

Figure 9: Talus vertical dans un milieu cohérent et frottant.  $H$  de ruine ?

## 5 Exemple de calcul à la rupture: Talus vertical

Afin de mieux comprendre l'application pratique des notions précédentes, rien de mieux qu'un exemple. Prenons le cas de l'excavation d'un talus vertical dans un sol de poids  $\gamma$  satisfaisant un critère de Mohr-Coulomb (c.f. figure 9). Bornez la hauteur de ruine  $H$  du talus par une approche statique et cinématique.

Avant de commencer par l'approche statique, il est intéressant de faire une simple analyse dimensionnelle du problème. La hauteur maximale du talus  $H$  (en mètres - dimension  $[L]$ ) dépend des paramètres suivants:

- le poids du sol  $\gamma$   $[M/L^2/T^2]$
- la cohésion  $c$   $[M/L/T^2]$
- l'angle de frottement du sol  $\phi$   $[-]$

Les 4 paramètres du problème  $H$ ,  $\gamma$ ,  $c$ ,  $\phi$  ne dépendent que de 3 dimensions ( $[M]$ ,  $[L]$ ,  $[T]$ ), selon le théorème de Buckingham- $\pi$ , la solution du problème ne dépend donc que d'un seul paramètre adimensionnel (ici  $\phi$ ). Effectivement, on peut "scaler" la hauteur comme suit

$$H = \frac{c}{\gamma} \times \mathcal{H}(\phi)$$

où  $\mathcal{H}(\phi)$  est une fonction adimensionnelle ne dépendant que de l'angle de frottement. On voit donc que l'on peut en fait résoudre le problème pour  $\mathcal{H}$  et on aura les solutions pour n'importe quelle valeur de  $c$  et  $\gamma$ .

### 5.1 Approche Statique

On construit un champ statiquement admissible (S.A.) simple en 3 zones 1, 2 et 3 - cf Fig 10. On rappelle qu'un champ S.A. doit vérifier les équations d'équilibre, les conditions aux limites en tractions et le vecteur contraintes doit être continu à travers une surface de discontinuité.

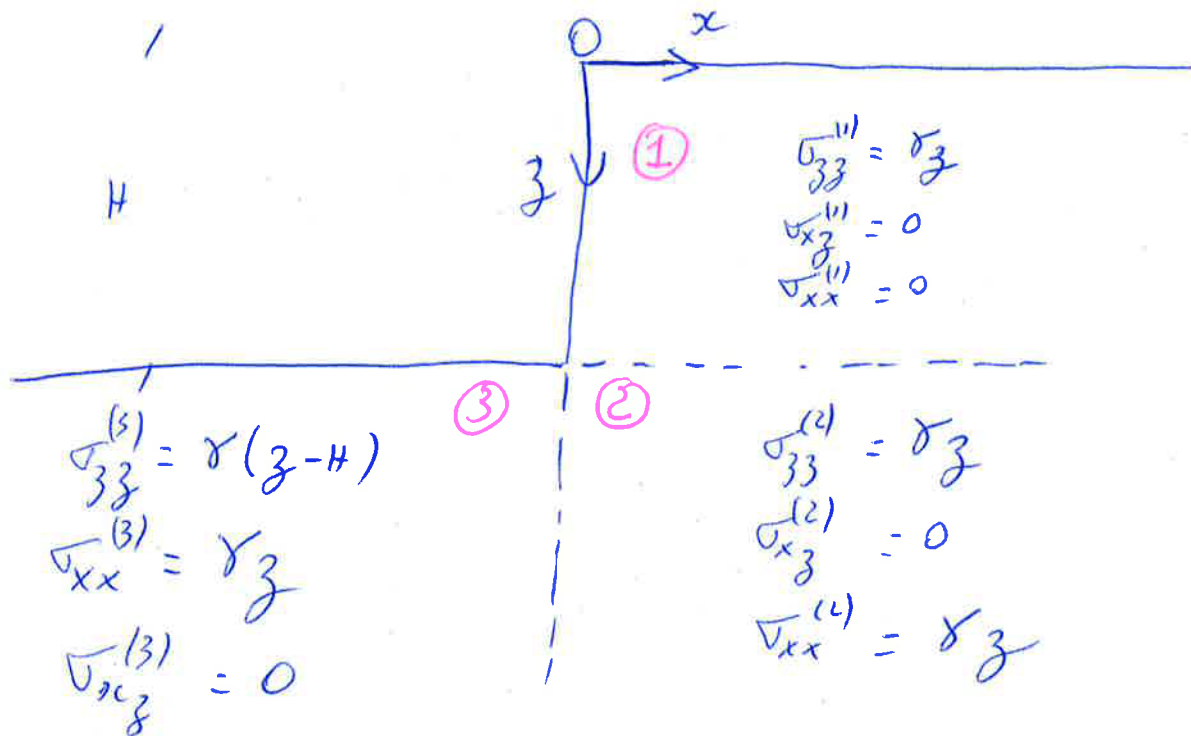


Figure 10: Approche statique - talus vertical. Champ de contraintes statiquement admissible à 3 zones simples.

