

Ouvrages Géotechniques
Notes partielles (et incomplètes)

v2024.3

Brice Lecampion
Geo-Energy Lab - EPFL

March 3, 2024

Ce document est en construction^a. Il est très loin d'être complet et ne remplace pas vos notes prises lors du cours...

^aCertaines figures sont protégées par copyright.

Contents

1 Projet en géotechnique	6
1.1 Généralités	6
1.2 Etats limites ultimes / états limites de services	6
1.2.1 Etat Limites Ultimes - vérification de la sécurité structurale	6
1.2.2 Etat Limites de services - vérification de l'aptitude au service	8
1.3 Conventions en mécanique des sols et des roches	8
2 Comportement mécanique des sols	9
2.1 Le sol: un milieu poreux	9
2.2 Comportement drainée/non-drainée	10
2.3 Détermination des propriétés de rupture au laboratoire	10
2.4 Lois de comportements	12
2.4.1 Modélisation du comportement d'un sol	12
2.4.2 Critères de rupture	12
2.4.2.1 Conditions drainées (long terme) - Mohr-Coulomb en contraintes effectives .	12
2.4.2.2 Conditions non-drainées (court terme) - Tresca en contraintes totales	12
2.4.2.3 Propriété de convexité du critère de plasticité	13
2.5 Notions d'écoulement plastique	15
2.5.1 Ecoulement plastique / Analogie avec la friction	15
2.5.1.1 Analogie avec la friction	16
2.5.2 Ecoulement plastique	17
3 Caractérisation in-situ	18
3.1 Tests in-situ	18
3.1.1 Scissomètre	18
3.1.2 CPT/U - Pénétromètre statique	20
3.1.3 SPT - pénétromètre dynamique	20
3.1.4 Pressiomètre	22
3.1.4.1 Modélisation mécanique	23
3.2 Autres tests	26
3.2.1 Essai à la plaque	26
3.2.2 Dilatomètre	26
3.2.3 Essais hydrauliques	26
4 Analyse limite et calculs à la rupture pour la géotechnique	27
4.1 Le problème rigide-plastique	27
4.1.1 Principe des puissances virtuelles	28
4.1.2 Théorèmes de l'analyse limite	29
4.1.3 Paramètres de chargement / notions des domaines de charges admissibles / Approches du calcul à la rupture	29
4.2 Critères de plasticité en mécanique des sols	31
4.2.1 Court terme versus long terme	31
4.2.1.1 Conditions drainées (long terme) - Mohr-Coulomb en contraintes effectives .	31
4.2.1.2 Conditions non-drainées (court terme) - Tresca en contraintes totales	31
4.2.1.3 Propriété de convexité du critère de plasticité	32

4.2.2	Déformations plastiques	33
4.2.2.1	Mohr-Coulomb - dilatance	33
4.2.2.2	Surface de Glissement	34
4.2.3	Discontinuités de contraintes	36
4.3	Démonstration des théorèmes de l'analyse limite	37
4.3.1	Borne inférieure statique	37
4.3.2	Borne supérieure cinématique	38
4.4	Démarche pour l'obtention des bornes de la charge ultime	38
4.5	Example de calcul à la rupture: Talus vertical	40
4.5.1	Approche Statique	40
4.5.2	Approche Cinématique	43
5	Fondations superficielles	45
5.1	Types	45
5.1.1	Types de fondations superficielles	45
5.1.2	Types d'état limite ultime	45
5.2	Capacité portante	47
5.2.1	Critère de Tresca	47
5.2.2	Dérivation de Prandtl	47
5.3	Formules générales	52
5.3.1	Sollicitation drainée / Long-terme	52
5.3.1.1	Facteurs de portance	53
5.3.1.2	Coefficients correcteurs de forme	53
5.3.1.3	Excentricité de la charge appliquée	53
5.3.1.4	Inclinaison de la charge	55
5.3.1.5	Inclinaison de la base de la fondation	55
5.3.1.6	Fondation en profondeur	55
5.3.1.7	Inclinaison du sol	56
5.3.1.8	Présence d'une nappe	56
5.3.2	Sollicitation non drainée / court terme	56
5.4	Tassement des fondations superficielles	59
5.4.1	Ordre de grandeurs des tassements	59
5.4.2	Solutions de l'élasticité	59
5.4.3	Consolidation primaire	59
5.4.3.1	Unidimensional (Oedometric) conditions	59
5.4.4	Non linear primary consolidation	61
5.4.5	Secondary Consolidation	62
5.4.6	Approche simplifiée pour l'estimation des tassements	62
6	Fondations profondes	63
6.1	Different types	63
6.1.1	Pieux battus	63
6.1.1.1	Bois	63
6.1.1.2	Acier	64
6.1.1.3	Béton préfabriqué	64
6.1.2	Pieux forés	64
6.1.2.1	Pieux forés sous boue	64
6.1.2.2	Pieux forés tubés	65
6.1.2.3	Pieux forés à la tarière continue	65
6.2	Estimation de la capacité portante d'un pieu isolé sous chargement axial	65
6.2.1	Mécanismes de rupture et facteur influençant la capacité portante	65
6.2.1.1	Facteurs influençant	67
6.2.2	DTU	67
6.2.2.1	Sols pulvérulents	67
6.2.2.2	Sols cohérents (court terme)	69
6.2.3	Lang & Huder	70
6.2.3.1	Sols pulvérulents	70

6.2.3.2	Sols cohérents (court terme)	70
6.2.4	Formules de Battage	71
6.2.4.1	Formule des Hollandais	71
6.2.4.2	Formule générales	73
6.2.4.3	Équation générale	74
6.2.4.4	Applications	74
6.3	Essai de chargement statique	74
6.4	Groupe de pieux	74
6.5	Frottement négatif	74
6.5.1	Estimation du frottement négatif	75
6.5.1.1	Sur toute la hauteur de la couche compressible	75
6.5.1.2	Sur une partie de la hauteur de la couche compressible	75
6.5.1.3	Effet d'accrochage du sol autour du pieu	75
6.6	Méthodes aux modules de réactions - sollicitations mixtes	75
6.6.1	Théorie des poutres	76
6.6.1.1	Equilibre	76
6.6.1.2	Loi de comportement de la poutre	76
6.6.2	Reactions du sol	77
6.7	Tassement des fondations profondes	77
6.7.1	Estimation basée sur les modules de réactions / cambefort-cassan	77
7	Calculs hydraulique en régime permanent autour des ouvrages - instabilités d'origine hydraulique	79
7.1	Ecoulements en régime permanent	79
7.1.0.1	Ecoulement autour d'un puit (nappe captive)	79
7.2	Ecoulements en nappe libre - approximation de Dupuit	80
7.2.1	Ecoulement à travers un barrage en terres	80
7.2.2	Ecoulement autour d'un puit	80
7.3	Ecoulement autour d'un élément de soutènement	80
7.3.1	Rideau de palplanches infini	80
7.3.2	Coffer dam	81
7.4	Rabbattement de nappes autour d'une excavation	82
7.5	Instabilités d'origine hydraulique - phénomène du renard	82
7.6	Défaut de portance d'une paroi - renard "solide"	83
8	Stabilité des talus	84
8.1	Stabilité d'une pente infinie - glissement plan	84
8.1.1	Cas sans eau	84
8.1.1.1	Approche par facteur de sécurité	84
8.1.1.2	Lien avec l'analyse limite	85
8.1.1.3	Ecoulement plastique non-associé	85
8.1.2	Présence d'eau	86
8.2	Stabilité d'un talus fini	87
8.2.1	Glissement plan	87
8.2.2	Glissement circulaire	88
8.2.3	Glissement circulaire avec écoulement	89
8.2.4	Méthode des tranches (tiré de Lancellotta)	90
9	Poussée - butée des terres sur les éléments de soutènements	94
9.1	Théorie de Rankine	94
9.1.1	Cas incliné	95
9.2	Analyse limite	95
9.3	Équilibre limite du coin de Coulomb	95
9.4	Actions sur les éléments de soutènements	96
9.4.1	Resultante des actions sur les éléments de soutènements	96
9.4.1.1	Court terme	96
9.4.1.2	Long terme	96

10 Murs Poids	97
10.1 Types - disposition constructives	97
10.2 Mur poids	97
10.3 Mur équerre	97
11 Parois de soutènement	98
11.1 Types - disposition constructives	98
11.2 Defaut de portance en fond de fouille	98
11.3 Calcul des efforts le long d'une paroi	98
11.4 Dimensionnement	98
11.4.1 Sans cohésion - sans eau - sans ancrage - Paroi simplement fiché	98
11.4.2 Equilibre de la paroi:	99
11.4.3 Paroi ancrée et butée en pied	99
11.4.4 Paroi ancrée et encastrée en pied	100
11.4.5 Méthode de la poutre équivalente - (Méthode de Blum)	100
12 Parois Clouées	101
A Rappels de mécanique des milieux continus	102

Chapter 1

Projet en géotechnique

1.1 Généralités

Un projet géotechnique nécessite la combinaison d'information provenant du projet d'ouvrage en lui-même (descentes de charges, tassements maximum autorisés etc.), du sol (stratigraphie, résistance, déformabilité etc.) et de l'environnement naturel et construit (bâtiments voisins, maintenance des voies de communications, environnement etc.). Comme tout autre projet de génie civil, les contraintes juridiques, économiques etc. sont également prépondérante et impacte directement les solutions techniques retenues au final.

L'ingénieur se doit de "créer" une solution technique saine respectant ces différentes contraintes.

1.2 Etats limites ultimes / états limites de services

Pour tous les types d'ouvrages de soutènement et pour chaque situation de projet déterminante, il faut vérifier que l'état limite ultime (sécurité structurale) et l'état limite de service (aptitude au service) ne sont dépassés à aucun moment durant les phases de construction et d'exploitation.

1.2.1 Etat Limites Ultimes - vérification de la sécurité structurale

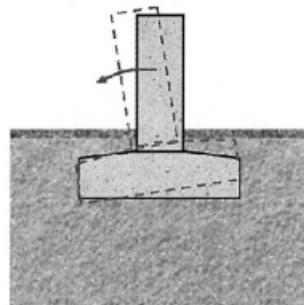
Une structure géotechnique ne doit pas se rompre! Lors du dimensionnement, on doit donc vérifier que aussi bien une fois l'ouvrage terminé que pendant toute les phases de construction, aucune "ruine" de l'ouvrage ou d'une de ses parties ne se produise. On vérifie la sécurité structurale de l'ouvrage afin d'éviter des ruptures catastrophiques.

On divise les états limites ultimes (ELU) en

- ELU externe - où la rupture est lié à la mobilisation de la résistance du sol.
- ELU interne - où la rupture est lié à la mobilisation de la résistance des matériaux de l'ouvrage (par exemple un renforcement).

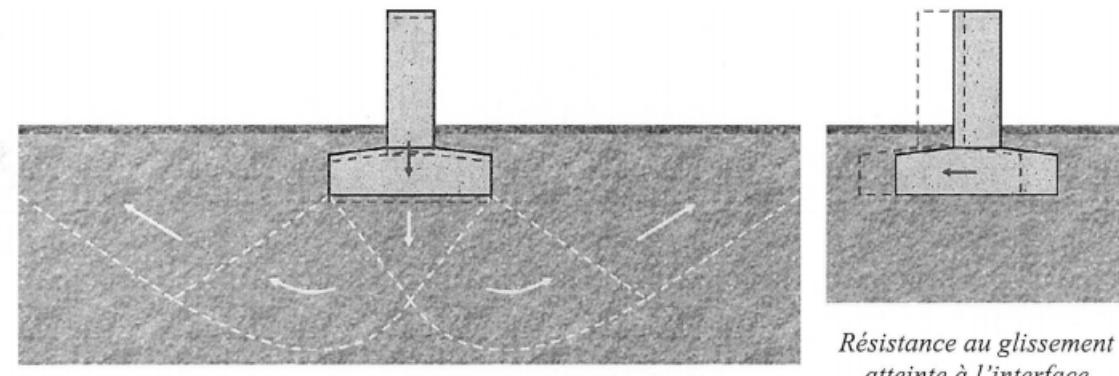
En plus dans les normes Suisses (SIA 267), on distingue différents type d'ELU:

1. ELU de type 1 - instabilité d'ensemble de l'ouvrage où la résistance du sol ne jouent pas de rôle.
2. ELU de type 2 - la résistance ultime de l'ouvrage ou d'un de ses éléments est atteinte. Les propriétés de la structure et du terrain jouent un rôle prépondérant.
3. ELU de type 3 - Instabilité globale du terrain, Mobilisation complète de la résistance du terrain (c'est le cas de la stabilité de pentes).
4. ELU de type 4 - Fatigue de l'ouvrage ou d'un de ses éléments.



Perte d'équilibre par basculement

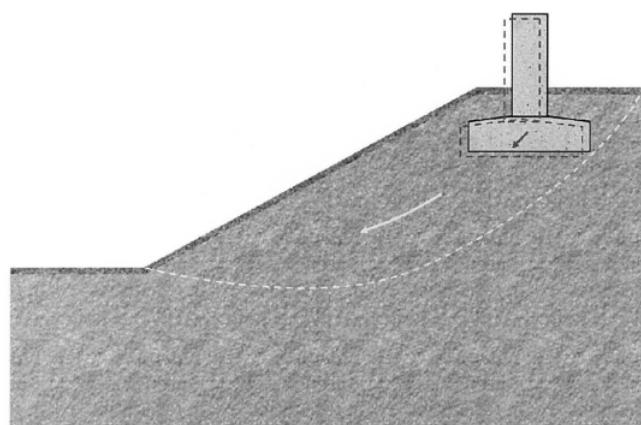
Figure 1.1: Exemple d'ELU de type 1.



Résistance au poinçonnement du terrain atteinte

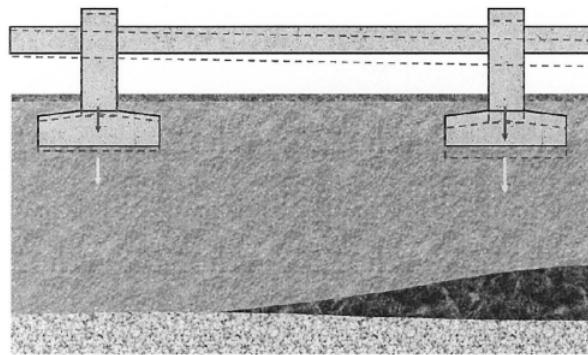
Résistance au glissement atteinte à l'interface

Figure 1.2: Examples d'ELU de type 2 externe.



Mobilisation complète de la résistance au cisaillement du terrain (i.e. glissement généralisé)

Figure 1.3: Example d'ELU de type 3.



Tassements totaux et/ou différentiels excessifs limitant l'aptitude au service de l'ouvrage

Figure 1.4: Exemple d'ELS - tassements différentiels.

1.2.2 Etat Limites de services - vérification de l'aptitude au service

Les états limites de services sont en général définis dans la convention de l'ouvrage - Il s'agit d'éviter une dégradation de l'ouvrage. Notamment en géotechnique, limiter les déformations à long terme et leur conséquence sur la structure (fissures etc.).

De même que pour les ELS, on parle d'ELS externe (mobilisation sol) et d'ELS interne (lié au matériaux de l'ouvrage - ex. durabilité).

1.3 Conventions en mécanique des sols et des roches

Contrairement à la mécanique du solide où les contraintes sont définies positives en tractions, c'est l'inverse en géo-mécanique: le tenseur des contraintes est positif en compression ! La raison est double: 1) les contraintes du poids des terres sont compressives et ainsi les contraintes en profondeur sont toujours compressives à l'état initial, 2) les géo-matériaux ont une résistance à la traction assez faible mais exhibent une augmentation de leur résistance avec une augmentation de la contrainte moyenne en compression (comportement frictionnel de type Mohr-Coulomb).

Cela implique une petite "gymnastique". Tout d'abord, dans l'équilibre quasi-statique on doit adapter le signe des forces de volumes! l'équation d'équilibre devient:

$$\sigma_{ij,j} - f_i = 0$$

(ici le tenseur des contraintes est positif en compression).

On écrit souvent la relation de comportement contraintes-déformations du type:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}\epsilon_{kl}$$

ce qui implique que les déformations sont positives en "contraction" et négatives en "expansion" ! Si l'on garde la définition du tenseur des (petites) déformations comme étant

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$$

alors le déplacement est positif dans le sens inverse du système de coordonnées !! Parfois, dans certains livres, un signe " - " est introduit dans la définition du tenseur de déformations ($\epsilon_{ij} = -(u_{i,j} + u_{j,i})/2$) afin de garder un déplacement positif dans le sens des axes du système de coordonnée.

La convention des contraintes positives en compression change aussi le sens de rotation dans le plan de Mohr !

Chapter 2

Comportement mécanique des sols

2.1 Le sol: un milieu poreux

La taille du volume élémentaire représentatif (VER) d'un sol correspond à l'échelle macroscopique où une modélisation du sol comme un milieu continu s'applique. L'utilisation de la mécanique des milieux continus repose sur une séparation d'échelle entre la microstructure du sol ℓ_{micro} , la taille du VER ℓ_{VER} qui est lui même beaucoup plus petit que la taille de l'ouvrage $\ell_{structure} \gg \ell_{VER} \gg \ell_{micro}$. Pour des sols, un VER peut aller de quelques millimètres (sable fins) à un mètre (moraine). Il convient de garder à l'esprit ces différentes échelles. Par expérience on a souvent: $\ell_{VER} \sim 10\ell_{micro}$.

Un volume élémentaire représentatif (VER) V d'un sol est constitué d'un partie solide V_s et de vide (pores) V_v . L'espace poral (V_v) peut être rempli d'air (V_a) ou d'eau (V_w). On a évidemment

$$V = V_s + V_v \quad V_v = V_a + V_w$$

Le volume élémentaire représentatif V est l'échelle à partir de laquelle la mécanique des milieux continus s'applique. Il permet de définir les propriétés suivantes d'un sol:

- sa porosité

$$n = V_v/V$$

où V_v est le volume des pores (des vides) du sol

- l'indice des vides

$$e = \frac{V_v}{V_s}$$

et l'on voit donc que $n = e/(1 + e)$

- La teneur en eau définit comme le rapport de masse d'eau et des constituants solides

$$w = M_w/M_s$$

- La saturation en eau S_w et en air S_a

$$S_w = V_w/V_v \quad S_a = V_a/V_v = 1 - S_w$$

Dans ce cours, on ne fera des calculs soit en conditions complètement sec ($S_w = 0$), soit complètement saturé ($S_w = 1$).

- la densité des constituent solides $\rho_s = M_s/V_s$ et d'eau ρ_w permet de définir la densité à sec

$$\rho_d = \rho_s(1 - n)$$

la densité globale du sol

$$\rho = \rho_s(1 - n) + \rho_w n S_w$$

et leur poids correspondants

$$\gamma_d = \rho_d g \quad \gamma = \rho g$$

ainsi que le poids déjaugé du sol (évidemment saturé)

$$\gamma' = \gamma - \gamma_w$$

avec $\gamma_w = \rho_w g$ le poids de l'eau.

2.2 Comportement drainée/non-drainée

La rupture des sols est fonction du tenseur des contraintes effectives - i.e. de la contrainte agissant sur le squelette solide. Pour un sol saturé en eau, ce tenseur des contraintes effectives s'écrit

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - u\delta_{ij}$$

avec u la pression d'eau interstitielle (pression de pores) qui agit isotropiquement.

Lors de l'application soudaine d'une charge sur un élément de sol, initialement l'eau n'a pas le temps de s'écouler et une partie de la charge est donc reprise par l'eau des pores. On est en conditions dites non-drainées (temps court), la pression de pore augmente d'un Δu . Ensuite, selon les conditions aux limites d'écoulement, si le drainage est permis (ce qui est le cas pour quasiment tous les ouvrages), cette surpression de pore initiale se dissipe (plus ou moins rapidement). Aux temps longs, (si le drainage est permis) la surpression de pore initiale disparaît complètement: on est en conditions drainées. Le temps caractéristique de transition entre conditions drainées / non-drainées dépend linéairement de la perméabilité du sol. Il en résulte que pour un sable très perméable, les conditions non-drainées ne durent que quelques secondes, alors que pour une argile la transition vers l'état drainé peut prendre plusieurs années/décennies.

Pour résumer:

- Conditions non-drainées (temps court): la pression de pore varie (augmente si on compresse le sol). On vérifiera la rupture du sol en **contraintes totales** en utilisant un critère de Tresca avec la cohésion non-drainée c_u (on n'essaie pas de prédire Δu).
- Conditions drainées (temps long): les surpressions de pores se sont toutes dissipées. On vérifie la rupture du sol en **contraintes effectives** (avec la pression de pore en place: soit hydrostatique, soit due à un écoulement permanent) en utilisant un critère de Mohr-Coulomb (c' , ϕ').
- Dépendant du type de sol, de la géométrie et du phasage de construction, les conditions drainées ou non-drainées seront prépondérantes pour la vérifications structurale.

2.3 Détermination des propriétés de rupture au laboratoire

Il existe 3 grands types d'essai triaxiaux permettant de caractériser les propriétés de rupture d'un sol en conditions drainées et non-drainées:

1. Consolidé - drainé (CD): l'éprouvette de sol est initialement consolidée par la pression de confinement (chargement isotrope), la pression de pore étant maintenue nulle. Ensuite, l'échantillon est cisaillé (on augmente le déviateur des contraintes) tout en gardant des conditions de drainage de telle sorte qu'aucune pression de pore ne se développe. En répétant l'essai pour plusieurs pressions de confinement, on obtient les paramètres de rupture drainée c' , ϕ' . On notera que sur une argile très peu perméable, ce type de tests peut prendre plusieurs semaines (voire mois) afin d'assurer qu'aucune surpression ne se développe (le chargement doit être très lent).
2. Consolidé - non-drainé (CU): l'éprouvette de sol (saturé) est initialement consolidée par la pression de confinement (chargement isotrope), la pression de pore étant maintenue nulle. Ensuite, l'échantillon est cisaillé (on augmente le déviateur) en fermant les vannes du système de drainage de telle sorte que la pression de pore augmente en général. En mesurant la pression de pore, on peut déterminer c' , ϕ' ainsi que c_u - cette dernière dépend alors linéairement de la valeur de la pression de confinement utilisée lors de la phase isotrope effectuée en condition drainée.
3. Non-consolidé - non-drainé (UU): l'échantillon (saturé) est mis sous contraintes isotropes tout en gardant les vannes fermées - de telle sorte que la pression de pore augmente. L'échantillon est ensuite cisaillé

tout en gardant toujours le système de drainage fermé. Cet essai donne les paramètres apparent de rupture non-drainé c_u ($\phi_u = 0$) obtenu en **contraintes totales**. On notera que pour ce type de test la pression de confinement utilisée lors de la phase de chargement isotrope ne change pas la valeur de c_u (le cercle de Mohr en contraintes effectives est toujours le même). En revanche, c_u est fonction de la contrainte verticale effective in-situ en place à la profondeur de l'échantillon, ainsi que de l'"over-consolidation ratio" (OCR). Une formule empirique du type $c_u \approx \sigma'_{v,o} \times 0.22 \times OCR^{0.8}$ est assez bonne pour les argiles (avec des $OCR < 10$).

