

Exercice #2

Essais de laboratoire / analyse limite 1

1 Essai de cisaillement pur

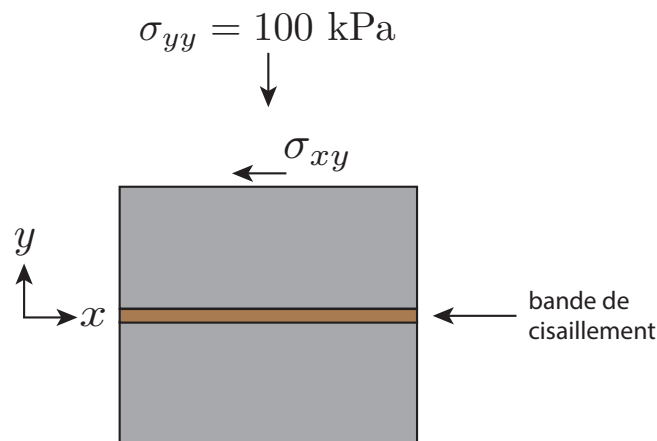


Figure 1: Schéma de l'essai de cisaillement pur

L'essai de cisaillement direct est très couramment utilisé sur les sols afin de mesurer les propriétés de résistance (friction, cohésion). On considère un tel essai sur un échantillon de limon sec ayant un angle de friction interne de 20° et de cohésion nulle. On considérera que ce matériau peut-être modélisé par un critère de Mohr-Coulomb plastique parfait. De-plus dans cet essai, la déformation cisailante se localise dans une bande de cisaillement initialement de 1mm d'épaisseur au centre de l'échantillon. Une contrainte normale de 100kPa est appliquée sur l'échantillon et la contrainte de cisaillement est augmentée jusqu'à la rupture. La valeur du coefficient de Poisson de ce sol est de 0.4. On fera l'hypothèse d'une déformation plane perpendiculairement au plan de la figure ci-dessus (direction z).

1. Montrer que la valeur de la contrainte cisailante à la rupture est de 36.4kPa
2. Montrer que en déformation plane, on a toujours $\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$
3. Montrer que les contraintes principales à la rupture sont $\sigma_I = 152\text{kPa}$, $\sigma_{II} = 90.6\text{kPa}$, $\sigma_{III} = 74.5\text{kPa}$
4. Déterminer la direction des contraintes principales
5. En faisant l'hypothèse d'un écoulement plastique associé, déterminer le rapport des taux de déformations plastiques selon les directions principales minimale et maximale.
6. Déterminer la direction du mouvement relative de la moitié supérieure de l'échantillon par rapport à la moitié inférieure

2 Essai triaxial consolidé non-drainé avec mesure de pression de pore (CU+u)

Soit une argile sableuse, saturée et surconsolidée. La contrainte de préconsolidation à la profondeur du prélèvement est égale à $\sigma_p = 150\text{kPa}$. On effectue trois essais triaxiaux en conditions consolidé non drainées avec mesure de pression de interstitielle (CU+u) à trois niveau de consolidation σ_o différent. Le tableau ci-dessous donne les résultats des essais

	A	B	C
σ_o (kPa)	200	370	540
$u_{rupture}$ (kPa)	70	200	360
$\sigma_{1,rupture}$ (kPa)	480	750	1042

1. Discuter la différence entre les tests consolidé non-drainé (CU) et non-consolidé non-drainé (UU)
2. Tracer les cercles de Mohr en contraintes totale et effective
3. Déterminer l'angle de frottement ϕ' . Peut t'on utiliser une telle estimation ?
4. Déterminer les valeurs de cohésion non-drainée c_u pour les différents niveaux de consolidation σ_o et obtenez λ_u et c_u^o , tel que

$$c_u = c_u^o + \lambda_u \sigma_o$$

3 Talus Vertical

Déterminer les bornes inférieures et supérieures de la hauteur de ruine d'un talus vertical excavé dans un sol de Mohr-Coulomb (c, ϕ) - i.e. travailler l'exemple du cours (la correction de cet exercice sera donnée en cours).