Dans notre cas, dans le repère  $(x, z)$  de la figure, l'équilibre s'écrit

$$\begin{aligned}\partial_x \sigma_{xx} + \partial_z \sigma_{xz} &= 0 \\ \partial_x \sigma_{xz} + \partial_z \sigma_{zz} &= \gamma\end{aligned}$$

On choisit les champs suivants pour les différentes zones.

- Zone 1  $x \geq 0$  et  $z \leq H$

$$\sigma_{xx}^{(1)} = 0 \quad \sigma_{xz}^{(1)} = 0 \quad \sigma_{zz}^{(1)} = \gamma z$$

on peut vérifier qu'un tel champ est bien S.A. dans cette zone

- Zone 2  $x \geq 0$  et  $z > H$

$$\sigma_{xx}^{(2)} = \gamma z \quad \sigma_{xz}^{(2)} = 0 \quad \sigma_{zz}^{(2)} = \gamma z$$

ce champ est bien S.A. On notera que le vecteur contrainte est bien continue entre les zones 1 et 2 ( $\sigma_{zz}$  est bien continue), en revanche on peut avoir un saut de  $\sigma_{xx}$  si celui ci ne dépend pas de  $x$  (et  $\sigma_{xz} = 0$ ) (1ere equation d'équilibre)

- Zone 3  $x < 0$  et  $z > H$

$$\sigma_{xx}^{(3)} = \gamma z \quad \sigma_{xz}^{(3)} = 0 \quad \sigma_{zz}^{(3)} = \gamma(z - H)$$

ce champ est bien S.A. On notera que le vecteur contrainte est bien continue entre les zones 2 et 3 ( $\sigma_{xx}$  est bien continue).

Il convient maintenant de vérifier le critère de Mohr-Coulomb dans les trois zones. Comme  $\sigma_{xz} = 0$  partout, on est dans un repère de contraintes principales

- Zone 1

$$f = \gamma z(1 - \sin \phi) - 2c \cos \phi \leq 0$$

Le critère sera maximale en  $z = H$  et si on assume la rupture  $f = 0$  en  $z = H$ , alors on a  $f < 0$  pour tout  $z < H$  - donc le critère est vérifié dans toute la zone 1 pour

$$\frac{\gamma H}{c} \leq 2 \frac{\cos \phi}{1 - \sin \phi}$$

- Zone 2

$$f = -2\gamma z \sin \phi - 2c \cos \phi < 0$$

Le critère est vérifié partout. car en fait les 2 contraintes principales sont égales - pas de cisaillement.

- Zone 3 ( $z > H$ )

Le critère est maximale en  $z = H$ , où  $\sigma_{zz} = 0$ .

$$f_{max} = \gamma z(1 - \sin \phi) - 2c \cos \phi$$

et sera donc vérifié partout si

$$\frac{\gamma H}{c} \leq 2 \frac{\cos \phi}{1 - \sin \phi}$$

En conclusions, on voit que l'on peut obtenir un champ de contraintes S.A. vérifiant le critère de plasticité en tout point si

$$\frac{\gamma H}{c} \leq 2 \frac{\cos \phi}{1 - \sin \phi}$$

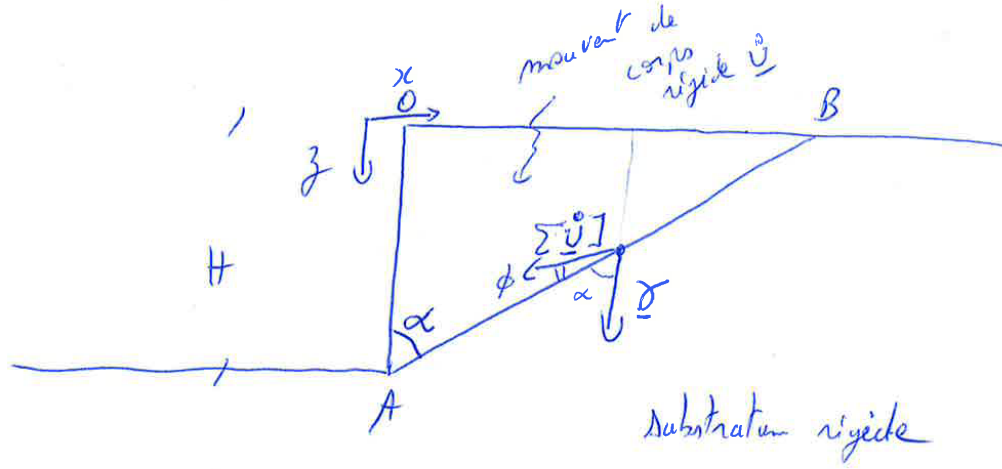


Figure 11: Approche cinématique. Mécanisme de ruine: champ de vitesse C.A.