On se souviendra qu'une résistance non-drainée n'a de sens que pour des sols argileux /"impermeables" : cela ne fait que peu de sens de parler de la cohésion non-drainée d'un sable.

Essai UU

Un peu plus de détails sur l'essai UU sur un échantillon saturé. Avec le prélèvement de l'échantillon de sol (typiquement argileux pour ce type de test) et la décompression associée, comme ce type de sol est peu perméable, une pression de pore "negative" du à la dilatance se développe (suction). Donc avant la mise en charge, on a un état suivant:

- Contraintes totales nulles

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 0$$

- Pression de pore négative

$$u = -|u_o|$$

- et donc contraintes effectives positives

$$\sigma'_1 = \sigma'_2 = |u_o|$$

La première phase de chargement est isotrope, i.e. σ_c , comme l'essai est non-drainé lors de celle ci la pression de pore augmente de $\Delta u_c = B\sigma_c$ où B est le coefficient de Skempton - qui est proche de 1 pour des sols saturés (le sol est beaucoup plus compressible que l'eau - ce qui n'est pas le cas d'une roche). A la fin de cette étape de chargement isotrope, on a:

- Contraintes totales

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_c$$

- Pression de pore (positive si $|u_o|$ est plus petite que σ_c)

$$u = -|u_o| + B\sigma_c \approx -|u_o| + \sigma_c$$

- et donc les contraintes effectives ne changent pas !

$$\sigma'_1 = \sigma'_2 = |u_o|$$

Finalement, on cisaille le sol en augmentant σ_1

$$\sigma_1 = \sigma_c + \Delta\sigma_1 \quad \sigma_2 = \sigma_c$$

de telle sorte que la pression de pore augmente de $A\Delta\sigma_1$ (avec A un coefficient matériau)

$$u \approx -|u_o| + \sigma_c + A\Delta\sigma_1$$

soit des contraintes effectives

$$\sigma'_1 = |u_o| + (1 - A)\Delta\sigma_1 \quad \sigma'_2 = |u_o| - A\Delta\sigma_1$$

On voit que le cercle de Mohr en contraintes effectives à la rupture ne dépend pas de la pression de confinement. Les cercles de Mohr en contraintes totales pour différent essai effectués avec différents σ_c donne une réponse d'un matériau de type Tresca.

2.4 Lois de comportements

2.4.1 Modélisation du comportement d'un sol

Les géomatériaux ont des comportements mécanique beaucoup plus complexe que les métaux, béton etc. Pour les sols, le comportement mécanique dépend entre autres:

- de l'historique du chargement (erosion, constriction préalable ...) - à savoir du degré de préconsolidation - *OCR*. On rappelle que le degré de pré-consolidation est défini comme le rapport entre la contrainte (vertical) maximale vécu par le sol lors de son histoire de chargement et la contrainte actuelle.
- des composants du sol (argiles, sables)
- du degré de saturation
- de la température, la durée de chargement (fluage) etc.

La complexité du comportement des sols est responsable de plus grands facteurs de sécurité utilisé en pratique. Pour l'ingénieur, le degré de complexité de la loi de comportement à utiliser est directement relié à la criticalité du projet, la phase d'étude etc.

Dans ce cours, pour la vérification des états limites ultimes, où il s'agit de se prémunir de la ruine complète de la structure, on modélisera le sol comme se comportant d'une manière rigide / plastique. A savoir, on négligera les déformations élastiques reversibles.

En revanche, pour les vérifications des états limites de services, on est typiquement loin de la ruine, et donc on prendra en compte les déformations élastiques du sol. Il convient de se rappeler, qu'un sol ne se comporte pas en général même dans le domaine élastique d'une manière linéaire. On utilisera dans ce cours l'élasticité linéaire et non-linéaire (loi de consolidation de type log-linéaire) pour obtenir des estimations des tassements des ouvrages. Des modèles elasto-plastique plus adéquats (Cam-Clay etc.) sont utilisés pour les calculs aux états de services (vous verrez ces modèles lors de cours avancés au niveau Master).

2.4.2 Critères de rupture

2.4.2.1 Conditions drainées (long terme) - Mohr-Coulomb en contraintes effectives

A long terme, le modèle de Mohr-Coulomb (avec cohésion c' et angle de friction ϕ') est typiquement utilisé pour obtenir une estimation des charges ultimes (bien évidemment, des modèles plus complexes reproduisent mieux le comportement des sols - cf le modèle de Cam-Clay que vous verrez en Master). Dans le diagramme de Mohr, le critère de Mohr-Coulomb correspond à une droite. Il est important de souligner que ce critère de rupture à long terme est bien sur exprimé en fonction des contraintes effectives $\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - u\delta_{ij}$ (contraintes positives en compression). *Pour plus de simplicité (et de clarté) dans la suite de ces notes sur le calcul à la rupture, on ne fera pas de différence entre contraintes effectives et totales*¹. Dans l'espace des contraintes principales (contraintes positives en compression), $\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$, le critère s'écrit (Fig.2.1):

$$f(\sigma_{ij}) = (\sigma_I - \sigma_{III}) - (\sigma_I + \sigma_{III}) \sin \phi - 2C \cos \phi \quad (2.1)$$

On rappelle que pour la facette dont l'orientation correspond au point touchant la droite de Mohr Coulomb dans le diagramme de Mohr, notant σ_n la contrainte normale à cette facette et τ le cisaillement sur cette facette, le critère de Mohr-Coulomb s'écrit simplement:

$$f(\sigma_n, \tau) = \tau - c - \sigma_n \tan \phi \quad (2.2)$$

2.4.2.2 Conditions non-drainées (court terme) - Tresca en contraintes totales

A court terme, le critère de rupture d'un sol s'écrit en contraintes totales (à court terme i.e. en conditions non drainées, dans un essai tri-axial, qq soit l'état initial en augmentant la charge axiale, on obtient toujours le même cercle de Mohr en contraintes effectives). Le critère de Tresca (matériau purement cohérent, non-frictionnel) approxime correctement la rupture du sol à court terme (en *contraintes totales*):

$$f(\sigma_{ij}) = (\sigma_I - \sigma_{III}) - 2c$$

¹ La distinction est implicite: long terme - critère de Mohr-Coulomb en contraintes effectives, court terme - critère de Tresca en contraintes totales.

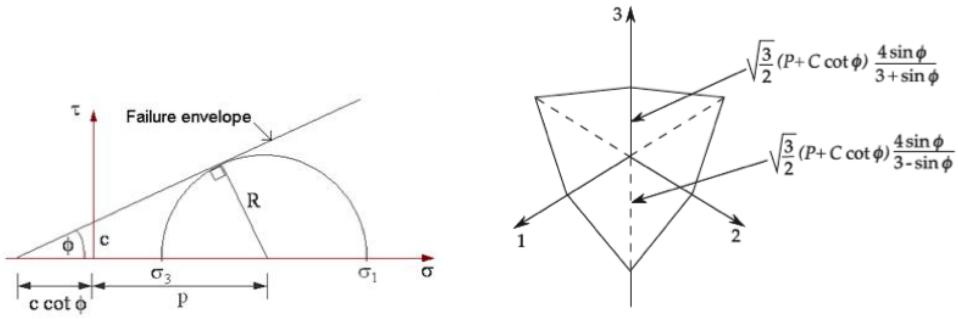


Figure 2.1: Critère de Mohr-Coulomb (diagramme de Mohr, dans le π -plan de l'espace de contraintes principales).

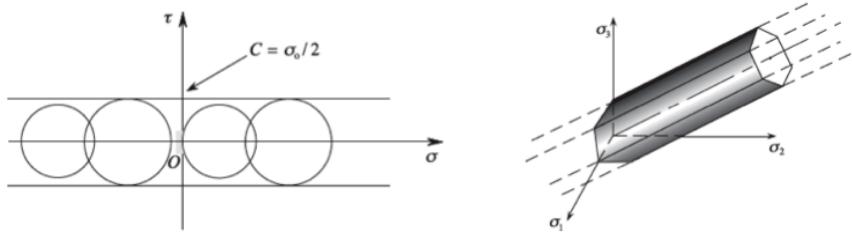


Figure 2.2: Critère de Tresca (diagramme de Mohr, & dans l'espace de 3 contraintes principales)

et classiquement en mécanique des sols on note la cohésion non-drainée c_u (parfois s_u - s pour “shear strength”).

2.4.2.3 Propriété de convexité du critère de plasticité

Plan tangent à la surface de rupture Soit une courbe $f(x_1, x_2)$ (dépendant de 2 variables). Au point (x_1^o, x_2^o) , la normale à cette courbe est donnée par son gradient de f à ce point: $(\partial f / \partial x_1, \partial f / \partial x_2)^o$. Un développement de Taylor au premier ordre autour de (x_1^o, x_2^o) , donne:

$$f(x_1, x_2) = f(x_1^o, x_2^o) + (x_1 - x_1^o) \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_o + (x_2 - x_2^o) \frac{\partial f}{\partial x_2} \Big|_o$$

la tangente à f au point (x_1^o, x_2^o) a pour équation $(x_1 - x_1^o) \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_o + (x_2 - x_2^o) \frac{\partial f}{\partial x_2} \Big|_o = 0$, i.e. sous forme vectorielle (summation sur les indices répétés) $(x_i - x_i^o) \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_o = 0$. Le gradient de f en un point sur la surface donne la normale à celle-ci en ce point.

On peut facilement généraliser au cas d'une surface f fonction de n variables. Dans notre cas, $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ de telles sorte que le critère de plasticité $f(\sigma_{ij})$ ne dépend que de 6 valeurs du tenseur des contraintes (ou des 3 contraintes principales).

Convexité Il est plus simple de visualiser les choses en 2D. Prenons donc un exemple où le critère ne dépend que de σ_{11} et σ_{22} (cf Fig. 2.3). On voit que pour tout point σ_{ij}^e dans le domaine élastique ($f(\sigma_{ij}^e) < 0$), l'angle entre les vecteurs $(\sigma_{ij}^o - \sigma_{ij}^e)$ et $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \Big|_{\sigma_{ij}^o}$ est inférieur à $\pi/2$ (avec σ_{ij}^o un point sur la surface de rupture $f(\sigma_{ij}^o) = 0$), soit:

$$(\sigma_{ij}^o - \sigma_{ij}^e) \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \Big|_{\sigma_{ij}^o} > 0$$

Cette propriété découle de la “convexité” de la surface de rupture. On voit bien sur la Fig.2.4 que pour une surface concave cela n'est plus le cas en tout point. On observe expérimentalement que les critères de rupture ont la propriété de convexité (et on peut le comprendre physiquement en imaginant différents chemins de chargement). Cette propriété est importante pour démontrer les théorèmes de l'analyse limite (borne inférieure & supérieure de la charge limite d'une structure).

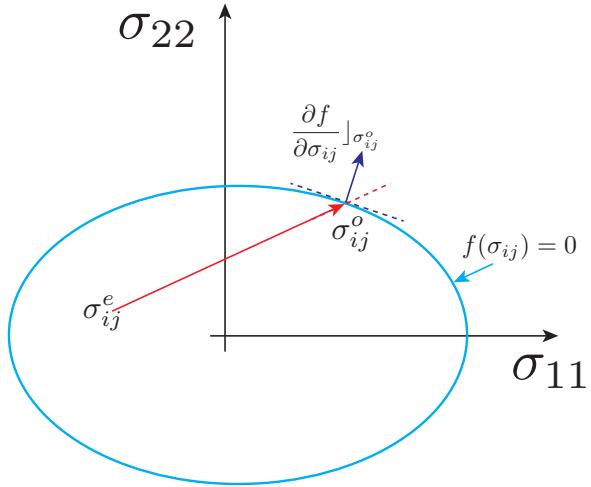


Figure 2.3: Surface de rupture ($f(\sigma_{ij}) = 0$) - exemple en 2D. Illustration de la propriété de convexité $(\sigma_{ij}^o - \sigma_{ij}^e) \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}|_{\sigma_{ij}^o} > 0$.

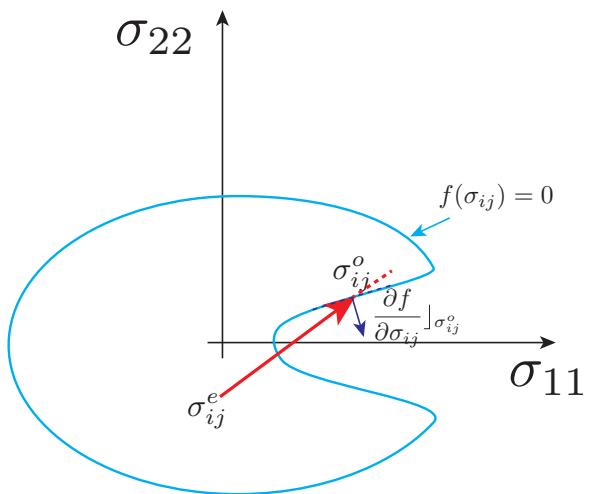


Figure 2.4: Example de surface concave où l'on peut avoir $(\sigma_{ij}^o - \sigma_{ij}^e) \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}|_{\sigma_{ij}^o} < 0$. Expérimentalement, on observe que les surfaces de rupture sont toujours convexes (cf Fig.2.3). Cela se comprend intuitivement physiquement.

2.5 Notions d'écoulement plastique

Remarque 1: la déformation totale d'un matériau élasto-plastique est la somme d'une partie élastique ϵ_{ij}^e (réversible) et d'une partie plastique irréversible ϵ_{ij}^p :

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^p$$

La relation d'élasticité reliant contraintes (effectives pour les sols) et la partie élastique des déformations reste valide:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \epsilon_{kl}^e = c_{ijkl} (\epsilon_{kl} - \epsilon_{kl}^p)$$

Remarque 2: Les déformations plastiques ne sont pas 'visqueuses', en d'autres termes elles ne dépendent pas du temps physique. En revanche, elles sont dépendantes de l'histoire du chargement qui est souvent ... exprimé comme une fonction temporelle. On utilisera donc en élasto-plasticité le taux de déformation $\dot{\epsilon}_{ij}$ pour suivre la déformation du milieu.

Le critère de rupture exprime mathématiquement les observations expérimentales suivantes:

1. en dessous d'un seuil de contraintes la déformation est strictement élastique (réversible). Cette limite s'écrit comme une fonction du tenseur des contraintes: $f(\sigma_{ij})$. On l'appelle alternativement limite élastique, seuil plastique ou critère de rupture. ²
2. les contraintes ne peuvent pas aller au-delà de ce critère de rupture. Par exemple si on contrôle un essai en force, tout s'écroule brutalement. C'est pour cela que l'on contrôle les essais mécaniques en vitesse de déplacement en général - alors on peut établir un écoulement plastique (sous charge constante dans le cas d'un comportement élastoplastique parfait)

On peut donc décrire l'évolution des déformations plastiques comme suit:

$$\begin{aligned} f(\sigma_{ij}) < 0 & \quad \dot{\epsilon}_{ij}^p = 0 & \text{pas de déf plastique si le critère n'est pas atteint} \\ f(\sigma_{ij}) = 0 & \quad \dot{\epsilon}_{ij}^p \neq 0 & \text{déf plastique si le critère en contraintes est satisfait} \end{aligned}$$

On notera que pour beaucoup de matériaux, on observe lors d'essai mécanique soit un durcissement (c'est le cas des métaux, de certains sols selon leur état initial- i.e. sous-consolidé) soit un radoucissement³ (c'est le cas des sols sur-consolidé). Le critère de plasticité évolue alors avec la déformation plastique. On doit alors écrire le critère comme étant fonction des contraintes et de déformations plastiques cumulées lors de l'histoire de chargement. On n'envisagera pas de tels cas lors de ce cours. On se réduira donc au cas **élastique parfaitement plastique** pour lequel le critère n'évolue pas (dans un essai de compression/traction en contraintes homogènes, la contrainte "plaonne" une fois la contrainte de rupture atteinte).

Une question reste - lorsque le critère de rupture est atteint: $f(\sigma_{ij}) = 0$, comment les déformations plastiques évoluent-elles ? Ici, on doit s'en remettre à l'expérience afin de développer une formulation mathématique consistante qui permette d'effectuer des calculs (et de reproduire assez bien les résultats expérimentaux).

2.5.1 Ecoulement plastique / Analogie avec la friction

Pour un matériau parfaitement plastique associé, le taux de déformations plastiques $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ est considéré comme étant proportionnel au gradient du critère de rupture

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.3)$$

à savoir selon le gradient de la "courbe" de niveau définit par $f = 0$! λ est appelé multiplicateur plastique ([1/T] suivant la définition ci-dessus). C'est une quantité scalaire - qui gouverne la magnitude des déformations plastiques. On verra qu'il dépend des conditions aux limites, de l'équilibre et de la géométrie du problèmes.

Les expériences confirment que l'équation (2.3) n'est pas "trop" fausse pour beaucoup de matériaux (métaux, plastiques). Afin de comprendre pourquoi une telle forme mathématique est intéressante, faisons un détour par le déplacement d'un bloc sur une table ayant une friction non-nulle.

²Pour un sol peu consolidé, une telle limite peut être quasi-nulle!

³hardening vs softening en anglais

2.5.1.1 Analogie avec la friction

Afin de l'intuiter physiquement, il est intéressant de discuter le cas du mouvement d'un bloc de masse M reposant sur un plan prenant en compte la friction entre ce bloc et le plan. On notera μ le coefficient de friction; F_x , F_y les forces horizontales appliquées sur le bloc; \dot{u}_x et \dot{u}_y les vitesses de déplacement correspondantes. Afin de faire bouger le bloc, il convient que

$$\sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \mu Mg$$

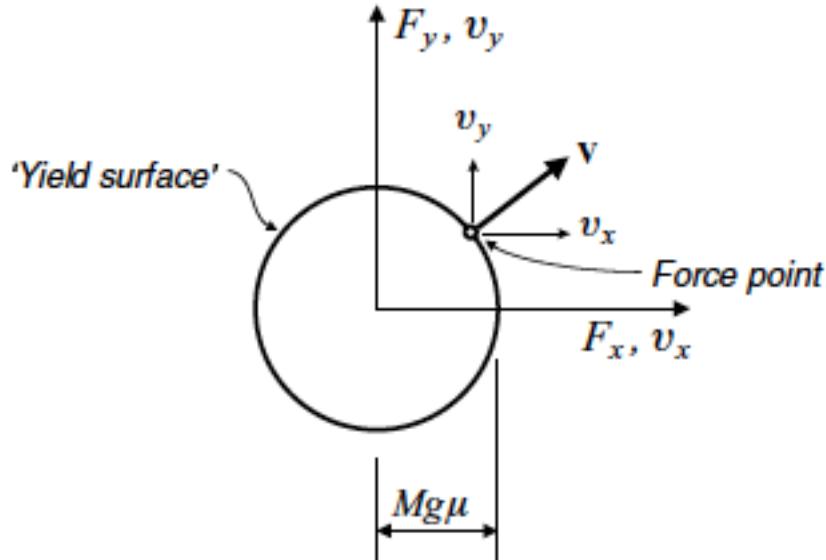
que l'on peut re-écrire

$$F_x^2 + F_y^2 = (\mu Mg)^2$$

Cette expression est "similaire" à un critère de rupture ($f \leq 0$) (sauf qu'il est écrit en force). Si $F_x^2 + F_y^2 < (\mu Mg)^2$, il n'y a pas de mouvement, sinon on a la contrainte frictionnelle $F_x^2 + F_y^2 = (\mu Mg)^2$ pendant le glissement. Dans l'espace des forces horizontales (F_x, F_y), le critère de rupture est donc un cercle. On intuise facilement que la direction du mouvement de glissement est aligné avec la résultante des forces horizontales, i.e.

$$\frac{\dot{u}_x}{\dot{u}_y} = \frac{F_x}{F_y}$$

Si on représente graphiquement les choses on voit que le vecteur de vitesse de glissement est "normal" au critère de rupture:



On notera en passant, qu'à vitesse de déplacement constante, le bloc est à l'équilibre (somme des forces = 0, accélération nulle).

Il est intéressant de définir le taux de travail plastique \dot{W}_p , qui correspondant à la puissance dissipée:

$$\dot{W}_p = F_x \dot{u}_x + F_y \dot{u}_y$$

On voit que \dot{W}_p n'est d'autre que le produit vectoriel de la force horizontale avec le vecteur de vitesse de glissement. Il est donc "maximal" pour le cas où ce dernier est exactement aligné avec la résultante des forces (normal au critère de rupture).

Faisons maintenant l'expérience suivante, on prescrit la vitesse de glissement (\dot{u}_x et \dot{u}_y). Quelles sont les forces F_x , F_y correspondantes? On l'obtient en trouvant le point sur le cercle de rupture tel que la résultante est alignée avec le vecteur vitesse de glissement.

Le fait que la déformation plastique est telle que le taux de travail plastique $\dot{W}_p = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p$ (qui est lié à l'énergie dissipée) est maximal (au cours de la déformation) est lié à la loi d'écoulement associé normale eq. (2.3).