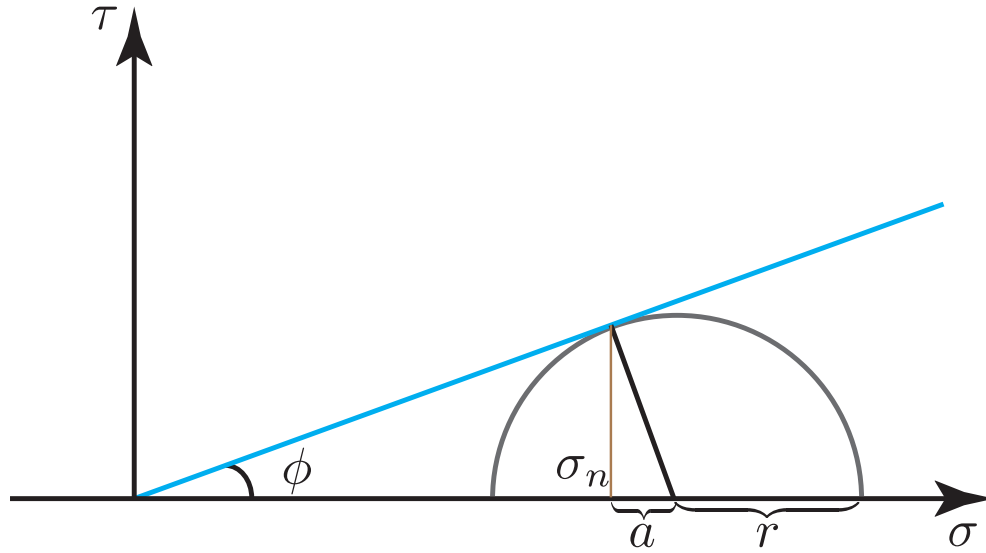


Figure 2: Cercle de Mohr pour le problème donné

Solution #2 Essais de laboratoire / analyse limite 1

1 Essai de cisaillement pur

Les propriétés du sol sont

$$\phi = 20^\circ, \quad c = 0, \quad \nu = 0.4$$

1.1 Contrainte de rupture

Comme on peut voir sur le dessin du cercle de Mohr (2), la contrainte cisailant à la rupture vaut

$$\tau_r = \sigma_n \tan(\phi) = 36.4 \text{ [kPa]}$$

on a ici $\sigma_{yy} = \sigma_n$, car on connaît la direction de la facette de rupture (la bande de cisaillement).

1.2 Déformation plane

En déformation plane les déformations (totales, plastiques et élastiques) sont concentrées dans le plan. Dans la configuration de l'exemple donnée, on a donc $\varepsilon_{zz} = 0$. En reprenant la relation de comportement élastique reliant déformations et contraintes

$$\varepsilon_{ij}^e - \varepsilon_{ij}^p = \frac{1}{E} [(1 + \nu) \sigma_{ij} - \nu \sigma_{kk} \delta_{ij}]$$

De plus en déformation plane, toutes les composantes des déformations sont concentrées dans le plan: $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{zz}^e = \varepsilon_{zz}^p = 0$, on obtient donc

$$0 = \frac{1}{E} [(1 + \nu) \sigma_{zz} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})]$$

ce qui donne, résolu pour σ_{zz}

$$\sigma_{zz} = \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$

On notera que $(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})/2$ correspond à la contrainte moyenne dans le plan 2D, et donc également calculable à partir des contraintes principales correspondantes.

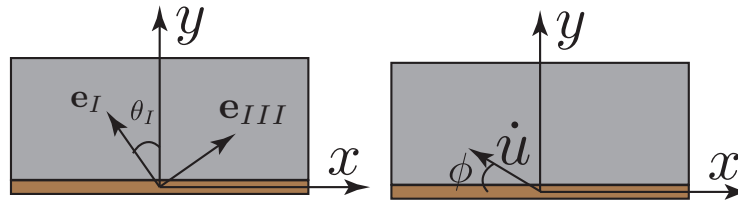


Figure 3: Orientation des contraintes principales et schématisation du déplacement du bloc supérieure (par rapport au bloc inférieur).