En conclusion, cette approche statique nous fournit une borne inférieure  $\left(\frac{\gamma H}{c}\right)^-$  du vrai domaine de stabilité de la structure  $\left(\frac{\gamma H}{c}\right)$  pour l'égalité de l'inégalité précédente:

$$\left(\frac{\gamma H}{c}\right)^- = 2 \frac{\cos \phi}{1 - \sin \phi} = 2 \tan(\pi/4 + \phi/2)$$

$$2 \frac{\cos \phi}{1 - \sin \phi} \leq \left(\frac{\gamma H}{c}\right)$$

## 5.2 Approche Cinématique

On postule un champ de vitesse C.A. pour la ruine de la structure décrit dans la figure 11. Une droite partant du bas du talus et re-joignant la surface du sol en amont en B. On paramétrise cette surface de glissement par l'angle  $\alpha$ . On suppose donc que le triangle OAB se déplace en corps rigide avec un vecteur vitesse de norme  $\|\dot{U}\|$  alors que le substratum reste rigide: toute la déformation plastique est accommodée par la surface de glissement droite AB. Comme on l'a vu en 2.2.2, pour un critère de Mohr-Coulomb le vecteur vitesse fait un angle  $\phi$  avec la surface de glissement. Le vecteur vitesse est constant le long de la surface de glissement et la puissance totale dissipée est donc (c.g. subsection 2.2.2)

$$\mathcal{P}_{diss}(\dot{U}) = \int_{AB} c \|\dot{U}\| \cos \phi ds = \|AB\| \times c \|\dot{U}\| \cos \phi = \frac{H}{\cos \alpha} c \|\dot{U}\| \cos \phi$$

Ici la charge est le seul poids du sol (pas de traction imposée en surface). La puissance des efforts extérieurs est donc - comme seul le triangle OAB se déplace - le poids étant une force verticale

$$\mathcal{P}(\dot{U}) = \int_{OAB} \gamma \dot{U}_z dS = \int_{OAB} \gamma \|\dot{U}\| \cos(\alpha + \phi) dS = \frac{1}{2} H^2 \tan \alpha \times \gamma \|\dot{U}\| \cos(\alpha + \phi)$$

L'application du PPV donne alors la borne supérieure suivante de la charge de ruine pour un  $\alpha$  donné:

$$\frac{\gamma H}{c} = 2 \frac{\cos \phi}{\sin \alpha \cos(\alpha + \phi)}$$

Il convient de minimiser cette borne supérieure par rapport à  $\alpha$  afin d'obtenir la borne supérieure la plus petite. Pour ce faire, on minimise  $g(\alpha) = 2 \frac{\cos \phi}{\sin \alpha \cos(\alpha + \phi)}$ , pour des angles donnant bien sur  $g(\alpha) > 0$ , on obtient (en utilisant par exemple Mathematica ou à la main ;))

$$\alpha = \frac{\pi}{4} - \phi/2$$

et donc finalement la borne supérieure du domaine de stabilité

$$\left(\frac{\gamma H}{c}\right)^+ = 4 \frac{\cos \phi}{1 - \sin \phi} = 4 \tan(\pi/4 + \phi/2)$$

En combinant les résultats obtenu par l'approche statique (par l'intérieur) et cinématique (par l'extérieur), on obtient donc finalement les bornes suivantes du domaine de stabilité

$$2 \frac{\cos \phi}{1 - \sin \phi} \leq \left(\frac{\gamma H}{c}\right) \leq 4 \frac{\cos \phi}{1 - \sin \phi}$$

On voit que l'on a un facteur 2 entre la borne inférieure et la borne supérieure ! On notera qu'en utilisant des méthodes plus complexe en utilisant de multiples zones (pour le cas statique) et une surface de glissement en spirale logarithmique etc., les meilleurs estimations analytique des bornes obtenues à ce jour donnent

$$3.73 \frac{\cos \phi}{1 - \sin \phi} \leq \left(\frac{\gamma H}{c}\right) \leq 3.83 \frac{\cos \phi}{1 - \sin \phi}$$

Notamment la borne supérieure  $3.83 \frac{\cos \phi}{1 - \sin \phi}$  est obtenue en considérant un mécanisme de ruine en forme de spirale logarithmique.

On s'aperçoit donc que le mécanisme de ruine utilisé lors de notre estimation de la borne supérieure n'était pas trop loin (4 au lieu de 3.83) alors que le champ de contraintes simple à trois zones utilisé lors du calcul de la borne inférieure est clairement trop simpliste. En fait ici, la surface de rupture réelle est plus proche d'une spirale logarithmique.