Remarque 1 Le fait que \dot{W}_p est maximal n'aide pas vraiment à déterminer le multiplicateur plastique λ ;(

Remarque 2 L'hypothèse du travail plastique maximale / normalité de la déformation plastique par rapport à la surface de rupture ne repose que sur une intuition. Elle n'est pas forcément vérifiée pour certains matériaux. Notamment les milieux granulaires / sols ne sont pas très bien modélisé par un critère de Mohr-Coulomb associé (top de dilatance cf. exo) - il convient alors de "relâcher" cette hypothèse de normalité et de prendre un critère dit non-associé avec un potentiel d'écoulement plastique g différent du critère f : on écrit

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}$$

Remarque 3 Pour un matériau élastique parfaitement plastique, dans ce cas les déformations plastiques peuvent augmenter infiniment sans augmentation des contraintes (réponse plate dans la courbe effort-déformation). Le plateau plastique implique qu'il n'existe pas de relation unique entre contraintes et déformation plastique. En d'autre termes, la connaissance des contraintes n'implique pas connaissance des déformations. En revanche, si les déformations sont imposées alors on peut calculer les contraintes. On voit donc que pour un matériau parfaitement plastique, suivant le type de conditions aux limites il n'est pas forcément possible de déterminer le multiplicateur plastique (cela dépend aussi de la géométrie). En revanche, le comportement plastique parfait permet d'utiliser les théorèmes de l'analyse limite pour estimer les charges de ruines des structures géotechniques (comme on va le voir dans les semaines à venir).

2.5.2 Ecoulement plastique

Dans le cas général, le multiplicateur plastique λ dépend des conditions aux limites, de la géométrie et du critère de plasticité. On l'obtiendra en prenant en compte en plus de l'équilibre quasi-statique, l'inégalité introduite par la plasticité, le fait que les contraintes ne peuvent pas excéder le critère:

$$\begin{aligned} f(\sigma_{ij}) < 0 & \quad \dot{\epsilon}_{ij}^p = \lambda = 0 \\ f(\sigma_{ij}) = 0 & \quad \dot{\epsilon}_{ij}^p \neq 0 \quad \lambda > 0 \end{aligned}$$

L'introduction de la loi de comportement élastoplastique (en taux) $\dot{\sigma}_{ij} = c_{ijkl}(\dot{\epsilon}_{ij} - \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}})$ dans l'égalité $f(\sigma_{ij}) = 0$ permet de déterminer le critère. Notamment, en l'absence d'écrouissage, les contraintes si elles satisfassent le critère de rupture $f(\sigma_{ij}) = 0$, alors elles doivent dans y rester, en d'autres termes $\dot{f} = 0$, soit (en l'absence d'écrouissage):

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} = 0$$

on peut donc en déduire λ en fonction de σ_{ij} , $\dot{\epsilon}_{ij}$ f et g . Cela se simplifie beaucoup pour des critères de Tresca ou Mohr-Coulomb associés (cf. Exercice semaine 1).

Chapter 3

Caractérisation in-situ

“La connaissance des conditions de sol en géotechnique dépend de l’importance et de la qualité des reconnaissances géotechniques. Cette connaissance et le contrôle de la qualité de réalisation des travaux sont plus importants pour satisfaire les exigences fondamentales que la précision des modèles de calcul et des coefficients partiels.” (Introduction Eurocode).

3.1 Tests in-situ

3.1.1 Scissomètre

Le scissomètre est une sonde à ailettes (quatre pales) solidaire d'un train de tige. Il est applicable dans les sols fins permet de réaliser un essai de cisaillement non drainé in-situ (on obtient donc une résistance au cisaillement). Une fois enfoncé dans le sol, le scissomètre exerce un couple de torsion sur le sol, jusqu'à la rupture de ce dernier, autour de la sonde.

Remarques pour la mise en place du scissomètre :

- Usuellement, la hauteur du scissomètre vaut le double de son diamètre, soit $H = 2D$
- Refoulement du sol à la mise en place (délai de ~ 5 minutes avant l'essai)
- Écart minimal de 0.5m entre chaque essai
- La rotation du moulinet peu précise (et l'effet de torsion déforme partiellement les tiges), il est donc impossible d'obtenir un module de déformation du sol.
- La surface de rupture en phase initiale de sollicitation demeure inconnue, mais après cette dernière se stabilise autour du cylindre
- Résistance au cisaillement remanié (après 25 tours)

Approche cinématique

Pour obtenir une relation entre le moment à la rupture et la cohésion non-drainée, on effectue une approche de type cinématique : on équilibre la puissance des efforts extérieurs avec la puissance dissipée interne (résistance maximale) du sol.

La puissance des efforts extérieurs est exprimée selon l'équation 3.1. Elle est égale (selon le PPV) à la

la puissance dissipée maximale (surface de rupture cylindrique avec en plus les surfaces supérieures et inférieures) composée de la puissance dissipée sur la surface supérieure (S. top, équation 3.3) et inférieure (S. bot) , ainsi que la surface externe (S. perim, équation 3.4).

$$P_{ext}(\dot{\psi}) = M\dot{\psi} \quad (3.1)$$

$$P_{dissipée}(\dot{\psi}) = P_{dissipée}^{S,top} + P_{dissipée}^{S,bot} + P_{dissipée}^{S,perim} \quad (3.2)$$

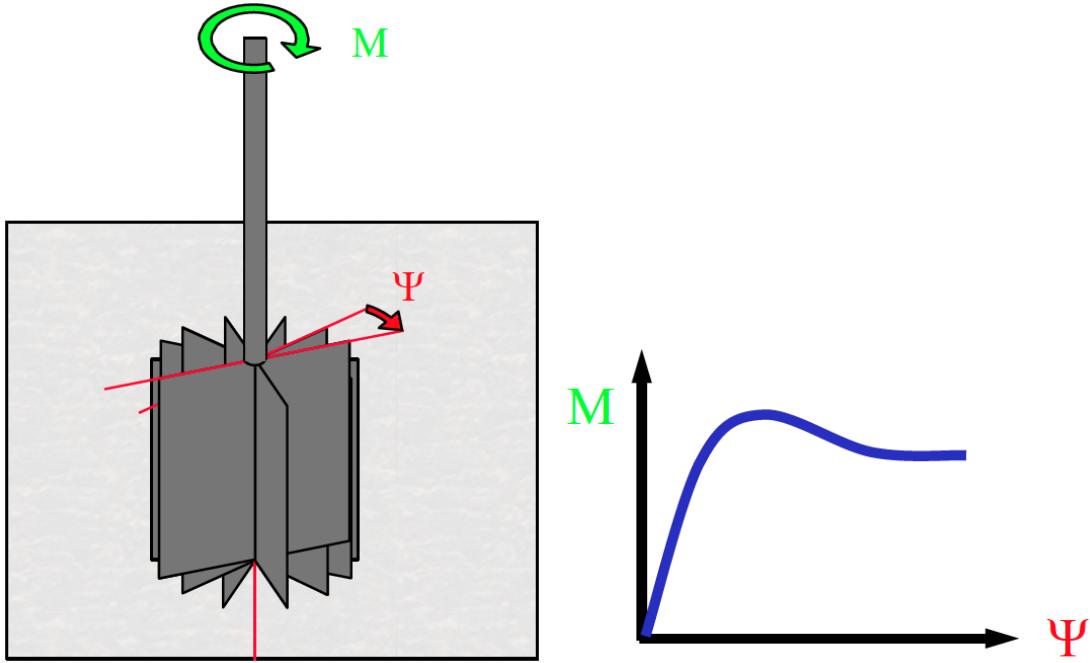


Figure 3.1: Schéma du test au scissomètre (gauche) et courbe rotation - moment mesuré correspondante (droite).

En supposant que la surface de rupture correspond au cylindre total extérieur (hauteur H et rayon R), et que la résistance de cisaillement du sol est atteinte $\tau \approx c_u$, on a donc pour les surfaces supérieures et inférieures un mouvement du type $\dot{\theta}_\theta = r\dot{\psi}$, donc la puissance unitaire dissipée est $c_u r \dot{\psi}$ que l'on intègre pour obtenir

$$\begin{aligned}
 P_{dissipée}^{S,top} &= \int_0^R \int_0^{2\pi} c_u r \dot{\psi} r dr d\theta \\
 &= 2\pi \dot{\psi} c_u \frac{R^3}{3} \\
 &= P_{dissipée}^{S,bot}
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

la puissance dissipée sur le périmètre externe de la surface de rupture correspond à l'intégrale le long du périmètre de la puissance dissipée unitaire $c_u R \dot{\psi}$:

$$\begin{aligned}
 P_{dissipée}^{S,perim} &= \int_0^H \int_0^{2\pi} c_u R \dot{\psi} R d\theta dz \\
 &= 2\pi \dot{\psi} c_u H R^2
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

On obtient donc la puissance dissipée totale $P_{dissipée}(\dot{\psi}) = 2\pi R^2 c_u (H + \frac{2R}{3}) \dot{\psi}$ qui en appliquant le principe des puissances virtuelles doit être égale à la puissance des efforts extérieurs:

$$P_{dissipée}(\dot{\psi}) = P_{ext}(\dot{\psi})$$

On obtient donc au final la relation entre le moment maximal et la résistance non-drainée (avec $D = 2R$ le

Figure 3.2: Pénétromètres

diamètre de la tige):

$$M = \pi \frac{D^2}{2} \left(H + \frac{D}{3} \right) c_u$$

$$c_u \approx \frac{6M}{\pi D^2 (3H + D)}$$

En pratique il existe des corrections car l'essai est sensible (notamment à la vitesse de rotation etc.)... du type

$$c_u = f \times c_u^{FVT}$$

avec f un coefficient dépendant de l'indice de plasticité du sol (entre 1 et 0.6).

3.1.2 CPT/U - Pénétromètre statique

Le Cone Penetration Test (CPT) détermine la résistance qu'oppose le sol à l'enfoncement d'un cône. Il existe plusieurs types de pénétromètres (voir figure 3.2). Le pénétromètre est enfoncé dans le sol à une vitesse d'environ 2cm/s et les mesures d'efforts sont continues. On distingue les efforts sur la pointe du pénétromètre Q_p et les efforts de frottements du pénétromètre Q_f .

$$f_s = Q_f / (\pi H D)$$

$$q_c = Q_p / S_c$$

$$c_u \approx \frac{(q_c - \sigma_{vo})}{N_c}$$

f_s résistance au frottement

q_c résistance unitaire de pointe

S_c surface de pointe

Pour un pénétromètre à cône mobile, les mesures sont indépendantes de q_c . Le pénétromètre à point électrique quant à lui donne des mesures indépendantes de Q_f et Q_p (via les cellules de chargement), il faut donc répéter les mesures à la même profondeur et le dispositif de fonçage doit être centré.

Les mesures obtenues du pénétromètre permettent d'obtenir un profilage continue du sol. La pression de pore (CPTU) u peut être ajoutée, ainsi que la mesure de volume V_s . Il faut toutefois prendre garde avec la mesure de u car elle doit être prise dans la nappe, donc jamais dans les premiers mètres du sol. De plus, il faut prendre en compte la dilatation de certains terrains. Il est aussi important de considérer le passage entre couches (par exemple imperméable - sable) car il faut un temps d'équilibrage de pression dans la chambre de mesure. Il existe une importante "banque de corrélation" pour obtenir la lithologie et les paramètres du sol.

3.1.3 SPT - pénétromètre dynamique

Le Standard Penetration Test (SPT) consiste à faire pénétrer répétitivement des tiges ou tubes métalliques dans le sol, par battage. Le but est d'estimer le nombre de coups de mouton correspondant à un enfoncement (en cm) donné.

Le SPT est un type de pénétromètre dynamique. Un tube échantillonneur est utilisé pour le battage. Pour réaliser un essai de battage SPT, il faut prendre en compte les remarques suivantes:

- Il faut compter le nombre de coups pour s'enfoncer de 30cm, les 15 premiers centimètres sont négligés (hauteur totale d'enfoncement: 45cm).
- L'essai permet d'avoir des informations qualitatives sur le sol.

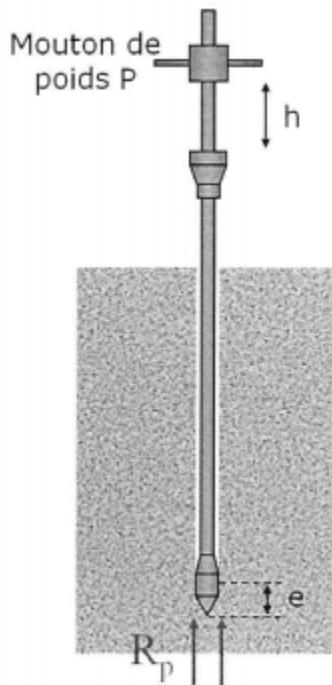


Figure 3.3: Essai de pénétration dynamique

- L'essai est surtout utilisé dans les sols sableux où il donne une bonne indication de la compacité du sol, pour autant qu'on ne se trouve pas sous la nappe phréatique
- Essai adapté pour les sols sableux, il met en valeur
 - L'homogénéité (ou non) du site
 - L'épaisseur des couches (toit du rocher)
 - Des cavités si elles sont présentes
- parfois utilisation de formule de battage empirique (q_c à partir de $q_{dynamique}$)

À partir des données recueillies, des courbes nombre de coups/profondeur permettent de mieux comprendre la disposition des couches.

L'évaluation du nombre de coups peut être sujette à modification si les sables sont saturés, très fins ou limoneux, sous la nappe et que le nombre de coups N' excède 15:

- Terzaghi et Peck recommande de prendre $N_{SPT} = 0.5N' + 7.5$
- Bazara propose pour $N' < 15$: $N_{SPT} = 0.6N'$

Une correction de profondeur est également recommandée:

$$N_{SPT} = N' \frac{350}{70 + \gamma \cdot D}$$

D: profondeur [m]

N': nombres de coups mesurés

γ : densité apparente en kN/m^3 (γ si sous la nappe); $\gamma D \geq 280 \text{kN/m}^2$

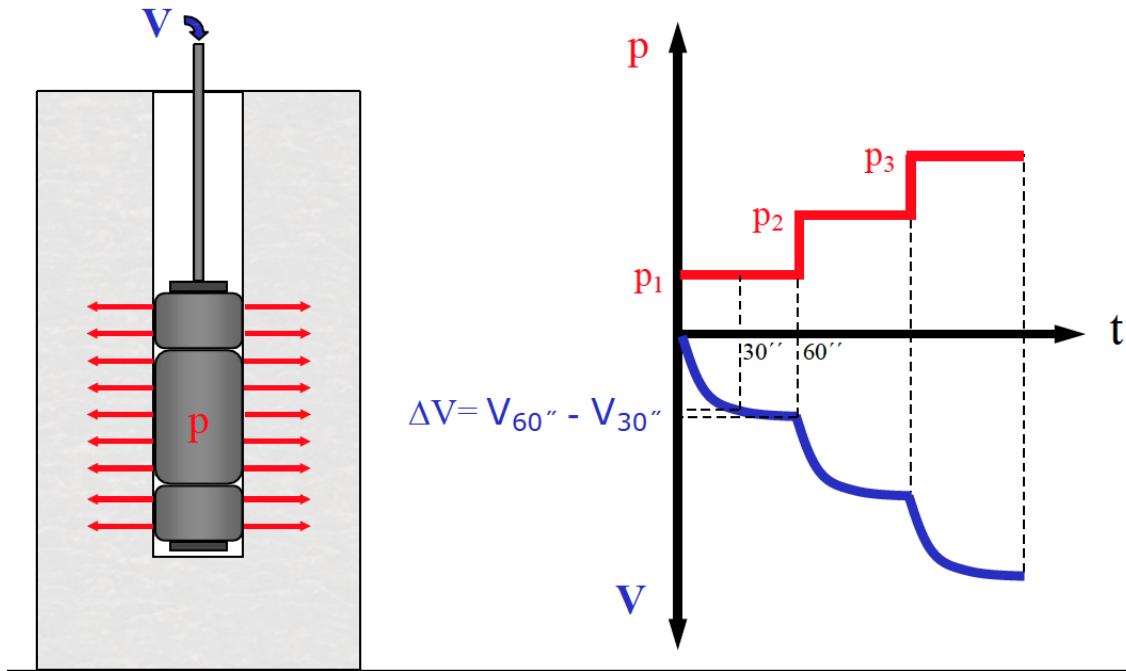


Figure 3.4: Pressiomètre: schéma de la sonde (gauche), et schématique de la mesure (pression constante par paliers, mesure du volume).

3.1.4 Pressiomètre

L'essai pressiométrique charge latéralement son environnement, une fois la sonde insérée dans la zone à étudier. La sonde est recouverte d'une membrane en caoutchouc extensible latéralement, qui infligera une pression constante et uniforme sur la longueur de l'appareil. Cet essai s'effectue donc dans un forage préalablement effectué, et on peut faire l'essai à différentes profondeurs.

Il existe de nombreuses formules pour établir la capacité portante de fondations superficielles ou profondes directement depuis les paramètres déterminés au pressiomètre (en France notamment).

Sur le schéma (cf figure), on peut remarquer la présence de trois cellules: deux cellules de garde aux extrémités et la cellule centrale dite cellule de mesure. L'intérêt des cellules de garde est d'assurer une bonne répartition cylindrique des contraintes et des déformations au niveau de la cellule de mesure (i.e de minimiser les perturbations aux extrémités).

L'essai s'effectue de façon suivante (pour une profondeur donnée):

1. les cellules de garde sont mises en pression, puis la cellule centrale.
2. Des paliers en pression ($\sim 0.25 \text{ MPa}$) sont ensuite effectués. En général une dizaine. Pour chaque palier de pression, on effectue une série de mesures des déformations volumiques de la sonde centrale au cours du temps. On reste à minima 1 minute par palier.

Il est également recommandé de procéder après chargement à un déchargement par paliers comme pour la mise en pression. Différentes corrections due à la compréssibilité de l'appareil etc. sont généralement effectuées.

Un essai pressiométrique sert la plupart du temps à définir la pression limite (p_l) mais aussi un module de déformation (E). L'interprétation de l'essai s'effectue en traçant deux courbes:

1. la courbe pressiométrique en portant en abscisse le palier de pression p et en ordonnée la déformation volumique de la chambre en fin de palier ($V_{60''}$)
2. la courbe dite de "fluage" en portant en abscisse le palier de pression p et en ordonnée la différence $\Delta V = V_{60''} - V_{30''}$ entre la déformation volumique de la chambre en fin de palier ($V_{60''}$) et celle après 30'' de charge.

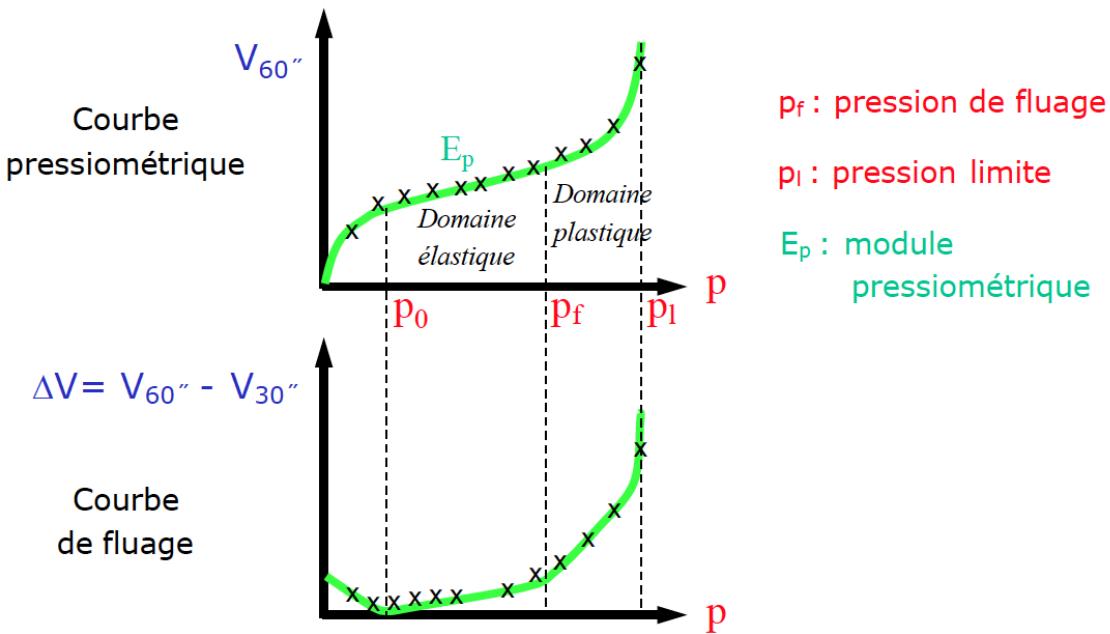


Figure 3.5: Interprétation de l'essai pressiométrique: Courbe du volume (après 1 minute de charge) en fonction de la pression, et courbe de fluege (variation du volume de la chambre vs palier de pression). L'analyse de l'essai permet d'obtenir un module élastique (linéarité de la courbe pressiométrique dans le domaine élastique), une pression de fluege p_f (correspondant au début de la plasticité) et une pression limite p_l . Cette dernière est souvent utilisée pour obtenir des corrélations (capacité portante des fondations profondes notamment).

Après un rétablissement des conditions initiales dans le terrain (correspondant à la pression de "recompaction" p_o), le sol a d'abord un comportement essentiellement élastique (domaine pseudo-élastique sur la courbe pressiométrique) puis progressivement plastique et différée (entre p_f la pression de début de fluege et la pression limite p_l). L'essai est souvent répété à plusieurs profondeurs dans le forage. Il est ensuite courant de reporter les principaux résultats (module, pression limite) en fonction de la profondeur.

Cet essai permet de déterminer essentiellement deux paramètres du sol d'une manière robuste:

- la résistance au cisaillement du sol - via la pression limite p_l
- un module de déformation, le module pressiométrique typiquement noté E_M (M pour Ménard l'inventeur de l'essai) à partir de la pente de la courbe pressiométrique dans le domaine élastique.

De très nombreuses règles de dimensionnement et méthodes de calculs sont basées sur les essais pressiométriques (calculs de capacité portante, calculs de tassements etc.).