1.3 Contraintes principales

Afin de retrouver, les contraintes principales on se réfère de nouveau à la figure 2. Calculons d'abord la contrainte cisailante maximale

$$\tau_{max} = \sigma_n \frac{\tan(\phi)}{\cos(\phi)} = 38.73 \text{ [kPa]}$$

ce qui équivaut au rayon du cercle de Mohr $(\sigma_I - \sigma_{III})/2$. A partir de ceci c'est possible de trouver le centre du Cercle de Mohr en calculant la fraction du rayon a

$$a = \sigma_n \frac{\tan(\phi)}{\tan(90 - \phi)} = 13.25 \text{ [kPa]}$$

et donc on peut retrouver les contraintes principales minimale et maximale comme

$$\sigma_I = \sigma_n + a + \tau_{max} = 151.98 \text{ [kPa]}, \quad \sigma_{III} = \sigma_n - (\tau_{max} - a) = 74.51 \text{ [kPa]}$$

Afin de retrouver la contrainte principale intermédiaire il faut remarquer aussi le plan des contraintes principales est conditionné par l'hypothèse des déformations planes (voir question 1.2). On peut donc retrouver la contrainte principale intermédiaire comme étant

$$\sigma_{II} = \nu(\sigma_I + \sigma_{III}) = 90.60 \text{ [kPa]}$$

1.4 Direction contraintes principales

On peut trouver les directions des contraintes principales en utilisant le cercle de Mohr. On rappelle que le passage du plan de Mohr à l'espace physique implique une division d'angle par 2.

La direction de la facette normale à la contrainte principale maximale est donnée par la moitié de l'angle entre l'horizontale et le point de la contrainte cisailante de rupture et vaut donc

$$\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}$$

L'angle entre la direction e_y de l'axe de notre système et la direction de la contrainte principale e_I (cf figure ci-dessous) est donc

$$\theta_I = \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} = 35^\circ$$

et comme les contraintes principales sont orthogonales la direction de la contrainte minimale e_{III} est simplement retrouvée en retirant un angle droit. L'angle θ_{III} étant pris également avec la direction y de l'axe de notre système

$$\theta_{III} = \frac{\pi}{2} - \theta_I = 55^\circ$$

1.5 Taux de déformations

On rappelle la condition des déformations planes (c'est-à-dire que aussi $\varepsilon_{zz}^p = 0$) et on calcule le taux de déformations comme dans l'exercice 1 avec

$$\varepsilon_{ij}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$$

avec la fonction f dans le cas d'un matériaux Mohr-Coulomb sans cohésion

$$f = \sigma_I - \sigma_{III} - (\sigma_I + \sigma_{III}) \sin(\phi)$$

ce qui donne dans les directions principales

$$\dot{\varepsilon}_I^p = \lambda (1 - \sin(\phi)), \quad \dot{\varepsilon}_{III}^p = -\lambda (1 + \sin(\phi))$$

et le rapport vaut donc

$$\frac{\dot{\varepsilon}_I^p}{\dot{\varepsilon}_{III}^p} = \frac{1 - \sin(\phi)}{-(1 + \sin(\phi))} = -0.49$$

1.6 Direction du mouvement

On peut accéder la direction de mouvement relatif de la partie supérieure et inférieure de l'échantillon en sachant les taux des déplacements $\dot{\varepsilon}_I^p, \dot{\varepsilon}_{III}^p$ dans le repère des contraintes principales. Nous allons simplement faire un changement de repère (rotation) afin d'exprimer le tenseur des taux de déformations entre le système des contraintes principales et le système xy . On note $\underline{\dot{\varepsilon}}_{xy}^p$ le tenseur 2D dans le repère xy , i.e. en notation 'matricielle' équivalente (cf. votre cours d'éléments finis)

$$\underline{\dot{\varepsilon}}_{xy}^p = \underline{R}^T \cdot \underline{\dot{\varepsilon}}_p^p \cdot \underline{R}, \quad \text{avec } \underline{\dot{\varepsilon}}_p^p = \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_I^p & 0 \\ 0 & \dot{\varepsilon}_{III}^p \end{bmatrix}, \quad \underline{R} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

avec $\alpha = \theta_I$ l'angle entre la direction de la facette normale à la direction de la contrainte principale I et l'axe des x . On applique la formule avec l'angle de rotation $\alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}$ et on obtient les taux de déformation correspondantes

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{xy}^p &= \lambda \cos(\phi) \\ \dot{\varepsilon}_{yy}^p &= -2\lambda \sin(\phi) \end{aligned}$$

