (a) correspond à un bloc triangulaire OAB , d'angle en O égal à θ (on montre à la suite $\theta = \pi/4 - \phi/2$), animé d'un mouvement de translation de vitesse uniforme \dot{u}_i orientée vers le bas et formant un angle ϕ avec le segment AB . Le reste du massif reste rigide. La norme de la vitesse de ce bloc rigide est noté ici $\|\dot{u}_i\| = V$ (c.f. Figure 4). La discontinuité de vitesse le long de AB entre le bloc et le reste du massif étant pertinente, et la cohésion étant nulle, la puissance résistante maximale correspondante est également nulle :

$$P_{dissp}(\dot{u}_i) = 0 \quad (18)$$

Par ailleurs la puissance virtuelle des efforts extérieurs s'écrit :

$$P(\dot{u}_i) = \frac{1}{2}\gamma H^2 \tan \theta \cos(\phi + \theta) V - Q V \sin(\phi + \theta) \quad (19)$$

de sorte que la condition nécessaire de stabilité s'écrit en simplifiant par $V > 0$:

$$(Q, \gamma) \in K \Rightarrow P(\dot{u}_i) \leq P_{dissp}(\dot{u}_i) = 0 \Leftrightarrow Q \geq \frac{1}{2}\gamma H^2 \frac{\tan \theta}{\tan(\theta + \phi)} = Q_a \quad (20)$$

On a donc

$$Q \geq \text{Max}(Q_a) \quad (21)$$

En utilisant Mathematica (ou tout autre logiciel de calcul formel):

$$\frac{dQ_a}{d\theta} = 0 \Leftrightarrow \cos(2\theta + \phi) \csc(\theta + \phi) \sec \theta \sin \phi = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \quad (22)$$

On note qu'effectivement $\cos(2\theta + \phi) = 0$ implique $\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}$.

$$Q \geq Q_{a,max} = \frac{1}{2}\gamma H^2 \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right) = \frac{1}{2}K_a \gamma H^2 \quad (23)$$

Cas passif (Fig. 4b))

Considérons maintenant le mécanisme (b) où un bloc triangulaire OAB , d'angle en O égal à α , (on montre par la suite $\alpha = \pi/4 + \phi/2$), animé d'un mouvement de translation de vitesse \hat{u}_i , $\|\hat{u}_i\| = U$ orientée vers

le haut et inclinée d'un angle ϕ avec le segment AB , de sorte que la puissance résistante maximale correspondante est nulle. La puissance virtuelle des efforts extérieurs dans ce second mécanisme vaut :

$$P(\dot{u}_i) = -\frac{1}{2}\gamma H^2 \tan \alpha \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha + \phi\right)V + QV \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha + \phi\right) \quad (24)$$

et la condition nécessaire de stabilité déduite de l'approche cinématique par l'extérieur devient :

$$(Q, \gamma) \in K \Rightarrow P(\dot{u}_i) \leq P_{dissp}(\dot{u}_i) = 0 \Leftrightarrow Q \leq \frac{1}{2}\gamma H^2 \tan \alpha \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha + \phi\right) = Q_p \quad (25)$$

Similairement, on obtient,

$$Q \leq \text{Min}(Q_p) \quad (26)$$

En utilisant e.g. Mathematica ou tout autre logiciel de calcul formel,

$$\frac{dQ_p}{d\theta} = 0 \Leftrightarrow \cos(2\alpha - \phi) \csc(\alpha - \phi) \sec \alpha \sin \phi = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \quad (27)$$

On note qu'effectivement $\cos(2\alpha - \phi) = 0$ implique $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}$.

$$Q \leq Q_{p,min} = \frac{1}{2}\gamma H^2 \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) = \frac{1}{2}K_p \gamma H^2 \quad (28)$$

Combinant 20 et 25, il vient alors :

$$(Q, \gamma) \in K \Rightarrow \frac{1}{2}K_a \gamma H^2 \leq Q \leq \frac{1}{2}K_p \gamma H^2 \quad (29)$$

et donc en associant ce résultat à celui donné par l'approche par l'intérieur 17.

$$(Q, \gamma) \in K \Leftrightarrow \frac{1}{2}K_a \gamma H^2 \leq Q \leq \frac{1}{2}K_p \gamma H^2 \quad (30)$$

aboutissant donc dans ce cas à la détermination **exacte** du domaine de stabilité K du sol représenté sur la Figure 5. Les résultats obtenus par une approche statique ou cinématique étant strictement égaux. On notera que l'on a supposé (implicitement) i) que l'interface sol / écran n'est pas frictionnel, ii) la hauteur de l'écran est strictement égale à la hauteur de l'excavation, iii) la position de la nappe phréatique était soit en dessous de l'excavation ou affleurante en surface.

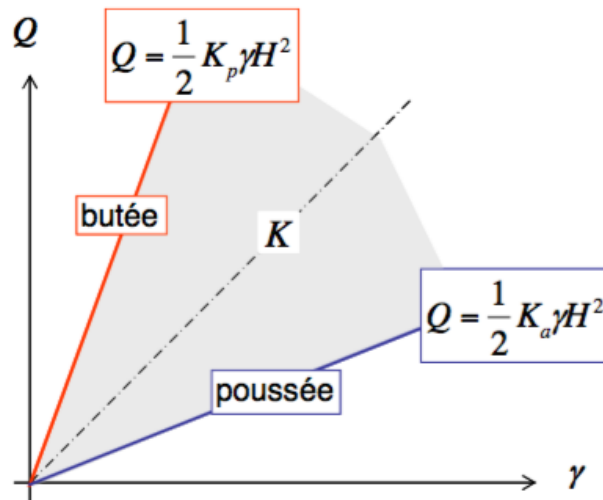


Figure 5: Domaine de stabilité