3.1.4.1 Modélisation mécanique

On détaillera ici une modélisation mécanique permettant de relier les observables avec les propriétés mécaniques recherchées. La résolution proposée s'effectue en coordonnées polaires (géométrie cylindrique), selon les hypothèses suivantes:

1. Axisymétrie (indépendant de θ)
2. La hauteur du pressiomètre est bien plus grande que le rayon initiale, $H \gg R_w$ (indépendant de z)

Résolution

Conditions limites à $r = R_w$

$$\begin{aligned} t_i &= \sigma_{ij} n_j \\ \sigma_{rr} &= p \\ \sigma_{r\theta} &= 0 \end{aligned}$$

Conditions limites à l'infini $\lim_{r \rightarrow +\infty} u_i = 0$. Attention, bien sur, des contraintes initiales existent à l'infini dans le sol.

On a au vue de la géométrie et symmetrie cylindrique

$$\begin{aligned} u_r &= u_r(r) \\ u_\theta &= 0 \end{aligned}$$

Rappel de la définition du tenseur des petites déformations pour

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{du_r}{dr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{u_r}{r} \\ \varepsilon_{r\theta} &= 0 \end{aligned}$$

Équations à l'équilibre en coordonnées polaires (avec indépendance selon θ)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} &= 0 \quad \text{selon } e_r \\ \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial r} - \frac{2\sigma_{\theta r}}{r} &= 0 \quad \text{selon } e_\theta \end{aligned}$$

Élasticité du sol

On note $\Delta\sigma_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0$, et le module pressiométrique $2G = \frac{E}{1+\nu}$.

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_{rr} &= \sigma_{rr} - \sigma_n^0 = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{rr} + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta}) \\ \Delta\sigma_{\theta\theta} &= \sigma_{\theta\theta} - \sigma_n^0 = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{\theta\theta} + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta}) \\ \Delta P &= P - P^0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_{rr} - \Delta\sigma_{\theta\theta} &= \frac{E}{1+\nu} (\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\theta\theta}) \\ &= \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{du}{dr} - \frac{u}{r} \right) \end{aligned}$$

En réintroduisant ces valeurs dans l'équation d'équilibre, l'équation 3.5 peut-être résolue

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{du_r}{dr} - \frac{u_r}{r^2} &= 0 \\ u_r(r) &= \frac{c_1}{r} + c_2 r \end{aligned} \tag{3.5}$$

c_1 et c_2 sont des constantes d'intégration, avec $c_2 = 0$ car, lorsque r tend vers l'infini, $u(r \rightarrow \infty) = 0$. En utilisant la condition limite $\Delta\sigma_{rr}(r = R_w) = \Delta P$, on obtined $c_1 = \frac{-R_w^2 \Delta P}{E}(1+\nu)$. Les variations de contraintes due à la pression appliquée sont donc

Figure 3.6: Zone plastique et élastique

$$\begin{aligned}\Delta\sigma_{rr} &= \Delta P \times \left(\frac{R_w}{r}\right)^2 \\ \Delta\sigma_{\theta\theta} &= -\Delta P \times \left(\frac{R_w}{r}\right)^2 \\ \Delta\sigma_{rr} &= -\Delta\sigma_{\theta\theta}\end{aligned}$$

En regardant maintenant la variation de volume du puit:

$$\begin{aligned}\Delta V &= V - V_0 \\ V_0 &= H\pi R_w^2 \\ V &= H\pi(R_w(1 + \delta))^2 \\ \delta &= \frac{u_r(r = R_w)}{R_w} = \frac{\Delta P}{2G} = \frac{\Delta V}{V_0}\end{aligned}$$

on voit donc que **dans l'hypothèse d'un comportement élastique du sol**, le pressiomètre mesure donc le module élastique de cisaillement G (via la pente de la courbe pression volume). Dans la pratique, on reporte un module préssiométrique

$$E_m = 2G(1 + \nu)$$

en prenant $\nu = 0.3$ (i.e on mesure $2G$ et on reporte E_m).

Plastification

Les directions principales sont toujours e_r et e_θ ; et dans la zone plastique, $r \in [R_w; R_p]$.

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} &= \Delta\sigma_{rr} - \Delta\sigma_{\theta\theta} = 2c_u \\ \frac{\partial\Delta\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{2c_u}{r} &= 0 \\ \Delta\sigma_{rr} &= c_1 \ln \frac{1}{r} + c_2\end{aligned}$$

Rappel des conditions limites (équation 3.6) pour trouver $\Delta\sigma_{rr}$ et $\Delta\sigma_{\theta\theta}$.

$$\begin{aligned}\Delta\sigma_{rr} &= \Delta P \quad \text{en } r = R_w \\ \Delta\sigma_{rr} &= c_u \quad \text{en } r = R_p\end{aligned}\tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}\Delta\sigma_{rr} &= c_u + 2c_u \ln \frac{R_p}{r} \\ \Delta\sigma_{\theta\theta} &= -c_u + 2c_u \ln \frac{R_p}{r}\end{aligned}$$

À terme est obtenu l'équation 3.7. Un lien existe également entre la variation de volume et c_u .

$$\begin{aligned}\frac{R_p}{R_w} &= e^{\frac{\Delta P - c_u}{2c_u}} \\ \frac{\Delta V}{V} &= \frac{c_u}{G} \left(\frac{R_p}{R_w}\right)^2\end{aligned}\tag{3.7}$$

- liens $p_L - p_o$ et c_u empiriques
- début de la plastification $p_f = p_l + c_u \ln \Delta V / V$

3.2 Autres tests

3.2.1 Essai à la plaque

3.2.2 Dilatomètre

3.2.3 Essais hydrauliques

Chapter 4

Analyse limite et calculs à la rupture pour la géotechnique

La vérifications des états limites ultimes (ELU - ULS) reposent sur la détermination de(s) la charge(s) maximale supportable par une structure (dans notre cas, une fondation, un mur de soutènement etc.). Dans ce cadre, l'analyse limite est très couramment employée, notamment en géotechnique. Elle repose sur un modèle rigide plastique du sol (en conditions drainées ou non-drainées selon que l'analyse est effectuée à long ou court terme). Les formules “classiques” de capacité portante des fondations ont été obtenues par cette méthode (avec plus ou moins d'approximations), idem pour la stabilité des talus. De plus, des nouveau logiciel éléments finis (e.g. OptumG2) permettent maintenant de faire directement de l'analyse limite numérique et donc d'obtenir des bornes des charges maximales pour des configurations complexes rapidement (sans devoir résoudre le problème élastoplastique temporel complet). L'idée de ces notes est d'introduire les méthodes d'analyse limite pour la géotechnique. Réferez vous au cours Mécanique des structures pour GC (Civil 223) et au cours de Mécanique des milieux continus (Civil 225) pour plus de détails sur les concepts de bases.

Conventions En géotechnique / mécanique des sols, les contraintes sont typiquement compressives et donc en pratique, la convention est de prendre les contraintes positives en compression. En ce qui concerne les déformations, deux conventions sont possibles: i) soit on garde une convention d'extension positive mais cela implique de mettre un signe – dans les lois de comportements (relation contraintes - déformation), soit ii) on utilise la convention que les déformations de “contraction” sont positives (i.e. extension négative). On utilise la deuxième convention ici. En résumé:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} > 0 && \text{en compression} \\ \epsilon_{ij} > 0 && \text{en contraction}\end{aligned}$$

On notera donc que comme $\epsilon_{ij} > 0$ en contraction, les déplacements seront positif dans le sens opposé du système de coordonnée choisi (en pratique, on retombera sur ses pieds avec un peu de sens de physique). Egalement, pour les tractions il convient de prendre la normale “rentrante” au solide.

4.1 Le problème rigide-plastique

Soit un domaine V de surface S , le problème rigide-plastique consiste en

- les équations d'équilibre (en négligeant les efforts inertIELS - approche quasi-statique)

$$\sigma_{ij,j} - b_i = 0$$

où le signe moins devant les forces de volume est du à la convention de contraintes positives en compression. On utilise ici la convention de sommation sur les indices répétés, et la notation suivantes pour les dérivées partielles

$$h_{,j} = \partial h / \partial x_j$$

b_i est une force de volume (en pratique le poids du sol). Le tenseur des contraintes est symétrique $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ (conservation du moment angulaire).

- En tout point de V , le champ de contraintes est continument différentiable. Notons que des surfaces de discontinuité (de normale n_j) peuvent exister, mais le vecteur contraintes $T_i = \sigma_{ij}n_j$ doit être continu à travers de telles surfaces, soit

$$(\sigma_{ij}^- - \sigma_{ij}^+) n_j = [[\sigma_{ij}]] n_j = 0$$

où $[[\sigma_{ij}]]$ désigne donc le saut du champ de contraintes à travers d'une telle surface de discontinuité.

- les conditions aux limites en tractions et déplacement imposés:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}n_j &= T_i^d && \text{donnée sur } S_{t_i} \text{ de normale } n_j \\ u_i &= u_i^d && \text{donnée sur } S_{u_i} \end{aligned}$$

avec non intersection de S_{t_i} et S_{u_i} . On notera que par la suite on se restreint aux cas où les déplacements imposés ne varient pas en temps $\dot{u}_i^d = 0$, où l'on note la dérivée temporelle $\partial u / \partial t = \dot{u}$. On notera aussi S_t pour la surface où les tractions / efforts sont imposés.

- Le tenseur des déformations

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$$

On notera que la convention de mécanique des sols implique ensuite des déplacements positifs dans le sens contraire du système de coordonnées. Alternativement on peut écrire $\epsilon_{ij} = -\frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$.

- Equations de compatibilité - ici pour l'élasticité plane:

$$\partial_{yy}\epsilon_{xx} + \partial_{xx}\epsilon_{yy} = 2\partial_{xy}\epsilon_{xy}$$

- Soit, le critère de plasticité f (et le potentiel d'écoulement plastique g). La loi de comportement rigide plastique s'écrit

$$\begin{aligned} f(\sigma_{ij}) &< 0 & \dot{\epsilon}_{ij} &= 0 \\ f(\sigma_{ij}) &= 0 & \dot{\epsilon}_{ij} &= \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \end{aligned} \tag{4.1}$$

où l'on note la dérivée temporelle $\partial u / \partial t = \dot{u}$. Le cas de la plasticité associée correspond à $f = g$. On se restreint à ce cas ici. λ est le multiplicateur plastique ($\lambda \geq 0$) (sans dimension car f a une dimension de contraintes). On voit donc que

$$\lambda f(\sigma_{ij}) = 0$$

Dans le cas de la plasticité associée ($f = g$), les déformations plastiques sont orientées dans la direction normale de la surface de rupture.

Le modèle rigide-plastique néglige les déformations élastiques du milieu par rapport aux déformations plastiques: une hypothèse satisfaisante lorsque l'on veut étudier la ruine d'une structure.

On rappelle qu'en mécanique des milieux continus, on appelle un champ de contraintes σ_{ij} *statiquement admissible* si il vérifie les équations d'équilibres et les conditions aux limites en tractions. On appelle un champ de déplacement u_i *cinétiquement admissible* si il vérifie les conditions aux limites en déplacement et est régulier (i.e. ne crée pas d'ouverture ou de "trou" dans le domaine, en revanche des surfaces de glissement peuvent apparaître).

4.1.1 Principe des puissances virtuelles

Le principe des puissances virtuelles (PPV) est l'équivalent du principe des travaux virtuels écrit en vitesse. Soit \dot{u}_i , un champ de vitesses virtuelles cinématiquement admissibles, le principe des puissances virtuelles s'écrit (en quasi-statique - i.e. sans effet inertiel):

$$\mathcal{P}_{ext}(\dot{u}_i) = \mathcal{P}_{int}(\dot{u}_i)$$

où la puissance des efforts extérieurs $\mathcal{P}_{ext}(\dot{u}_i)$ est définie par:

$$\mathcal{P}_{ext}(\dot{u}_i) = \int_V (-b_i) \dot{u}_i \, dV + \int_{S_t} T_i^d \dot{u}_i \, dS$$

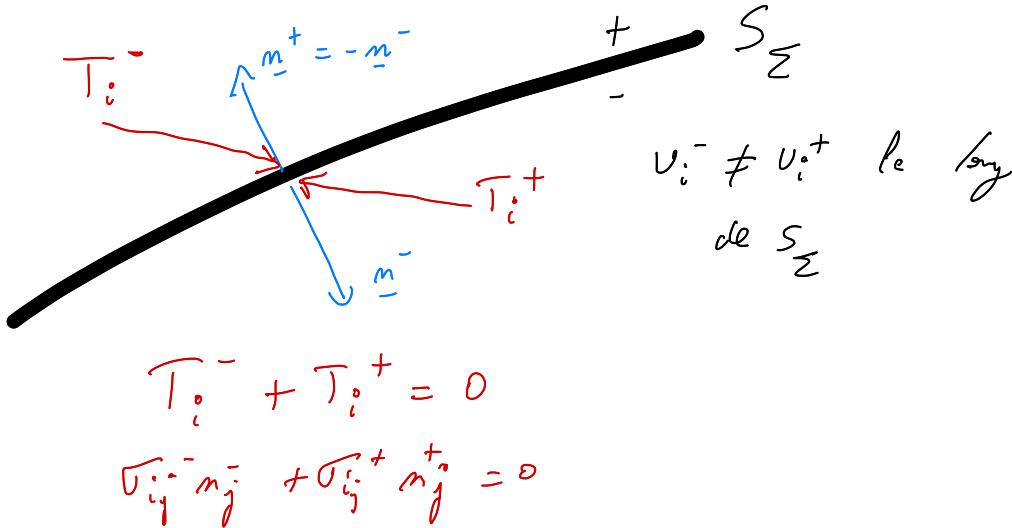


Figure 4.1: Example de surface de discontinuité de déplacement S_Σ pour laquelle le vecteur traction est continu: $T_i^+ + T_i^- = 0$ (soit $(\sigma_{ij}^- - \sigma_{ij}^+)n_j^- = 0$). La puissance unitaire dissipée le long d'une telle surface de discontinuité est donnée par $T_i^+(\dot{u}_i^+ - \dot{u}_i^-) = T_i^-(\dot{u}_i^- - \dot{u}_i^+)$.

[Attention le signe – dans l'expression précédente est due à la convention de contraintes positive en compression et la convention de déplacement positif dans la direction opposée au système de coordonnées] et la puissance intérieure par

$$\mathcal{P}_{int}(\dot{u}_i) = \int_{V/S_\Sigma} \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}(\dot{u}_i) \, dV + \int_{S_\Sigma} T_i^- (\dot{u}_i^- - \dot{u}_i^+) \, dS$$

On notera $[\dot{u}_i]$ le saut de vitesse virtuel à travers la surface S_Σ .

Note: on peut retrouver facilement le PPV en multipliant l'équation d'équilibre par \hat{u}_i et intégrant sur V et en utilisant la formule de Green ($\int_V h_{i,i} \, dV = \int_S h_i n_i \, dS$).

4.1.2 Théorèmes de l'analyse limite

- Théorème de la borne inférieure (lower bound theorem)

La ruine ne se produira pas si l'on peut trouver un état de contraintes qui réponde aux équations d'équilibre et aux conditions aux limites de traction (champ statiquement admissible - SA) et qui est partout inférieur ou égal au critère de rupture.

- Théorème de la borne supérieure (upper bound theorem)

La ruine doit se produire si, pour toute déformation plastique compatible (i.e. pour lequel le champ de déplacement est cinématiquement admissible), le taux de travail des forces externes est égal ou supérieur au taux de dissipation d'énergie interne.

[On notera que si il y a déformation, les contraintes correspondantes doivent satisfaire le critère de rupture. Des discontinuités de déplacement le long de bande de cisaillement sont possibles.]

4.1.3 Paramètres de chargement / notions des domaines de charges admissibles / Approches du calcul à la rupture

Pour un ouvrage géotechnique, les paramètres de chargement vont typiquement être : les charges à reprendre par les fondations, la hauteur d'une paroi / mur de soutenement, la force d'un ancrage, la longueur d'un clou etc.

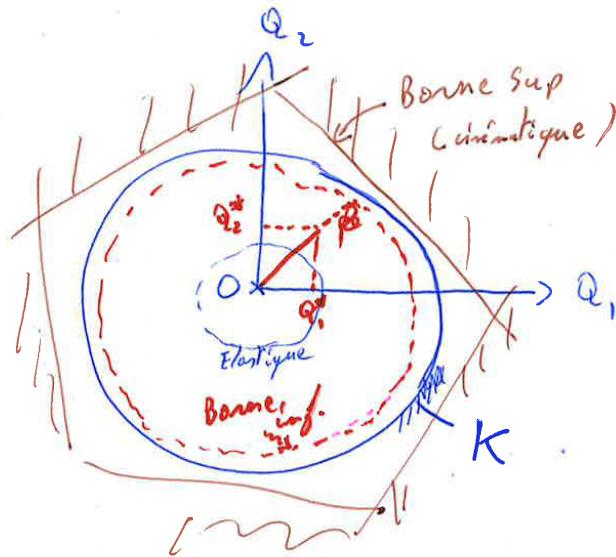


Figure 4.2: Domaine de stabilité K d'un ouvrage dans le cas de 2 paramètres de chargement (Q_1, Q_2). On bornera K par l'intérieur (approche statique) et l'extérieur (approche cinématique).

Le but d'un calcul ELU est de déterminer le domaine admissible de ces charges. Dénotons K ce domaine, si les charges (par exemple Q_1, Q_2) restent à l'intérieur de K l'ouvrage est stable. Evidemment le domaine K contient l'origine (charges nulles) - c.f. Figure 4.2.

Si les charges atteignent la frontière du domaine K , on arrive à la ruine de l'ouvrage: on ne peut pas avoir un champ de contraintes satisfaisant l'équation d'équilibre et le critère de plasticité simultanément en tout point de l'ouvrage. On parle alors de ruine plastique. On peut noter que ce domaine K va dépendre:

1. de la géométrie de l'ouvrage considérée
2. du critère de plasticité utilisé
3. du chargement

En revanche, il ne dépend pas du trajet de chargement (i.e. comment la ruine peut être atteinte) ni des conditions initiales (qui sont a priori telles que la structure est stable en étant non-chargée).

En pratique, on va approximer K par des approches par l'intérieur (dite statique) et par l'extérieur (dite cinématique).

- **Approche statique:** La philosophie de l'approche par l'intérieur consiste à trouver un champ de contraintes statiquement admissible en paramétrant le chargement par e.g. $(Q_1, Q_2) = \beta \times (Q_1^*, Q_2^*)$ (où Q_1^*, Q_2^* sont des valeurs des charges *petites* interieure à K) et ensuite maximiser β tout en vérifiant que le critère de plasticité $f(\sigma_{ij}) \leq 0$ en tout point du domaine. Ce faisant on obtient une borne inférieure K^- du domaine K (on démontre ce théorème plus loin dans ces notes).
- **Approche cinématique:** Cette fois ci, on va postuler un mécanisme de ruine, i.e. un champ cinématiquement admissible décrivant la ruine plastique de l'ouvrage. Ici en plus des paramètres de chargement, le mécanisme de ruine peut également être paramétrisé par un nombre fini de paramètres (exemple: l'inclinaison d'une surface de rupture). On va calculer la puissance dissipée liée à ce mécanisme de ruine en postulant que le champ de contraintes duquel dérivent les déformations vérifie le critère de plasticité. En utilisant le PPV, on va obtenir une borne supérieure K^+ du domaine K (on démontre ce théorème plus loin dans ces notes). Notons que dans le cas où le mécanisme de ruine est paramétré, il convient de minimiser la borne supérieure obtenue en fonction des paramètres du mécanisme de ruine choisi afin d'obtenir la borne supérieure la plus proche possible du domaine K (i.e. la plus petite).

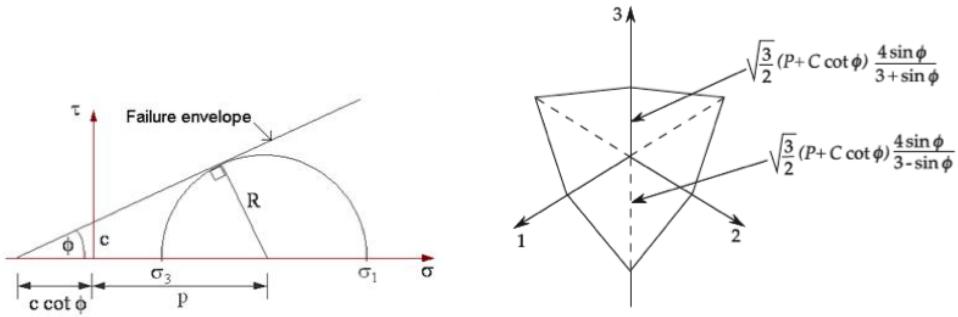


Figure 4.3: Critère de Mohr-Coulomb (diagramme de Mohr, dans le π -plan de l'espace de contraintes principales).

4.2 Critères de plasticité en mécanique des sols

Rappelons brièvement les critères de résistance/plasticité classiques utilisés en mécanique des sols (note: vous verrez des modèles de comportement plus réalistes et complets lors du cours de master de Géomécanique notamment).

[On notera en passant que l'approche du calcul à la rupture est basée sur le comportement rigide parfaitement plastique, soit sans écrouissage/radoucissement du critère de plasticité. Une approche qui est d'autant plus valable que le matériau présente une rupture ductile. Hypothèse réaliste pour les sols.]

4.2.1 Court terme versus long terme

4.2.1.1 Conditions drainées (long terme) - Mohr-Coulomb en contraintes effectives

A long terme, le modèle de Mohr-Coulomb (avec cohésion c' et angle de friction ϕ') est typiquement utilisé pour obtenir une estimation des charges ultimes (bien évidemment, des modèles plus complexes reproduisent mieux le comportement des sols - cf le modèle de Cam-Clay que vous verrez en Master). Dans le diagramme de Mohr, le critère de Mohr-Coulomb correspond à une droite. Il est important de souligner que ce critère de rupture à long terme est bien sur exprimé en fonction des contraintes effectives $\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - u\delta_{ij}$ (contraintes positives en compression). *Pour plus de simplicité (et de clarté) dans la suite de ces notes sur le calcul à la rupture, on ne fera pas de différence entre contraintes effectives et totales*¹. Dans l'espace des contraintes principales (contraintes positives en compression), $\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$, le critère s'écrit (Fig.4.3):

$$f(\sigma_{ij}) = (\sigma_I - \sigma_{III}) - (\sigma_I + \sigma_{III}) \sin \phi - 2C \cos \phi \quad (4.2)$$

On rappelle que pour la facette dont l'orientation correspond au point touchant la droite de Mohr Coulomb dans le diagramme de Mohr, notant σ_n la contrainte normale à cette facette et τ le cisaillement sur cette facette, le critère de Mohr-Coulomb s'écrit simplement:

$$f(\sigma_n, \tau) = \tau - c - \sigma_n \tan \phi \quad (4.3)$$

4.2.1.2 Conditions non-drainées (court terme) - Tresca en contraintes totales

A court terme, le critère de rupture d'un sol s'écrit en contraintes totales (à court terme i.e. en conditions non drainées, dans un essai tri-axial, qq soit l'état initial en augmentant la charge axiale, on obtient toujours le même cercle de Mohr en contraintes effectives). Le critère de Tresca (matériau purement cohérent, non-frictionnel) approxime correctement la rupture du sol à court terme (en *contraintes totales*):

$$f(\sigma_{ij}) = (\sigma_I - \sigma_{III}) - 2C$$

(et classiquement en mécanique des sols on note la cohésion non-drainée c_u).