On rappelle la définition du tenseur des taux de déformation

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{1}{2} (\dot{u}_{i,j}^p + \dot{u}_{j,i}^p)$$

où l'indice avec la virgule représente la dérivée par rapport à cette direction (cf. notation du cours). Il est important de noter que la bande de cisaillement est indépendante de la coordonnée selon x . C'est le cas car tout point doit être à la rupture le long de la bande de cisaillement au même moment. Pour obtenir la vitesse de déplacement relatif $[\dot{u}_i]$ entre le bloc supérieur et inférieur, on intègre donc cette déformation dans l'épaisseur de la bande de cisaillement (disons entre $y = -w/2$ et $y = +w/2$ où w est l'épaisseur de la bande de cisaillement). Comme les vitesses relatives ne dépendent pas de x (direction de la bande de cisaillement), on a

$$\dot{u}_{x,y}^p = 2\dot{\varepsilon}_{xy}^p \quad \dot{u}_{y,y}^p = \dot{\varepsilon}_{yy}^p$$

et donc

$$\begin{aligned} [\dot{u}_x^p] &= \int_{-w/2}^{w/2} \dot{u}_{x,y}^p \, dy = \dot{u}_x^+ - \dot{u}_x^- = \int_{-w/2}^{w/2} 2\dot{\varepsilon}_{xy}^p \, dy = 2(\lambda \times w) \cos \phi \\ [\dot{u}_y^p] &= \int_{-w/2}^{w/2} \dot{\varepsilon}_{yy}^p \, dy = -2(\lambda \times w) \sin \phi \end{aligned}$$

On rappelle que la bande de cisaillement “localise” toute les déformations plastiques (qui sont nulles en dehors de celle-ci). Au final, on peut obtenir l’orientation du déplacement relatif par rapport à la direction de la bande de cisaillement (axe des x):

$$\arctan \left(\left\| \frac{\dot{u}_y^p}{\dot{u}_x^p} \right\| \right) = \arctan (\tan (\phi)) = \phi$$

Il est donc visible que la bande de cisaillement se “dilate” lors du cisaillement. Le mouvement relatif s’effectue avec un angle de dilatance (qui pour le cas associée est égal à l’angle de friction interne). [On rappelle que dans la convention des contraintes >0 en compression et déformation >0 en contraction, les déplacements sont positif dans le sens opposé du système de coordonnées. Ici, dans la figure ci-dessus, on a représenté le déplacement du bloc supérieur par rapport au bloc inférieur.]

Résolution alternative

En suivant les notes du cours, on aurait pu de même résoudre ce problème en considérant la rupture directement en terme de contraintes normales et tangentielles. Dans ce cas, le critère de rupture s’écrit

$$f(\sigma_n, \tau) = \tau - c - \sigma_n \tan(\phi)$$

avec

$$\begin{aligned} t_i &= \sigma_{ij} n_j \text{ vecteurs contraintes sur } S_\Sigma \\ t_s &= \tau = s_i \sigma_{ij} n_j \text{ contrainte de cisaillement sur } S_\Sigma \\ t_n &= \sigma_n = n_i \sigma_{ij} n_j \text{ contrainte normale sur } S_\Sigma \end{aligned}$$

et en écrivant directement l’écoulement plastique dans le repère normale/tangentielle à la bande de cisaillement

$$[[\dot{u}_i]] = \lambda_b \frac{\partial f}{\partial t_i}$$

ce qui donne que

$$\begin{aligned} [[\dot{u}_n]] &= \lambda_b \frac{\partial f}{\partial \sigma_n} = -\lambda_b \tan(\phi) \\ [[\dot{u}_s]] &= \lambda_b \frac{\partial f}{\partial \tau} = \lambda_b \end{aligned}$$

En comparant avec les résultats précédents, on voit par analogie que $\lambda_b = 2\lambda \times w \cos \phi$.