¹la distinction sera implicite: long terme - critère de Mohr-Coulomb en contraintes effectives, court terme - critère de Tresca en contraintes totales.

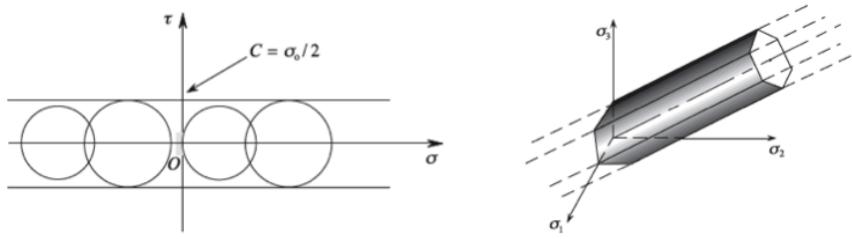
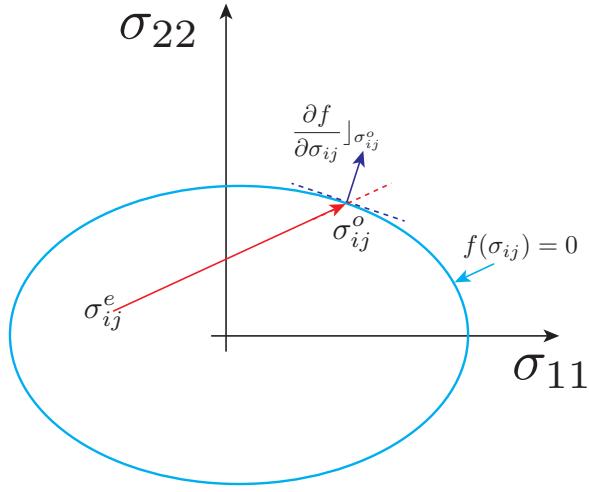


Figure 4.4: Critère de Tresca (diagramme de Mohr, & dans l'espace de 3 contraintes principales)

Figure 4.5: Surface de rupture ($f(\sigma_{ij}) = 0$) - exemple en 2D. Illustration de la propriété de convexité $(\sigma_{ij}^o - \sigma_{ij}^e) \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}|_{\sigma_{ij}^o} > 0$.

4.2.1.3 Propriété de convexité du critère de plasticité

Plan tangent à la surface de rupture Soit une courbe $f(x_1, x_2)$ (dépendant de 2 variables). Au point (x_1^o, x_2^o) , la normale à cette courbe est donnée par son gradient de f à ce point: $(\partial f / \partial x_1, \partial f / \partial x_2)^o$. Un développement de Taylor au premier ordre autour de (x_1^o, x_2^o) , donne:

$$f(x_1, x_2) = f(x_1^o, x_2^o) + (x_1 - x_1^o) \frac{\partial f}{\partial x_1}|_o + (x_2 - x_2^o) \frac{\partial f}{\partial x_2}|_o$$

la tangente à f au point (x_1^o, x_2^o) a pour équation $(x_1 - x_1^o) \frac{\partial f}{\partial x_1}|_o + (x_2 - x_2^o) \frac{\partial f}{\partial x_2}|_o = 0$, i.e. sous forme vectorielle (summation sur les indices répétés) $(x_i - x_i^o) \frac{\partial f}{\partial x_i}|_o = 0$. Le gradient de f en un point sur la surface donne la normale à celle-ci en ce point.

On peut facilement généraliser au cas d'une surface f fonction de n variables. Dans notre cas, $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ de telles sorte que le critère de plasticité $f(\sigma_{ij})$ ne dépend que de 6 valeurs du tenseur des contraintes (ou des 3 contraintes principales).

Convexité Il est plus simple de visualiser les choses en 2D. Prenons donc un exemple où le critère ne dépend que de σ_{11} et σ_{22} (cf Fig. 4.5). On voit que pour tout point σ_{ij}^e dans le domaine élastique ($f(\sigma_{ij}^e) < 0$), l'angle entre les vecteurs $(\sigma_{ij}^o - \sigma_{ij}^e)$ et $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}|_{\sigma_{ij}^o}$ est inférieur à $\pi/2$ (avec σ_{ij}^o un point sur la surface de rupture $f(\sigma_{ij}^o) = 0$), soit:

$$(\sigma_{ij}^o - \sigma_{ij}^e) \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}|_{\sigma_{ij}^o} > 0$$

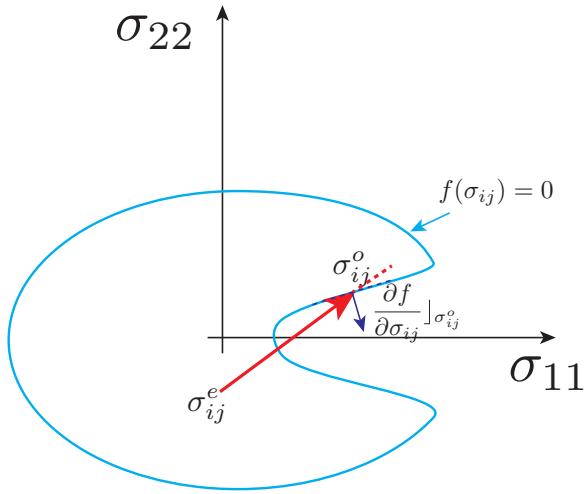


Figure 4.6: Example de surface concave où l'on peut avoir $(\sigma_{ij}^o - \sigma_{ij}^e) \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}|_{\sigma_{ij}^o} < 0$. Expérimentalement, on observe que les surfaces de rupture sont toujours convexes (cf Fig.4.5). Cela se comprend intuitivement physiquement.

Cette propriété découle de la “convexité” de la surface de rupture. On voit bien sur la Fig.4.6 que pour une surface concave cela n'est plus le cas en tout point. On observe expérimentalement que les critères de rupture ont la propriété de convexité (et on peut le comprendre physiquement en imaginant différents chemins de chargement). Cette propriété est importante pour démontrer les théorèmes de l'analyse limite (borne inférieure & supérieure de la charge limite d'une structure).

4.2.2 Déformations plastiques

Expérimentalement, on remarque que les déformations plastiques peuvent être dérivées d'un potentiel g lorsque le critère de plasticité est atteint, soit:

$$\begin{aligned} f(\sigma_{ij}) &< 0 & \dot{\epsilon}_{ij} &= 0 \\ f(\sigma_{ij}) &= 0 & \dot{\epsilon}_{ij} &= \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \end{aligned}$$

Pour les métaux etc., le potentiel g est bien approximé par le critère de rupture f : $f = g$ (postulat dit de Drucker qui n'est pas trop faux expérimentalement pour certains matériaux). On dit alors que la plasticité est “associée”. Cette hypothèse simplifie beaucoup les calculs et permet notamment de borner les charges limites. En revanche pour les sols, elle n'est pas nécessairement vérifiée expérimentalement (vous re-verrez cela lors de vos cours de Master). Pour le critère de Mohr-Coulomb, l'hypothèse $f = g$ implique que les déformations plastiques augmentent toujours de volume (alors que le comportement des sols est plus complexe et dépend de la pression de pré-consolidation). Néanmoins, il est usuel pour les calculs à la rupture (afin de vérifier les ELUs) de faire les calculs sous l'hypothèse de la plasticité associée: $f = g$. Les bornes obtenues avec cette hypothèse semblent également valable pour le cas non-associé ($f \neq g$) même si aucune preuve mathématique formelle n'existe.

4.2.2.1 Mohr-Coulomb - dilatance

Prenons le cas du critère de Mohr-Coulomb et raisonnons dans le repère des contraintes principales (en 2D). Pour un critère associé ($f = g$), les déformations plastiques principales seront également dans le même repère. En utilisant eq.(4.2) et (4.1) on a pour les déformations plastiques principales:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_I &= \lambda(1 - \sin \phi) \\ \dot{\epsilon}_{III} &= \lambda(-1 - \sin \phi) \end{aligned}$$

$$P_{\text{dissipatif}} = T_i \cdot (u_i^- - u_i^+)$$

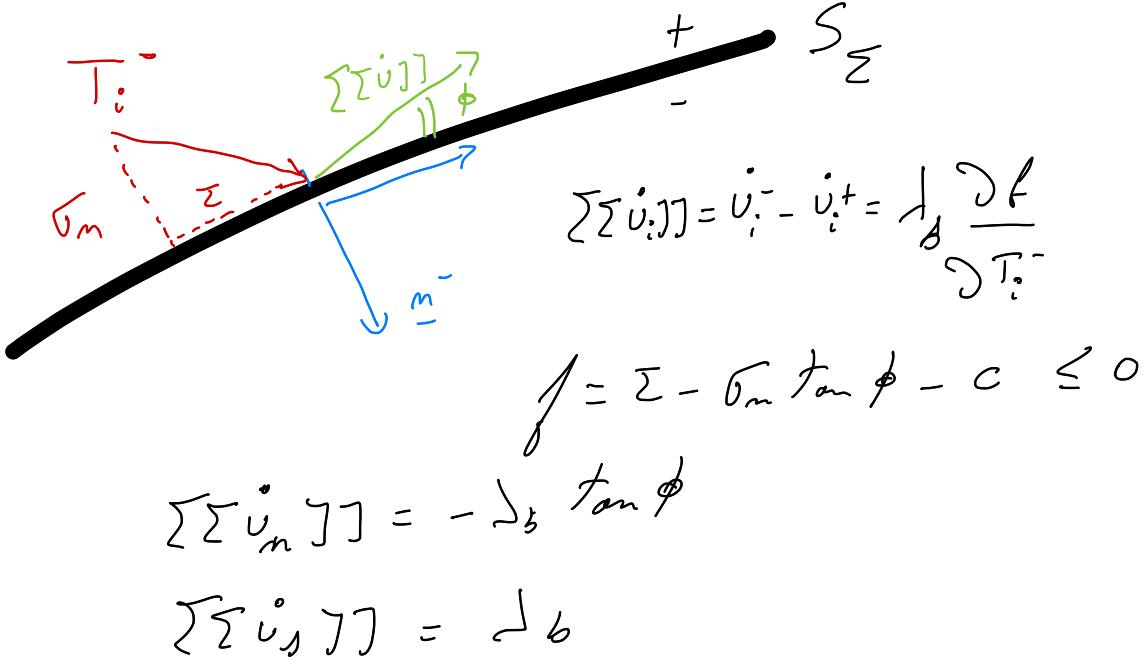


Figure 4.7: Surface de glissement dans un matériau Mohr-Coulomb. Le vecteur vitesse de discontinuité de déplacement $[[\dot{u}_i]] = u_i^- - u_i^+$ est représenté ici par $[[\dot{U}]]$.

et la déformation volumique $\dot{\epsilon}^v = \dot{\epsilon}_I + \dot{\epsilon}_{III}$ peut s'exprimer en fonction de la déformation de cisaillement $\dot{\gamma} = \dot{\epsilon}_I - \dot{\epsilon}_{III}$:

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}_v &= -\dot{\gamma} \sin \phi \\ \dot{\gamma} &= 2\lambda\end{aligned}$$

L'angle de frottement ϕ étant toujours inférieur à $\pi/2$ et le multiplicateur plastique $\lambda > 0$, on a $\dot{\epsilon}_v < 0$ qui correspond dans la convention MS (compression positive, contraction positive) à une augmentation de volume. En d'autres termes, toute déformation plastique de cisaillement est associée à une augmentation de volume pour le critère de MC associé, ceci est partiellement vrai - en revanche il est typiquement observé qu'à partir d'une certaine déformation plastique: le taux déformation volumique devient nul et la déformation plastique n'est que cisallante (on appelle cela l'état critique en mécanique des sols). Il convient d'utiliser des modèles plus complexes pour prendre en compte ce comportement. Encore une fois, pour le calcul ELU et l'estimation des charges de ruines, le critère de Mohr-Coulomb est efficace.

4.2.2.2 Surface de Glissement

Il est courant dans les sols que la déformation plastique se localise et que des surfaces de glissement apparaissent. Imaginons le cas d'un matériau satisfaisant le critère de Mohr-Coulomb pour lequel la déformation plastique est localisée le long d'une surface de glissement S_{Σ} . La déformation plastique localisée devient en fait une discontinuité de déplacement: $[[u_i]] = u_i^- - u_i^+$ (c.f. fig.4.7). On peut obtenir simplement $[[u_i]]$ par intégration de la déformation au travers de la surface de glissement (en utilisant la définition $\epsilon_{ij} = -\frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ de telle sorte que les déplacements sont positifs dans le sens du système de coordonnées (ce qui est plus intuitif)).

On peut écrire le critère de Mohr-Coulomb directement en terme de contraintes normales et tangentielles à cette surface de glissement:

$$f(\sigma_n, \tau) = |\tau| - c - \sigma_n \tan \phi.$$

avec

$$\begin{aligned} T_i^- &= \sigma_{ij} n_j \text{ vecteurs contraintes sur } S_\Sigma \\ T_s &= \tau = s_i \sigma_{ij} n_j \text{ contrainte de cisaillement sur } S_\Sigma \\ T_n &= \sigma_n = n_i \sigma_{ij} n_j \text{ contrainte normale sur } S_\Sigma \end{aligned}$$

où n_j est la normale à la surface de glissement S_Σ et s_i le vecteur tangent associé (c.f. figure 4.7).

On écrit l'écoulement plastique sous la forme

$$[[\dot{u}_i]] = \lambda_b \frac{\partial f}{\partial T_i} \quad f(T_i) = 0$$

où λ_b est un multiplicateur plastique de dimensions $[L/T]$ ici et $\lambda_b f = 0$ et $\lambda_b \geq 0$.

On voit donc que le rapport des vitesses de discontinuité plastiques normales et tangentielles est:

$$\left\| \frac{[[\dot{u}_n]]}{[[\dot{u}_s]]} \right\| = \tan \phi$$

Le vecteur de discontinuité de déplacement plastique localisée sur la surface de glissement fait donc toujours un angle ϕ par rapport à celle-ci (cf. Fig. 4.8). Il existe une “dilatance” lié au cisaillement localisé. Le raisonnement est strictement similaire à la sous-section précédente. Notez que dans notre convention (tassemement - overlap positif / compression positive),

$$\begin{aligned} [[\dot{u}_n]] &= -\lambda_b \tan \phi \\ [[\dot{u}_s]] &= \lambda_b \operatorname{sign}(\tau) \end{aligned}$$

En définissant $[[\dot{U}]]$ la norme du vecteur de vitesse de discontinuité de déplacement, on peut réécrire

$$\begin{aligned} [[\dot{u}_n]] &= -[[\dot{U}]] \sin \phi \\ [[\dot{u}_s]] &= [[\dot{U}]] \cos \phi \operatorname{sign}(\tau) \end{aligned} \tag{4.4}$$

Calcul de la puissance dissipée le long d'une surface de glissement On aura souvent à calculer la puissance dissipée le long de la surface de glissement à la rupture:

$$\int_{S_\Sigma} \sigma_{ij} n_j [[\dot{u}_i]] \, dS$$

Intéressons nous ici à l'intégrande

$$p_{diss} = \sigma_{ij} n_j [[\dot{u}_i]]$$

qui dans le repère (n, s) local à la surface de glissement s'écrit donc:

$$p_{diss} = \tau [[\dot{u}_s]] + \sigma_n [[\dot{u}_n]]$$

À la rupture, on a l'égalité $f = 0$, soit

$$|\tau| = c + \sigma_n \tan \phi$$

et $\tau \operatorname{sign} \tau = |\tau|$ ce qui permet d'obtenir en utilisant (4.4)

$$\begin{aligned} p_{diss} &= c [[\dot{U}]] \cos \phi + \sigma_n [[\dot{U}]] \sin \phi - \sigma_n [[\dot{U}]] \sin \phi \\ &= c [[\dot{U}]] \cos \phi \end{aligned}$$

On voit donc que la puissance dissipée le long d'une surface de glissement est nulle dans le cas d'un matériau de cohésion nulle. Ce résultat découle directement de l'hypothèse d'un écoulement plastique associé ($f = g$). Le résultat est différent pour le cas non-associé (pour exercice, dérivé le cas avec un angle de dilatance $\psi \neq \phi$).

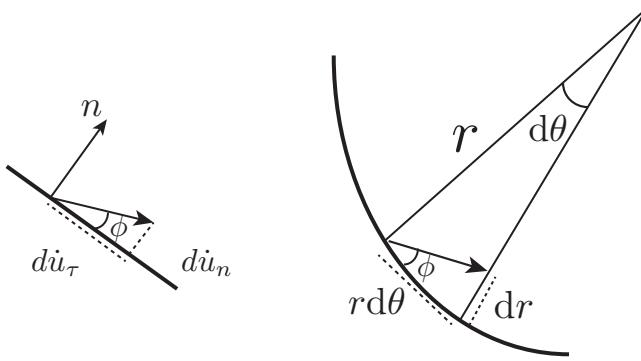


Figure 4.8: Formes des surfaces de glissement dans un matériau avec un critère de Mohr Coulomb: droite ou spirale logarithmique.

Surface de glissement courbe ? Considérons maintenant une surface de glissement non-nécessairement droite. En tout point, le vecteur déplacement plastique a toujours un angle ϕ par rapport à la surface de glissement. Localement celle ci peut être paramétrée par un rayon de courbure r (dans le cas d'un droite $r \rightarrow \infty$), on voit que pour une rotation $d\theta$ autour du centre de rotation instantané, l'incrément de rayon étant dr , on a (cf Fig. 4.8):

$$\frac{dr}{rd\theta} = \tan \phi$$

soit après intégration:

$$r = r_o \exp(\theta \tan \phi)$$

Une telle courbe correspond à une spirale logarithmique.

On en conclut donc pour un sol: en conditions drainées ($\phi = \phi'$, contraintes effectives), les surfaces de glissements seront soit des droites ($r_o \rightarrow \infty$), soit des spirales logarithmiques. En conditions non-drainées ($\phi = 0$, contraintes totales), les surfaces de glissement sont soit des droites, soit des arc de cercles.

4.2.3 Discontinuités de contraintes

Il est également possible que des discontinuités de contraintes apparaissent dans un volume se plastifiant. Considérons une surface (de normale n_i) avec de part et d'autre de celle-ci deux champs de contraintes (A& B, cf Fig.4.9), il convient de rappeler que le vecteur traction doit être continu entre ces 2 zones pour assurer l'équilibre:

$$[[\sigma_{ij}]] n_j = (\sigma_{ij}^B - \sigma_{ij}^A) n_j = 0$$

Toutefois, il peut y avoir une rotation des directions principales de contraintes ainsi qu'un saut dans les valeurs. Considérons le cas de 2 régions A et B ayant deux états de contraintes différents et étant tous les deux à la rupture. La continuité des tractions à travers la surface séparant A et B implique que les cercles de Mohr des 2 régions ont un point commun X (i.e. afin de satisfaire la continuité des tractions entre les 2 zones et donc vérifier l'équilibre). On se réfère à la Fig. 4.9 où le centre des cercles de Mohr correspondant aux régions est noté A et B. De la région A à B, on a une changement de direction principale de contraintes $d\vartheta$. Explorons le cas où $ds' \rightarrow 0$, $\sin 2d\vartheta \approx 2d\vartheta$, $X \rightarrow T$, l'angle $\widehat{XBA} \approx \pi/2 - \phi$ et $\widehat{BX} \approx \widehat{AX} \approx s' \sin \phi$. En appliquant la loi des sinus au triangle ABX on obtient:

$$\frac{\widehat{AX}}{\sin \widehat{XBA}} = \frac{s' \sin \phi}{\cos \phi} = \frac{\widehat{AB}}{\sin \widehat{AXB}} = \frac{ds'}{\sin 2d\vartheta}$$

on obtient alors la relation suivante entre ds' (incrément de contraintes moyenne) et $d\vartheta$ l'angle du changement des directions principales entre les régions A et B ($\sin x \approx x$ pour $x \ll 1$) :

$$\frac{ds'}{s'} = 2d\vartheta \tan \phi$$

Si maintenant, on considère un éventail continu de discontinuité de contraintes dans une région fini où la rotation des directions principales de contraintes total est ϑ (entre le début et la fin de l'éventail de

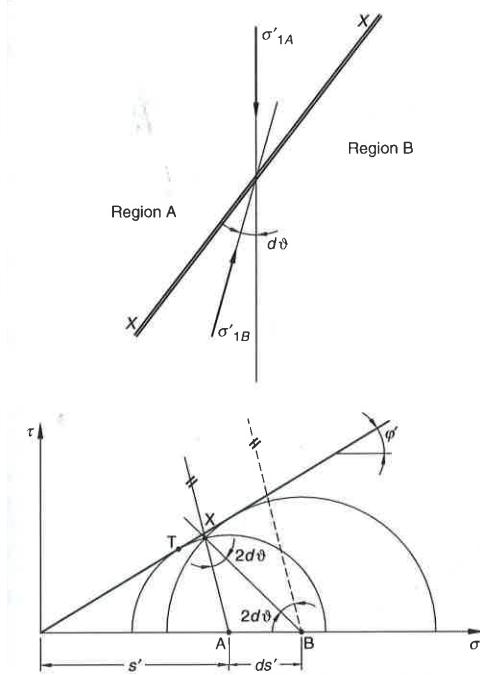


Figure 4.9: Discontinuité de contraintes entre 2 régions et cercles de Mohr associés (figure tirée de Lancellotta's Geotechnical Engineering).

discontinuité), par intégration, on obtient la variation entre les cercles de Mohr au début (contraintes moyenne s'_1) et à la fin (contraintes moyenne s'_2) de l'éventail:

$$\frac{s'_1}{s'_2} = \exp 2\vartheta \tan \phi$$

[Notez que l'on retrouve une expression mathématique du type spirale logarithmique.].

4.3 Démonstration des théorèmes de l'analyse limite

[Cette partie 4.3 ne sera pas détaillée en cours - je vous invite à refaire les dérivations par vous-même]

On rappelle le PPV valable pour tout champ de vitesse C.A (quand les déplacements imposés sont constant en temps)

$$\int_{V/S_\Sigma} \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} (\dot{u}_i) \, dV + \int_{S_\Sigma} \sigma_{ij} n_j [\dot{u}_i] \, dS = \int_V (-b_i) \dot{u}_i \, dV + \int_{S_t} t_i^d \dot{u}_i \, dS$$

Dans les deux sections qui suivent, on va démontrer les théorèmes statiques et cinématiques de l'analyse limite : bornes inférieure et supérieure de la charge de ruine. Pour plus de simplicité, on suppose qu'il n'y a pas de surface de glissement - mais le raisonnement est strictement le même avec (re-faites les dérivations pour vous en convaincre).

Paramétrons le chargement de tel sorte que $T_i = \alpha T_i^c$ où T_i^c correspond à la charge maximale de rupture de la structure (à la rupture $\alpha = 1$).

4.3.1 Borne inférieure statique

Soit un champ statiquement admissible σ_{ij}^a correspondant à un paramètre de chargement α^a vérifiant le critère de rupture (à savoir $f(\sigma_{ij}^a) \leq 0$) en tout point, le PPV s'écrit pour ce champ de contraintes statiquement admissible en prenant pour champ de vitesse le champ solution \dot{u}_i

$$\int_V \sigma_{ij}^a \dot{\epsilon}_{ij} \, dV = \alpha^a \int_{S_t} T_i^c \dot{u}_i \, dS + \int_V (-b_i) \dot{u}_i \, dV$$

où \dot{u}_i est le champ de vitesse solution (et $\dot{\epsilon}_{ij}$ le champ de taux de déformation associé). Pour le champ de contraintes exactes σ_{ij} à la rupture correspondant à la valeur $\alpha = 1$ du paramètre de chargement, on a:

$$\int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \, dV = 1 \int_{S_t} T_i^c \dot{u}_i \, dS + \int_V (-b_i) \dot{u}_i \, dV$$

En prenant la soustraction des deux expressions précédentes, on obtient

$$(1 - \alpha^a) \int_{S_t} T_i^c \dot{u}_i \, dS = \int_V (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^a) \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \, dV > 0$$

soit

$$\alpha^a < 1$$

car la puissance des efforts extérieurs est positive $T_i^c \dot{u}_i > 0$ (et peut être utilisé comme un facteur de scaling). La valeur α^a est donc une borne inférieure du paramètre de chargement à la rupture car

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^a) \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} > 0$$

du fait de la convexité de la surface de rupture (et de “l’associativité” de la déformation plastique - c.f subsection 4.2.1.3 de ces notes).

4.3.2 Borne supérieure cinématique

Prenons un champ de vitesse cinématiquement admissible \dot{u}_i^a . Pour un tel champ de vitesse, correspond un champ de contraintes σ_{ij}^b vérifiant le critère de rupture (mais pas forcément l’équation d’équilibre) de telle sorte que $\dot{\epsilon}_{ij}^a = \lambda^b \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}^b}$ où λ^b est le multiplicateur plastique correspondant. On peut définir le facteur de chargement

$$\alpha^{ab} \int_{S_t} T_i^c \dot{u}_i^a \, dS = \int_V (\sigma_{ij}^b) \lambda^b \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}^b} \, dV - \int_V (-b_i) \dot{u}_i^a \, dV$$

Pour le champ de contraintes solution σ_{ij} (à la rupture) - correspondant au paramètre de chargement solution $\alpha = 1$, le PPV pour le champ test \dot{u}_i^a s’écrit:

$$\int_{S_t} T_i^c \dot{u}_i^a \, dS = \int_V \sigma_{ij} \lambda^b \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}^b} \, dV - \int_V (-b_i) \dot{u}_i^a \, dV$$

d’où

$$(\alpha^{ab} - 1) \int_{S_t} T_i^c \dot{u}_i^a \, dS = \int_V \lambda^b (\sigma_{ij}^b - \sigma_{ij}) \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}^b} \, dV > 0$$

soit

$$\alpha^{ab} > 1$$

encore une fois à cause de la convexité de la surface de rupture (et de “l’associativité” de la déformation plastique - c.f subsection 4.2.1.3 de ces notes).

Le champ de vitesse \dot{u}_i^a correspondant au paramètre de chargement α_{ab} fournit donc une borne supérieure $\alpha^{ab} T_i^c$ de la charge de rupture exacte T_i^c .

4.4 Démarche pour l’obtention des bornes de la charge ultime

La démarche du calcul à la rupture (afin de déterminer la charge ultime d’une structure géotechnique) sera donc la suivante:

1. Paramétrisation du chargement (e.g. descente de charges, forces d’ancrages)
2. Choix du critère de comportement selon que l’on fasse un calcul à court terme (Tresca - contraintes totales) ou long terme (Mohr-Coulomb - contraintes effectives)

3. Approche statique (“par l’intérieur”) afin de déterminer une borne inférieure à la vrai charge ultime.
 - (a) Choix d’un champ de contraintes statiquement admissible (donc paramétré par le chargement)
 - (b) Maximisation du paramètre de chargement pour lequel le champ de contraintes vérifie le critère de rupture: obtention d’une borne inférieure de la charge ultime
4. Approche cinématique
 - (a) Choix d’un champ de déplacement cinématiquement admissible - éventuellement avec des lignes de glissement représentant le mécanisme de rupture (souvent paramétrisé)
 - (b) Calculs de la puissance intérieure (en supposant que le matériau vérifie le critère de plasticité dans les zones de déplacement plastiques)
 - (c) Utilisation du principe des puissances virtuelles afin d’obtenir la charge ultime par minimization: obtention d’une borne supérieure du chargement ultime

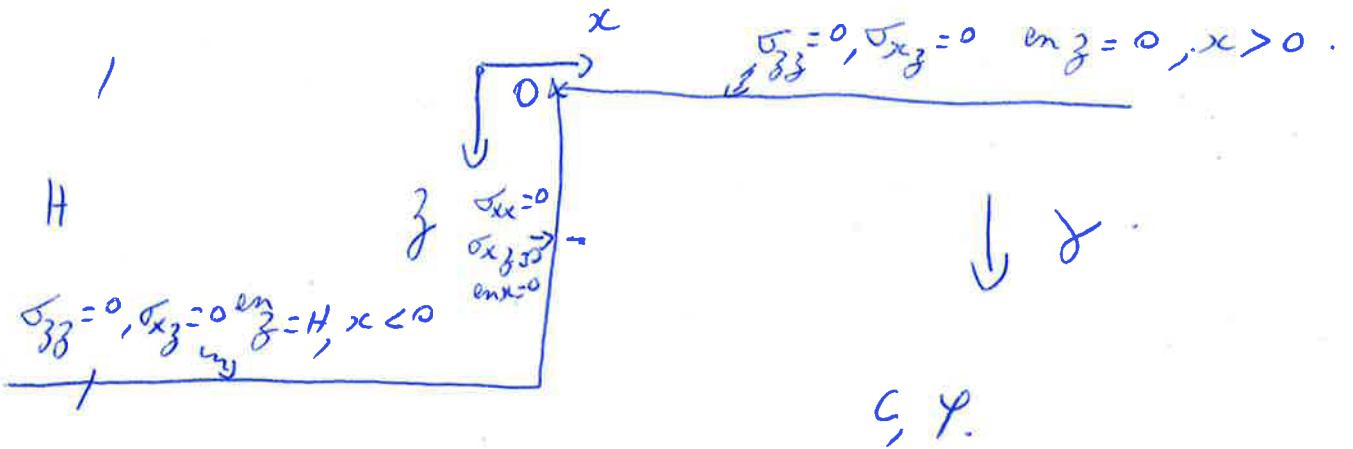


Figure 4.10: Talus vertical dans un milieu cohérent et frottant. H de ruine ?

4.5 Example de calcul à la rupture: Talus vertical

Afin de mieux comprendre l'application pratique des notions précédentes, rien de mieux qu'un exemple. Prenons le cas de l'excavation d'un talus vertical dans un sol de poids γ satisfaisant un critère de Mohr-Coulomb (c.f. figure 4.10). Bornez la hauteur de ruine H du talus par une approche statique et cinématique.

Avant de commencer par l'approche statique, il est intéressant de faire une simple analyse dimensionnelle du problème. La hauteur maximale du talus H (en mètres - dimension [L]) dépend des paramètres suivants:

- le poids du sol γ [$\text{M/L}^2/\text{T}^2$]
- la cohésion c [M/L/T^2]
- l'angle de frottement du sol ϕ [-]

Les 4 paramètres du problème H, γ, c, ϕ ne dépendent que de 3 dimensions ([M], [L], [T]), selon le théorème de Buckingham- π , la solution du problème ne dépend donc que d'un seul paramètre adimensionnel (ici ϕ). Effectivement, on peut dimensionner la hauteur comme suit

$$H = \frac{c}{\gamma} \times \mathcal{H}(\phi)$$

où $\mathcal{H}(\phi)$ est une fonction adimensionnelle ne dépendant que de l'angle de frottement du sol. On voit donc que l'on peut en fait résoudre le problème pour \mathcal{H} et on aura les solutions pour n'importe quelle valeur de c et γ .

4.5.1 Approche Statique

On construit un champ statiquement admissible (S.A.) simple en 3 zones 1, 2 et 3 - cf Fig 4.11. On rappelle qu'un champ S.A. doit vérifier les équations d'équilibre, les conditions aux limites en tractions et le vecteur contraintes doit être continu à travers une surface de discontinuité.

Dans notre cas, dans le repère (x, z) de la figure, l'équilibre s'écrit

$$\begin{aligned} \partial_x \sigma_{xx} + \partial_z \sigma_{xz} &= 0 \\ \partial_x \sigma_{xz} + \partial_z \sigma_{zz} &= \gamma \end{aligned}$$

On choisit les champs suivants pour les différentes zones.

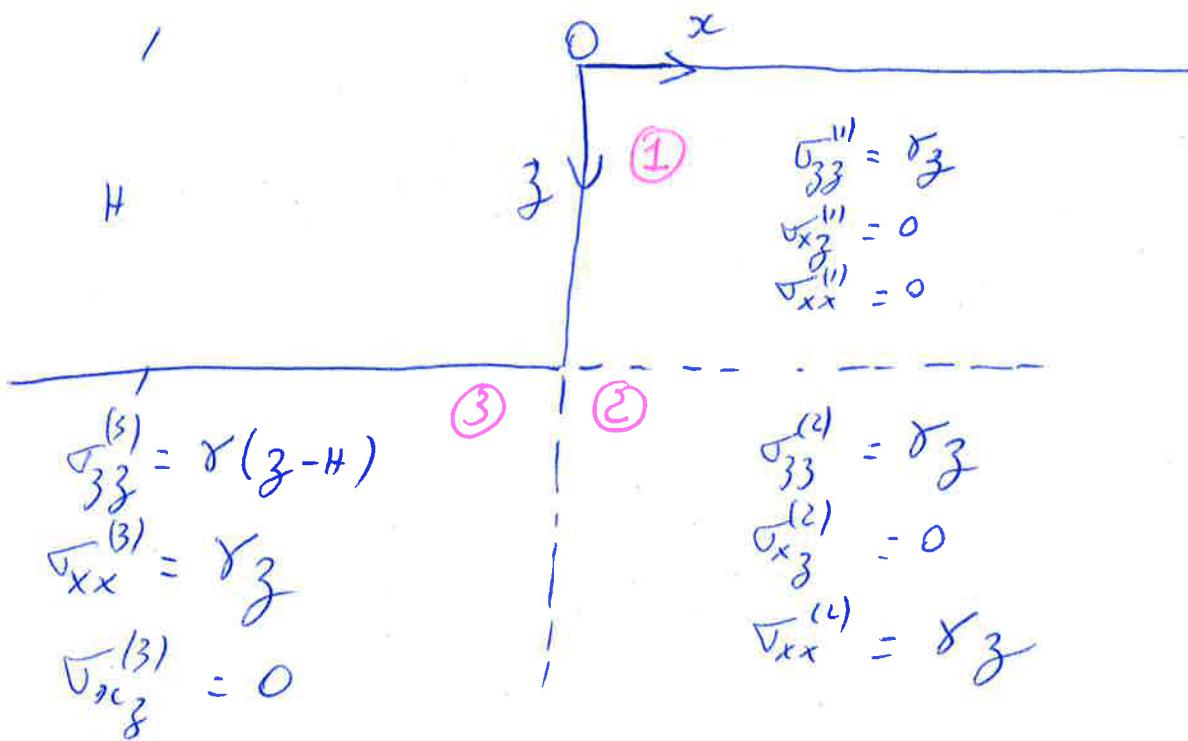


Figure 4.11: Approche statique - talus vertical. Champ de contraintes statiquement admissible à 3 zones simples.

- Zone 1 $x \geq 0$ et $z \leq H$

$$\sigma_{xx}^{(1)} = 0 \quad \sigma_{xz}^{(1)} = 0 \quad \sigma_{zz}^{(1)} = \gamma z$$

on peut vérifier qu'un tel champ est bien S.A. dans cette zone

- Zone 2 $x \geq 0$ et $z > H$

$$\sigma_{xx}^{(2)} = \gamma z \quad \sigma_{xz}^{(2)} = 0 \quad \sigma_{zz}^{(2)} = \gamma z$$

ce champ est bien S.A. On notera que le vecteur contrainte est bien continue entre les zones 1 et 2 (σ_{zz} est bien continue), en revanche on peut avoir un saut de σ_{xx} si celui ci ne dépend pas de x (et $\sigma_{xz} = 0$) (1ere équation d'équilibre)

- Zone 3 $x < 0$ et $z > H$

$$\sigma_{xx}^{(3)} = \gamma z \quad \sigma_{xz}^{(3)} = 0 \quad \sigma_{zz}^{(3)} = \gamma(z - H)$$

ce champ est bien S.A. On notera que le vecteur contrainte est bien continue entre les zones 2 et 3 (σ_{xx} est bien continue).

Il convient maintenant de vérifier le critère de Mohr-Coulomb dans les trois zones. Comme $\sigma_{xz} = 0$ partout, on est dans un repère de contraintes principales

- Zone 1

$$f = \gamma z(1 - \sin \phi) - 2c \cos \phi \leq 0$$

Le critère sera maximale en $z = H$ et si on assume la rupture $f = 0$ en $z = H$, alors on a $f < 0$ pour tout $z < H$ - donc le critère est vérifié dans toute la zone 1 pour

$$\frac{\gamma H}{c} \leq 2 \frac{\cos \phi}{1 - \sin \phi}$$

- Zone 2

$$f = -2\gamma z \sin \phi - 2c \cos \phi < 0$$

Le critère est vérifié partout. car en fait les 2 contraintes principales sont égales - pas de cisaillement.

- Zone 3 ($z > H$)

Le critère est maximale en $z = H$, où $\sigma_{zz} = 0$.

$$f_{max} = \gamma H(1 - \sin \phi) - 2c \cos \phi$$

et sera donc vérifié partout si

$$\frac{\gamma H}{c} \leq 2 \frac{\cos \phi}{1 - \sin \phi}$$

En conclusions, on voit que l'on peut obtenir un champ de contraintes S.A. vérifiant le critère de plasticité en tout point si

$$\frac{\gamma H}{c} \leq 2 \frac{\cos \phi}{1 - \sin \phi}$$

En conclusion, cette approche statique nous fournit une borne inférieure $\left(\frac{\gamma H}{c}\right)^-$ du vrai domaine de stabilité de la structure $\left(\frac{\gamma H}{c}\right)$ pour l'égalité de l'inégalité précédente:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\gamma H}{c}\right)^- &= 2 \frac{\cos \phi}{1 - \sin \phi} = 2 \tan(\pi/4 + \phi/2) \\ 2 \frac{\cos \phi}{1 - \sin \phi} &\leq \left(\frac{\gamma H}{c}\right) \end{aligned}$$

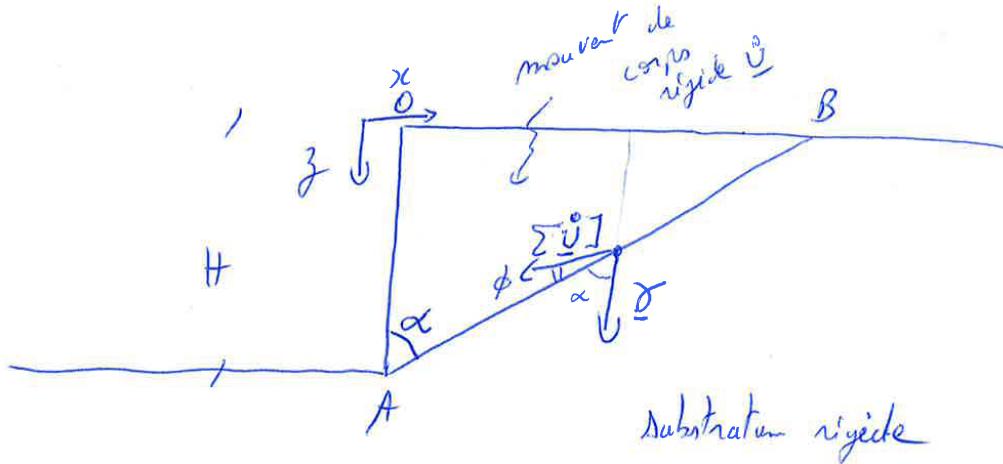


Figure 4.12: Approche cinématique. Mécanisme de ruine: champ de vitesse C.A.

4.5.2 Approche Cinématique

On postule un champ de vitesse C.A. pour la ruine de la structure décrit dans la figure 4.12. Une droite partant du bas du talus et re-joignant la surface du sol en amont en B. On paramétrise cette surface de glissement par l'angle α . On suppose donc que le triangle OAB se déplace en corps rigide avec un vecteur vitesse de norme $\|\dot{U}\|$ alors que le substratum reste rigide: toute la déformation plastique est accommodée par la surface de glissement droite AB. Comme on l'a vu en 4.2.2.2, pour un critère de Mohr-Coulomb le vecteur vitesse fait un angle ϕ avec la surface de glissement. Le vecteur vitesse est constant le long de la surface de glissement et la puissance totale dissipée est donc (c.g. subsection 4.2.2.2)

$$\mathcal{P}_{diss}(\dot{U}) = \int_{AB} c \|\dot{U}\| \cos \phi \, ds = \|AB\| \times c \|\dot{U}\| \cos \phi = \frac{H}{\cos \alpha} c \|\dot{U}\| \cos \phi$$

Ici la charge est le seul poids du sol (pas de traction imposée en surface). La puissance des efforts extérieurs est donc - comme seul le triangle OAB se déplace - le poids étant une force verticale

$$\mathcal{P}(\dot{U}) = \int_{OAB} \gamma \dot{U}_z \, dS = \int_{OAB} \gamma \|\dot{U}\| \cos(\alpha + \phi) \, dS = \frac{1}{2} H^2 \tan \alpha \times \gamma \|\dot{U}\| \cos(\alpha + \phi)$$

L'application du PPV donne alors la borne supérieure suivante de la charge de ruine pour un α donné:

$$\frac{\gamma H}{c} = 2 \frac{\cos \phi}{\sin \alpha \cos(\alpha + \phi)}$$

Il convient de minimiser cette borne supérieure par rapport à α afin d'obtenir la borne supérieure la plus petite. Pour ce faire, on minimise $g(\alpha) = 2 \frac{\cos \phi}{\sin \alpha \cos(\alpha + \phi)}$, pour des angles donnant bien sur $g(\alpha) > 0$, on obtient (en utilisant par exemple Mathematica ou à la main ;))

$$\alpha = \frac{\pi}{4} - \phi/2$$

et donc finalement la borne supérieure du domaine de stabilité

$$\left(\frac{\gamma H}{c} \right)^+ = 4 \frac{\cos \phi}{1 - \sin \phi} = 4 \tan(\pi/4 + \phi/2)$$

En combinant les résultats obtenu par l'approche statique (par l'intérieur) et cinématique (par l'extérieur), on obtient donc finalement les bornes suivantes du domaine de stabilité

$$2 \frac{\cos \phi}{1 - \sin \phi} \leq \left(\frac{\gamma H}{c} \right) \leq 4 \frac{\cos \phi}{1 - \sin \phi}$$

On voit que l'on a un facteur 2 entre la borne inférieure et la borne supérieure ! On notera qu'en utilisant des méthodes plus complexe en utilisant de multiples zones (pour le cas statique) et une surface de glissement en spirale logarithmique etc., les meilleures estimations analytique des bornes obtenues à ce jour donnent

$$3.73 \frac{\cos \phi}{1 - \sin \phi} \leq \left(\frac{\gamma H}{c} \right) \leq 3.83 \frac{\cos \phi}{1 - \sin \phi}$$

Notamment la borne supérieure $3.83 \frac{\cos \phi}{1 - \sin \phi}$ est obtenue en considérant un mécanisme de ruine en forme de spirale logarithmique.

On s'aperçoit donc que le mécanisme de ruine utilisé lors de notre estimation de la borne supérieure n'était pas trop loin (4 au lieu de 3.83) alors que le champ de contraintes simple à trois zones utilisé lors du calcul de la borne inférieure est clairement trop simpliste. En fait ici, la surface de rupture réelle est plus proche d'une spirale logarithmique.