On retrouve que le vecteur de vitesse discontinuité de déplacement plastique localisée sur la surface de glissement fait toujours un angle ϕ par rapport à celle-ci.

$$\left\| \frac{[[\dot{u}_n]]}{[[\dot{u}_s]]} \right\| = \tan(\phi)$$

2 Essai Triaxial consolidé non-drainé

Soit une argile sableuse, saturée et surconsolidée. La contrainte de préconsolidation à la profondeur du prélèvement est égale à $\sigma'_p = 150$ [kPa]. Et les résultats sont les suivantes

	A	B	C
σ_o (kPa)	200	370	540
$u_{rupture}$ (kPa)	70	200	360
$\sigma_{1,rupture}$ (kPa)	480	750	1042

2.1 Difference entre CU et UU

Dans un test consolidé non-drainée la la phase de chargement isotrope est faite avec les vannes ouvertes tel que l’eau peut s’échappée et que la pression interstitielle reste donc nulle. C’est l’opposée à un test UU dans laquelle déjà dans la phase de chargement isotrope, l’échantillon est déjà en conditions non-drainées et donc la pression de pore augmente lors de la phase de chargement isotrope. La phase de cisaillement (augmentation du déviateur) est identique dans les deux cas et se fait avec les vannes fermées.

	A	B	C
$u_{rupture}$ (kPa)	70	200	360
$\sigma_{1,rupture}$ (kPa)	480	750	1042
$\sigma_{3,rupture}$ (kPa)	200	370	540
$\sigma'_{1,rupture}$ (kPa)	410	550	682
$\sigma'_{3,rupture}$ (kPa)	130	170	180

Table 1: Contraintes à la rupture

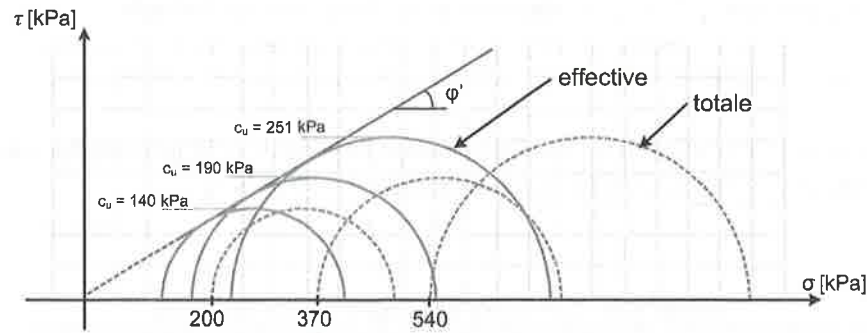


Figure 4: Cercles de Mohr en contrainte totales et effectives.

2.2 Cercles de Mohr

On trace les cercles de Mohr en contrainte totale (ce qui est donnée dans l'exercice) et bien en contraintes effective (valeurs en tableau 1)

2.3 Angle de frottement

Le sol est surconsolidée, néanmoins les contraintes après la phase isotrope sont supérieures à la contrainte de préconsolidation ($\sigma_p < \sigma_o$). C'est-à-dire qu'on peut retrouver l'angle de frottement à partir de la tangente des cercles de Mohr en contraintes effectives et que cette estimation est valable. On notera ici que c_u est fonction de la contrainte verticale effective in-situ et de l'overconsolidation ratio et devrait donc être adapté en fonction de ceci. Une évaluation graphique nous donne une valeur de

$$\phi' = 31^\circ$$

2.4 Cohésion non-drainée

La cohésion non-drainée est simplement la valeur de la contrainte cisailante maximale et peut être retrouvée avec

$$c_u = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

La forme nous indique que ce paramètre varie linéairement avec la contrainte de consolidation et nous pouvons donc faire une régression linéaire des trois valeurs obtenues afin de trouver que

$$c_u^o = 76 \text{ [kPa]}, \quad \lambda_u = 0.36$$

3 Talus Vertical

La correction de cet exercice sera donnée en cours.

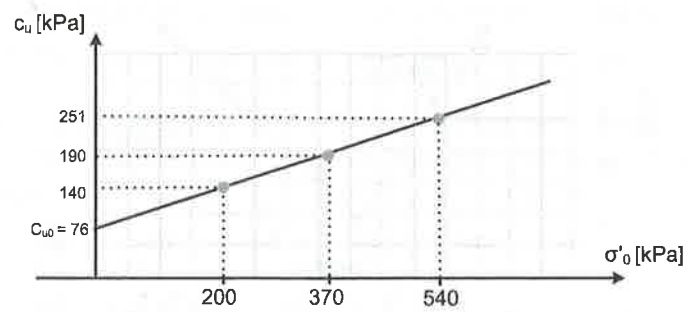


Figure 5: Cercles de Mohr en contrainte totales et effectives.