Chapter 5

Fondations superficielles

5.1 Types

5.1.1 Types de fondations superficielles

Les fondations superficielles dépendent de plusieurs facteurs:

- Qualité du massif de sol
- Contraintes fonctionnelles de l'ouvrage (niveaux de sous-sol, étanchéité, tassements)
- Environnement (surtout environnement construit)
- Types de force à transmettre au massif de fondation, qui sont de trois types différents
 - Ponctuelles (descentes de charge par piliers ou colonnes)
 - Linéaires (efforts transmis par les murs porteurs)
 - Surfaciques (efforts transmis par les aires de stockages, réservoirs)

En combinant ces informations, les fondations superficielles sur la figure 5.1 peuvent être envisagées:

5.1.2 Types d'état limite ultime

Comme pour d'autres systèmes, différents états limite ultime (ELU) peuvent se produire selon le type de fondations superficielles. Théoriquement, tous les ELU devraient être étudiés et vérifiés. Cependant, si un ELU prédomine sur les autres, il est envisageable de ne considérer que ce dernier.

- ELU type 1 : instabilité de l'ensemble de l'ouvrage. ELU en lien aux mécanismes de rupture, la structure et le terrain ne jouent pas leur rôle (basculement, déversement, soulèvement par poussée d'Archimède, phénomène de renard).

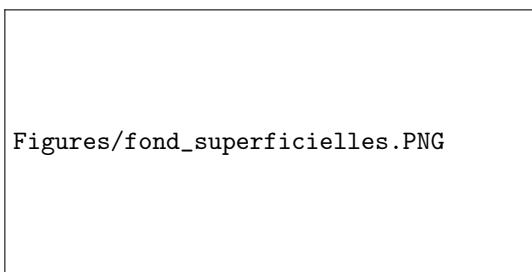
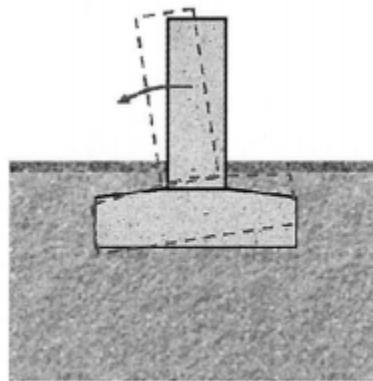
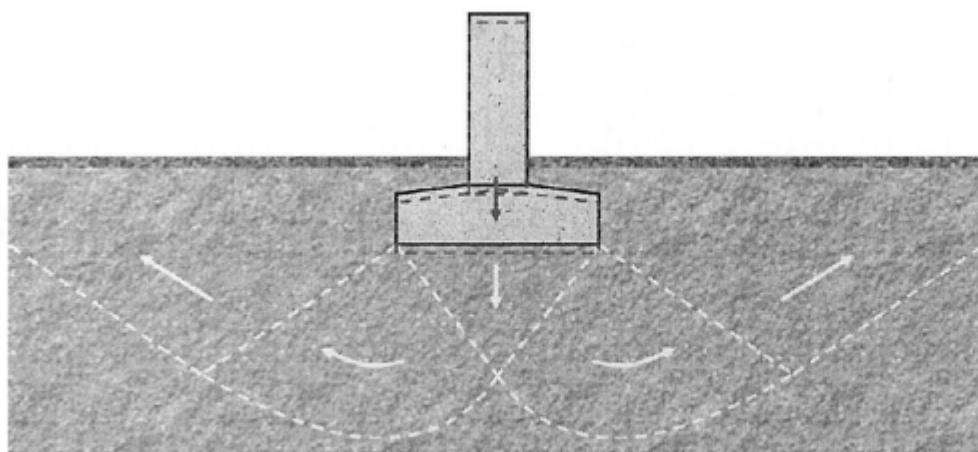


Figure 5.1: Différents types de fondations superficielles

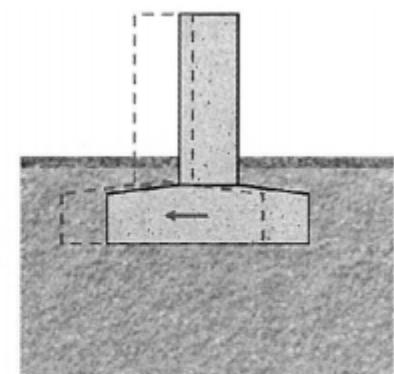


Perte d'équilibre par basculement

Figure 5.2: ELU type 1 pour fondations superficielles

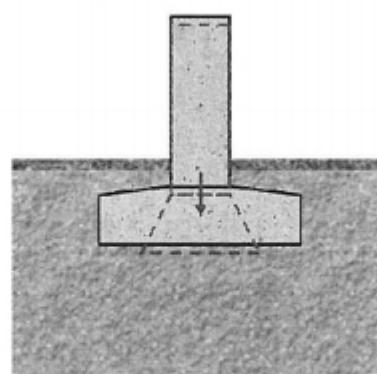


Résistance au poinçonnement du terrain atteinte



Résistance au glissement atteinte à l'interface

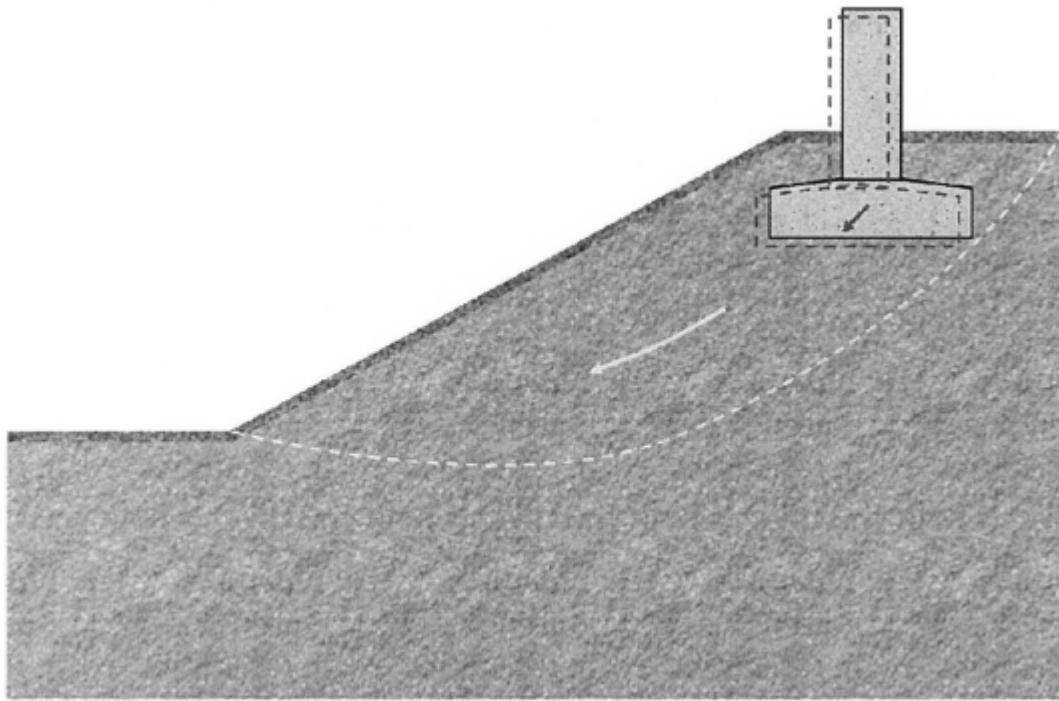
(a) Externe



*Résistance ultime du matériau constitutif de la fondation atteinte
(p.ex. poinçonnement de la semelle par une colonne)*

(b) Interne

Figure 5.3: ELU type 2 pour fondations superficielles



Mobilisation complète de la résistance au cisaillement du terrain (i.e. glissement généralisé)

Figure 5.4: ELU type 3 pour fondations superficielles

- ELU type 2 : atteinte à la résistance ultime de l'ouvrage ou d'un élément de l'ouvrage (sécurité interne) / du sol (sécurité externe). Un ELU 2 externe correspondrait à un poinçonnement massif du sol par exemple.
- ELU type 3 : instabilité générale du massif de fondation. Il s'agit le plus souvent d'un mécanisme de glissement une fois que la résistance complète du terrain est atteinte. Les stabilités de talus et glissement de terrain sont vérifiées selon cet ELU type 3.

Rapide rappel sur l'**état limite de service (ELS)** qui peut être interne ou externe. L'ELS externe concerne les tassements ou mouvements excessifs du sol qui amènent à la ruine d'une structure (ou d'un de ces éléments) surtout si la structure est hyperstatique. Il est préférable dans un tel cas d'également prendre en considération l'ELU type 2 interne. L'ELS interne concerne la durabilité des matériaux de la fondation superficielle.

5.2 Capacité portante

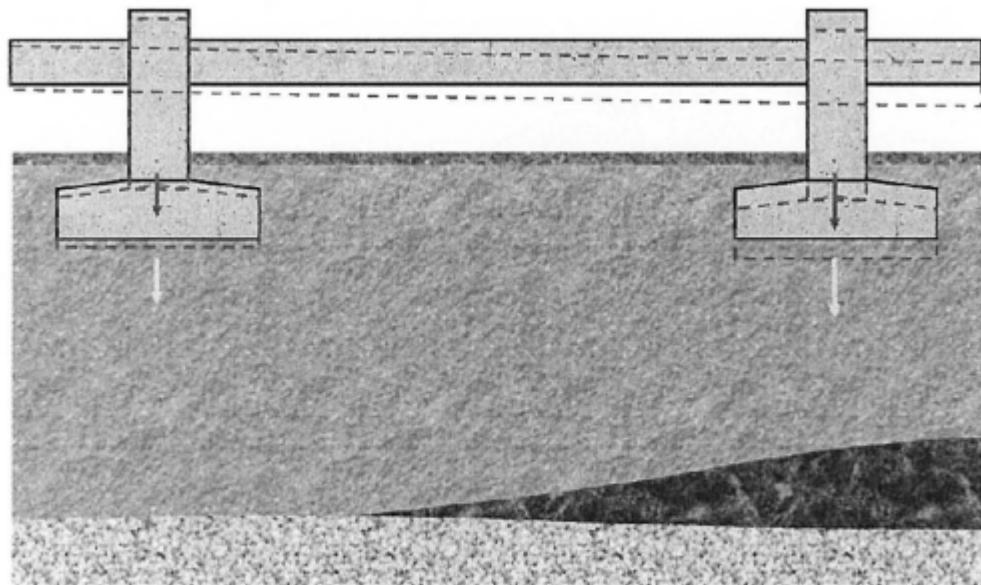
Dans cette partie, on proposera de résoudre avec deux méthodes les équations liées aux mécanismes de rupture.

5.2.1 Critère de Tresca

Le critère de Tresca stipule que le matériau est purement cohérent et non frictionnel. Dans ce cas, $\phi = 0$ et la cohésion $c \neq 0$. Le critère de Tresca se rapproche au mieux de la solution pour la rupture du sol à court terme.

5.2.2 Dérivation de Prandtl

Dans un premier temps, on présentera la **solution de Prandtl**. On considère une approche statique sur la borne inférieure. Le système est représenté sur la figure 5.6.



Tassements totaux et/ou différentiels excessifs limitant l'aptitude au service de l'ouvrage

Figure 5.5: ELS externe

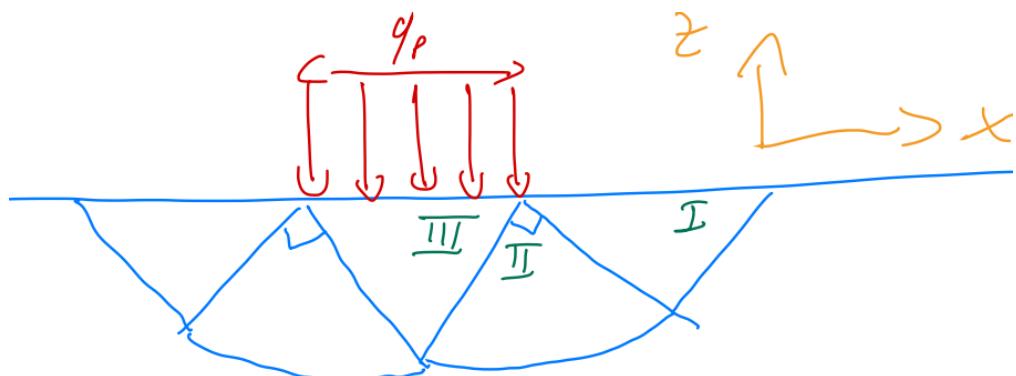


Figure 5.6: Approche statique

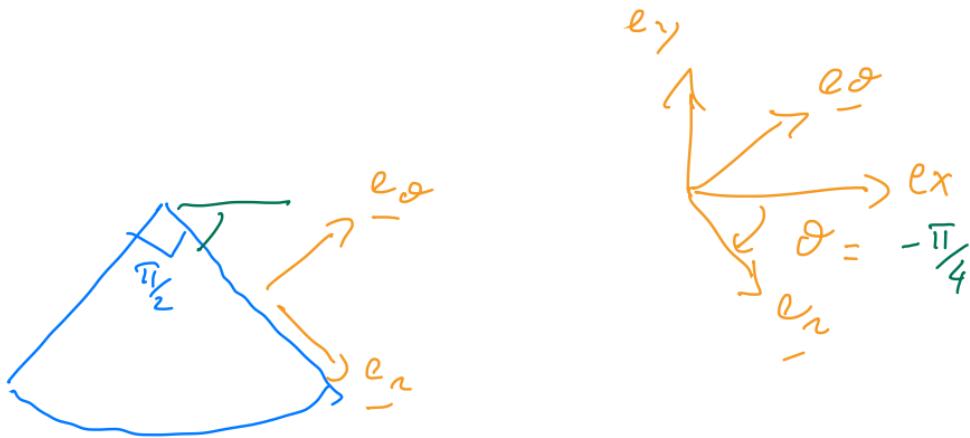


Figure 5.7: Repère pour la zone II

- Zone I: $\sigma_{zz} = 0$; $\sigma_{xz} = 0$; $\sigma_{xx} = 2c$
- Zone II: voir figure 5.7. Si on compare les coordonnées polaires et les coordonnées cartésiennes. $T_n = \sigma_{\theta\theta}$ la traction normale, $\tau_s = \sigma_{r\theta}$. De plus, en appliquant la continuité entre les zones I et II, $\theta = -\frac{\pi}{4}$. En combinant avec le changement de coordonnées (équation 5.1), $\sigma_{\theta\theta} = c$ et $\sigma_{r\theta} = c$.

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta\theta} &= \frac{\sigma_{xx}}{2} \\ \sigma_{r\theta} &= \frac{\sigma_{xx}}{2}\end{aligned}\tag{5.1}$$

Si on cherche maintenant à obtenir l'équilibre en coordonnées polaires:

$$\begin{aligned}\text{selon } \underline{e}_r, \quad \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} &= 0 \\ \text{selon } \underline{e}_\theta, \quad \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} &= 0\end{aligned}$$

Si on fait le choix $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta}$ et $\sigma_{r\theta} = \text{constante}$ alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} &= -2\sigma_{r\theta}\end{aligned}$$

car σ_{rr} et $\sigma_{\theta\theta}$ sont indépendants de r .

Les conditions limites entre les zones I et II donnent en $\theta = -\frac{\pi}{4}$, $\sigma_{r\theta} = c$ et $\sigma_{\theta\theta} = c$, d'où:

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta\theta}(\theta) &= -2c\theta + A \rightarrow 2c\frac{\pi}{4} + A = c \\ \sigma_{\theta\theta}(\theta) &= c - 2c(\theta + \frac{\pi}{4}) = \sigma_{rr} \\ \sigma_{rc} &= c\end{aligned}$$

Dans la zone III (voir figure 5.8), on pose $\sigma_{xz} = 0$ et on cherche les valeurs pour σ_{xx} et σ_{zz} . Les conditions limites entre les zones II & III se retrouvent en $\theta = -\frac{3\pi}{4}$ où on a (en coordonnées polaires)

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \sigma_{\theta\theta} = c(1 + \pi) \\ \sigma_{r\theta} &= c\end{aligned}$$

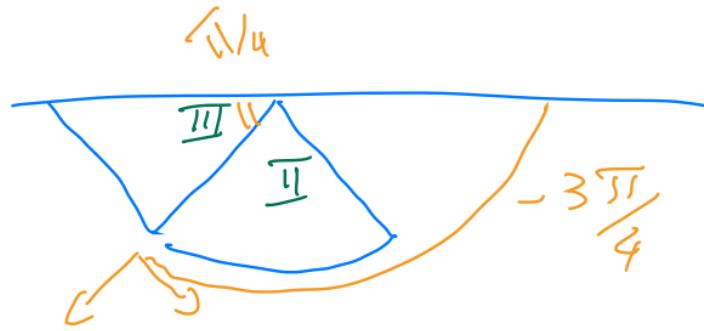


Figure 5.8: Zone III

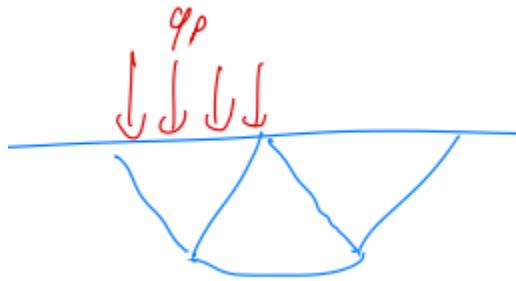


Figure 5.9: Répartition des charges

En repassant en coordonnées cartésiennes à $\theta = -\frac{3\pi}{4}$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\theta\theta} &= \sigma_{xx} \sin^2 \theta + \sigma_{zz} \cos^2 \theta \\
 \sigma_{r\theta} &= (\sigma_{zz} - \sigma_{xx}) \sin \theta \cos \theta \\
 \sigma_{\theta\theta} &= c(1 + \pi) = \frac{\sigma_{xx}}{2} + \frac{\sigma_{zz}}{2} \\
 \sigma_{r\theta} &= c = \frac{\sigma_{zz} - \sigma_{xx}}{2} \\
 \sigma_{zz} &= c(2 + \pi) \\
 \sigma_{xx} &= \pi c
 \end{aligned}$$

Dans la zone III

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= \pi c \\
 \sigma_{zz} &= (2 + \pi)c \\
 \sigma_{xz} &= 0 \\
 q_p &= (2 + \pi)c
 \end{aligned}$$

Approche cinématique Triangle ABO isocèle $\rightarrow |AB| = |OB| = \frac{b}{\sqrt{2}}$
 Triangle BCD isocèle $\rightarrow |CD| = \frac{b}{\sqrt{2}}$

Puissance des efforts extérieurs

$$P_{ext} = q_p b \dot{U}$$

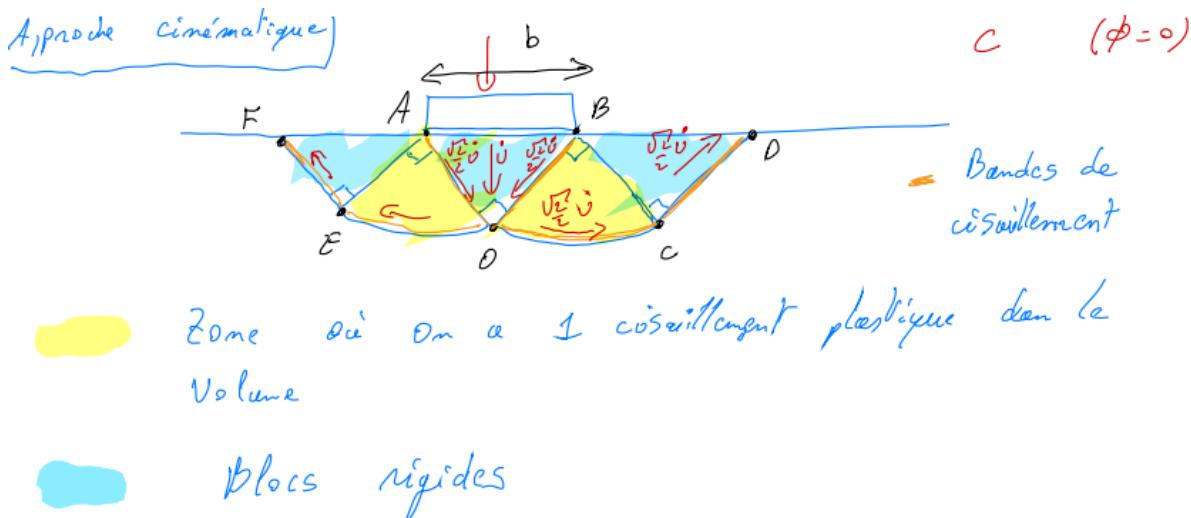


Figure 5.10: Illustration des zones d'effort

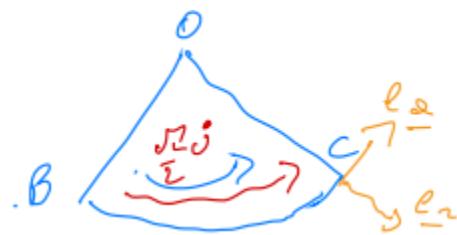


Figure 5.11: Puissance dissipée dans la zone de cisaillement pur

Puissance dissipée (résistance maximale) Les bandes de cisaillement sont les segments suivants: AO+OC+CD+(OB+OE+EF). Le long de AO, CD et OC:

$$\begin{aligned}
 P_{AO}(\dot{U}) &= \int_{AO} \sum [u_i] t_i ds = \frac{\sqrt{2}}{2} \dot{u}_c \cdot \frac{b}{\sqrt{2}} = \frac{b \dot{u}_c}{2} \\
 P_{CD}(\dot{U}) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \dot{u}_c \cdot |CD| = \frac{b \dot{u}_c}{2} \\
 P_{OC}(\dot{U}) &= \int_{\theta=0}^{\pi/2} \frac{\sqrt{2}}{2} \dot{u}_c \cdot \frac{b}{\sqrt{2}} d\theta = b \dot{u}_c \frac{\pi}{4} \\
 P_{dissipée} &= b \dot{u}_c \left(2 + \frac{\pi}{2}\right)
 \end{aligned}$$

Puissance dissipée dans la zone de cisaillement pur Les conditions dans la zone: $u_\theta = \text{constante}$, $\dot{u}_r = 0$, $\dot{\varepsilon}_{rr} = \dot{\varepsilon}_{\theta\theta} = 0$

$$\begin{aligned}
 \dot{\varepsilon}_{r\theta} &= -\frac{\dot{u}_\theta}{2r} = \frac{\sqrt{2}}{4r} \dot{u} \\
 \dot{u}_\theta &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \dot{u} \\
 \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} &= \sigma_{r\theta} \dot{\varepsilon}_{r\theta} + \sigma_{\theta r} \dot{\varepsilon}_{\theta r} = 2\sigma_{r\theta} \dot{\varepsilon}_{r\theta}
 \end{aligned}$$

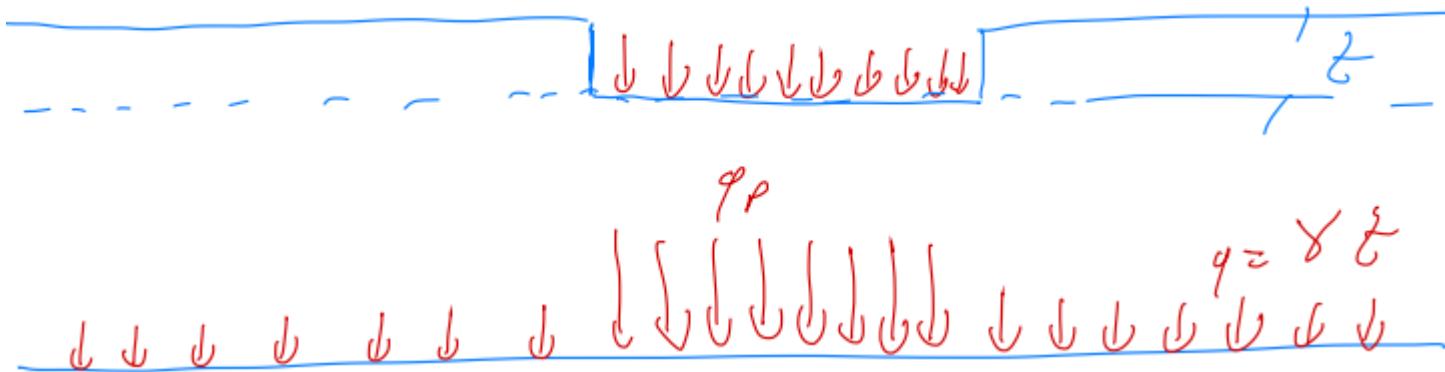


Figure 5.12: Sollicitations non drainées

$$P_{\widehat{OBC}} = \int_0^{R=b/\sqrt{2}} \int_0^{\pi/2} 2c \frac{\sqrt{2}}{4r} \dot{u} r dr d\theta$$

$$= b\dot{u}c \frac{\pi}{4} = P_{\widehat{AOE}}$$

Puissance dissipée totale

$$P_{\text{dissipée totale}} = 2(P_{AO} + P_{OC} + P_{CD}) + 2P_{\widehat{OBC}}$$

$$= b\dot{u}c(2 + \frac{\pi}{2}) + 2b\dot{u}c \frac{\pi}{4}$$

$$= b\dot{u}c(2 + \pi)$$

Équilibre

$$P_{\text{dissipée}} = P_{\text{ext}}$$

$$b\dot{u}c(2 + \pi) = q_p^+ b\dot{U}$$

$$q_p^+ = (2 + \pi)c$$

$$(2 + \pi)c \leq q_p \leq (2 + \pi)c$$

La solution exacte est trouvée car dans ce cas, la borne supérieure (cinématique) est égale à la borne inférieure (statique) et donc $q_p = (2 + \pi)c$. En pratique, pour les sollicitations non drainées, $q_p = (2 + \pi)c + q$ avec

$$N_c = (2 + \pi) \rightarrow \text{Semelle Lisse}$$

$$N_c = 5.71 \rightarrow \text{Semelle Rugueuse}$$

5.3 Formules générales

On compare la composante normale de la résultante des actions E_N à la résistance du sol au poinconnement $R_s = q_p \times A'$, où q_p est la capacité portante du sol (e.g. en Pa ou kPa) et A' est l'aire utile de la fondation superficielle.

5.3.1 Sollicitation drainée / Long-terme

La capacité portante d'une semelle superficielle s'écrit (généralisation du cas de base Terzaghi (1951))

$$q'_p = c' N_c s_c i_c b_c g_c d_c + q' N_q s_q i_q b_q g_q d_q + \frac{1}{2} \gamma b' N_\gamma s_\gamma i_\gamma b_\gamma g_\gamma d_\gamma$$

avec:

- c' : la cohésion drainée
- q' : la surcharge effective (de part et d'autre de la fondation)
- b' : la largeur utile
- $\{N_c, N_q, N_\gamma\}$: les facteurs de portance,
- $\{s_c, s_q, s_\gamma\}$: coefficients correcteurs de forme,
- $\{i_c, i_q, i_\gamma\}$: coefficients correcteurs d'inclinaison de la charge,
- $\{b_c, b_q, b_\gamma\}$: coefficients correcteurs d'inclinaison de la base de fondation,
- $\{g_c, g_q, g_\gamma\}$: coefficients correcteurs d'inclinaison du sol (par rappor à l'horizontale),
- $\{d_c, d_q, d_\gamma\}$: coefficients correcteurs du à la profondeur de la fondation;

5.3.1.1 Facteurs de portance

Pour une semelle rugeuse:

$$N_q = \frac{e^{(\frac{3\pi}{2} - \phi') \tan \phi'}}{2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi'}{2} \right)}, \quad N_c = (N_q - 1) \cot \phi', \quad N_\gamma = 2(N_q - 1) \tan \phi'.$$

Pour une semelle lisse:

$$N_q = e^{\pi \tan \phi'} \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi'}{2} \right), \quad N_c = (N_q - 1) \cot \phi', \quad N_\gamma = 1.8(N_q - 1) \tan \phi'.$$

On notera

$$\tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi'}{2} \right) = \frac{1 + \sin \phi'}{1 - \sin \phi'}$$

5.3.1.2 Coefficients correcteurs de forme

Pour une semelle rectangulaire ou circulaire (cf figure 1) - selon Brinch-Hansen (1970):

$$s_q = 1 + \frac{b'}{L'} \sin \phi', \quad s_c = \frac{s_q N_q - 1}{N_q - 1}, \quad s_\gamma = 1 - 0.4 \frac{b'}{L'} \geq 0.6.$$

Pour une semelle filante $b' \gg L'$:

$$s_q = 1, \quad s_c = 1, \quad s_\gamma = 1.$$

5.3.1.3 Excentricité de la charge appliquée

Lorsque la semelle est sollicitée par une charge excentrée dans soit une seule direction ou dans les deux directions, on calcule la largeur utile et la longueur utile comme suit (cf figure 2):

$$b' = b - 2e_b \text{ largeur utile}$$

$$L' = L - 2e_L \text{ longueur utile}$$

$$A' = L' b' \text{ surface utile}$$

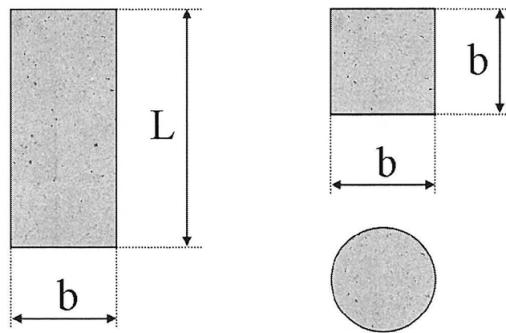


Figure 5.13: Semelle superficielle circulaire et rectangulaire de dimensions (b, L) et de dimensions utiles (b', L') .

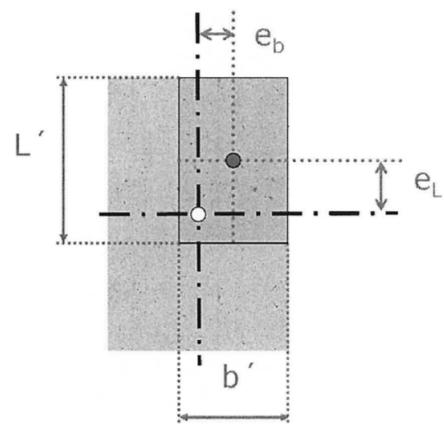


Figure 5.14: Excentricité de la charge par rapport au deux directions.



Figure 5.15: Deux cas d'inclinaison de charge horizontale

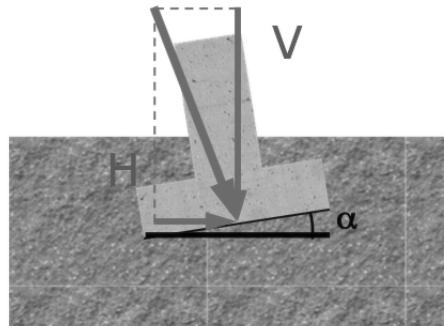


Figure 5.16: Inclinaison de la base par rapport à l'horizontale.

5.3.1.4 Inclinaison de la charge

Selon Vesic (1973), avec H composante horizontale de la résultante et V composante

$$i_q = \left(1 - \frac{H}{V + A'c' \cot \phi'}\right)^m, \quad i_c = i_q - \frac{1 - i_q}{N_c \tan \phi'}, \quad i_\gamma = \left(1 - \frac{H}{V + A'c' \cot \phi'}\right)^{m+1}.$$

Cas 1: H est la composante horizontale de la charge agissant dans la direction parallèle à la largeur b' de la fondation (cf figure 3)

$$m = m_b = \frac{2 + b'/L'}{1 + b'/L'}$$

Pour une semelle filante: $m = m_b = 2$.

Cas 2: H agit dans la direction parallèle à la longueur L' de la fondation (cf figure 3)

$$m = m_L = \frac{2 + L'/b'}{1 + L'/b'}$$

Cas 3: H agit dans la direction formant une angle θ avec la direction de longueur L' de la fondation

$$m \equiv m_\theta \equiv m_I \cos^2 \theta + m_b \sin^2 \theta.$$

5.3.1.5 Inclinaison de la base de la fondation

On considère α l'angle d'inclinaison de la base de la fondation par rapport à l'horizontale (cf figure 4) - α en radians

$$b_c = b_q - \frac{1 - b_q}{N \tan \phi'}, \quad b_q = b_\gamma = (1 - \alpha \tan \phi')^2.$$

5.3.1.6 Fondation en profondeur

On notera qu'en pratique, on ne conseille pas d'utiliser une correction pour une profondeur de l'assise de fondation D inférieure à 2 mètres.

Selon Brinch-Hansen, Vesic (1973),

$$\begin{aligned}
d_c &= d_q - \frac{1 - d_q}{N_c \tan \phi'} \quad d_\gamma = 1 \\
d_q &= 1 + 2 \tan \phi' (1 - \sin \phi')^2 \frac{D}{b'} \quad D \leq b' \\
d_q &= 1 + 2 \tan \phi' (1 - \sin \phi')^2 \text{ArcTan} \frac{D}{b'} \quad D > b'
\end{aligned}$$

5.3.1.7 Inclinaison du sol

Selon Brinch-Hansen (1970), pour une inclinaison ω de la surface du sol.

$$g_c = g_q - \frac{1 - g_q}{N_c \tan \phi'} \quad g_q = (1 - \tan \omega)^2 = g_\gamma$$

5.3.1.8 Présence d'une nappe

Figure 5 représente les 3 cas de présence d'eau: I) Niveau d'eau au dessous du mécanisme de rupture, II) Niveau d'eau affleurant la base de la fondation, et III) Niveau d'eau affleurant la surface du terrain.

5.3.2 Sollicitation non drainée / court terme

$$q_p = c_u N_c s_c i_c b_c d_c + q$$

avec: c_u la cohésion non drainée, q la surcharge de part et d'autre de la fondation et N_c le facteur de portance:

$$N_c = (2 + \pi) \text{ semelle lisse}$$

$$N_c = 5.71 \text{ semelle rugueuse}$$

s_c : coefficient correctif de forme rectangulaire et circulaire

$$s_c = 1 + 0.2 \frac{b'}{L'};$$

i_c : coefficient correcteur d'inclinaison de la charge

$$i_c = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{H}{A' c_u}} \right);$$

b_c : coefficient correcteur d'inclinaison de la base de fondation

$$b_c = 1 - \frac{2\alpha}{2 + \pi}.$$

g_c : coefficient correcteur pour une surface de sol inclinée (angle ω)

$$g_c = 1 - \frac{2\omega}{2 + \pi}$$

avec ajout d'un terme $-\omega\gamma b(1 - 0.4b'/L')$ dans l'équation de la capacité portante !

d_c : coefficient correcteur pour une assise de fondation à une profondeur D

$$\begin{aligned}
d_c &= 1 + 0.4 \frac{D}{b'} \quad (D \leq b') \\
d_c &= 1 + 0.4 \text{ArcTan} \frac{D}{b'} \quad D > b'
\end{aligned}$$

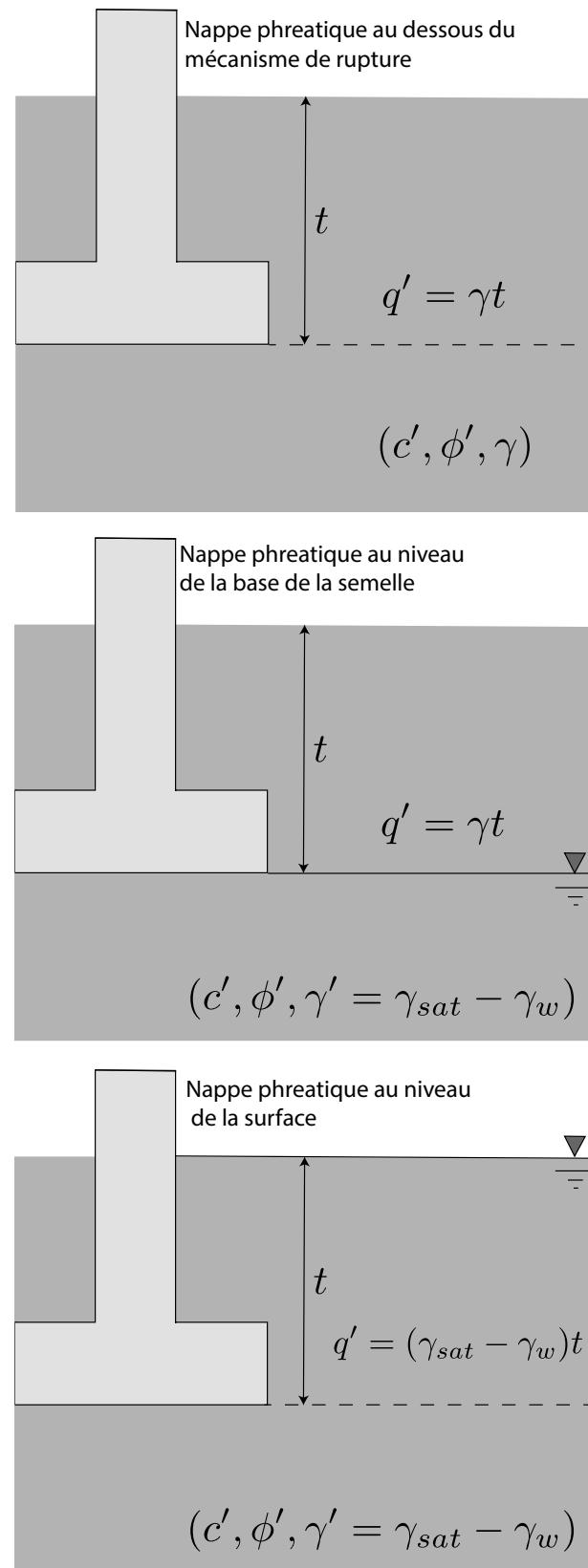


Figure 5.17: Influence de la nappe phréatique.

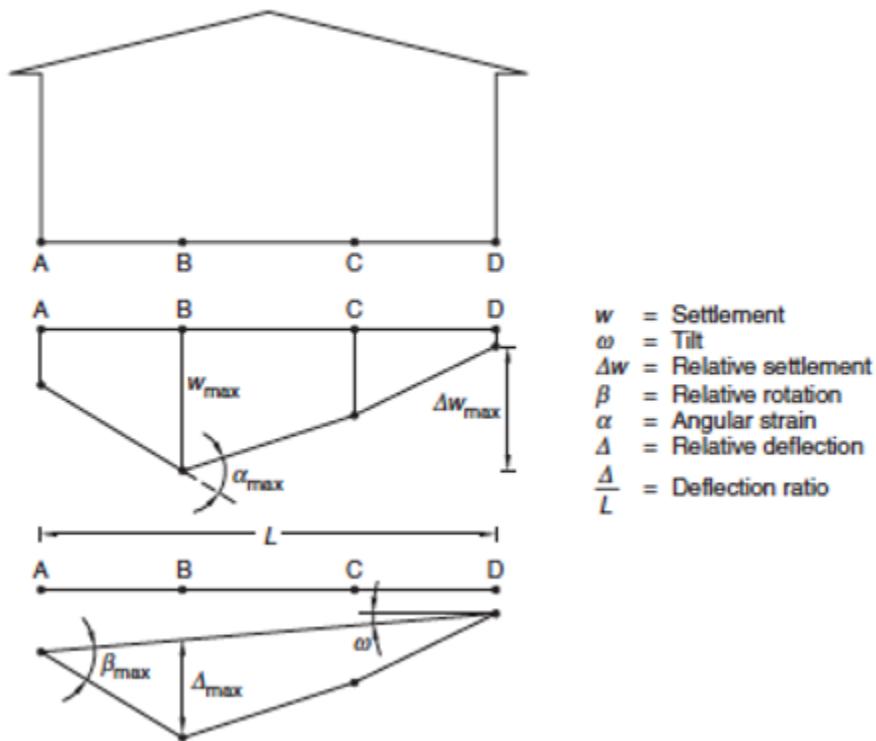


Figure 5.18: Schéma tassemens

<u>Tassemens totaux</u>	
Dispositif de drainage	15 à 30 cm
Problèmes d'accès	30 à 60 cm
Constructions en maçonnerie	3 à 5 cm
Structures en cadre	5 à 10 cm
Silos, radiers, cheminées	10 à 30 cm
<u>Tassemens différentiels</u>	
Murs en briques hauts et continus	1 mm/m
Structures en béton armé	3 mm/m
Structures métalliques simples	5 mm/m
<u>Inclinaison</u>	
Tour ou cheminée	4 mm/m
Stockage de denrées	10 mm/m
Grue sur voie de roulement	3 mm/m

Figure 5.19: Ordre de grandeurs des tassemens

5.4 Tassement des fondations superficielles

5.4.1 Ordre de grandeurs des tassements

5.4.2 Solutions de l'élasticité

5.4.3 Consolidation primaire

Let consider a soil volume V with porosity $n = V_v/V$ and void ratio $e = V_v/V_s = \frac{n}{1-n}$, intrinsic permeability κ . The soil is fully saturated with water (γ_w intrinsic weight of water, μ_w viscosity of water and β_w bulk compressibility of water). We will denote u as the pore-pressure.

Assuming first a linear elastic isotropic behavior, the strain ϵ_{ij} of the soil are related to the effective stress $\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - u\delta_{ij}$ (where $\delta_{ij} = 0$ $i \neq j$ and $\delta_{ii} = 1$):

$$\sigma'_{ij} = 2G\epsilon_{ij} + (K - 2/3G)\epsilon^v\delta_{ij}$$

or

$$\epsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma'_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma'_{kk}\delta_{ij}$$

where ϵ^v denotes the volumetric strain of the soil ($\epsilon^v = \epsilon_{kk}$, summation on repeated indices). Stress taken positive in compression, strain are positive in contraction. The “grains” of the soil are typically incompressible compared to the void space, such that the volumetric strain of the soil is directly the reverse of the variation of porosity:

$$\epsilon^v = -\Delta n$$

The soil is permeable and fully saturated with water. In order to grasp the flow of water (and therefore the variation of pore pressure), one needs to write the conservation of mass within the soil. For a unit soil elementary volume V , the variation of fluid content has two terms: i) the fluid can change if the pore pressure change (water compressibility) $nV\beta_w\Delta u$, and ii) the porosity (volume occupied by the fluid) can also change (due to the soil elastic deformation, i.e grain contacts etc.) $V\Delta n$. These variations occurring over a time increment Δt must balance the fluid entering minus exiting the elementary volume by fluid transport: $-\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right)V\Delta t$. The fluid mass conservation can be written as (taking the limit):

$$\frac{\partial n}{\partial t} + n\beta_w \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} = 0$$

The fluid velocity (w.r. to the solid phase) is related to the pore pressure gradient (and water weight) via Darcy's law:

$$\begin{aligned} q_x &= -\frac{\kappa}{\mu_w} \frac{\partial}{\partial x} (u + \gamma_w z) = -k \frac{\partial}{\partial x} h \\ q_y &= -\frac{\kappa}{\mu_w} \frac{\partial}{\partial y} (u + \gamma_w z) = -k \frac{\partial}{\partial y} h \\ q_z &= -\frac{\kappa}{\mu_w} \frac{\partial}{\partial z} (u + \gamma_w z) = -k \frac{\partial}{\partial z} h \end{aligned}$$

where κ is the soil intrinsic permeability (in square meter). Note that in soil mechanics, permeability are referred to as $k = \kappa\gamma_w/\mu_w$ (in m/s) - h is the hydraulic head $h = p/\gamma_w + z$.

5.4.3.1 Unidimensional (Oedometric) conditions

Let now consider the case where we have oedometric conditions (i.e. the soil can only compact in the z direction, the horizontal strains are null), such that we directly have:

$$\epsilon_{zz} = \epsilon^v = \frac{\sigma_{zz} - u}{K + 4/3G} = m_v(\sigma_{zz} - u)$$

i.e. $m_v = 1/(K + 4/3G)$.

Also, fluid can only flow in z direction. The fluid mass conservation thus reduces to:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{m_v}{m_v + n\beta} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} + \underbrace{\frac{k}{\gamma_w(m_v + n\beta)} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}_{c_v}$$

Let's now look at a simple case of practical relevance: a layer of soil of height L . We will assume drained conditions on $z = 0$: $u(0, t) = 0$ and a no flow boundary conditions at $z = L$: $\partial u / \partial z = 0$ (alternatively it can also be viewed as a symmetric boundary conditions for a layer of height $H = 2L$ and a drained condition at $z = H$). Now, let's assume that at $t = 0$, we apply a load $\sigma_{zz} = q$ at $z = 0$ and that we keep this load constant thereafter. Note that if the soil has an initial profile of vertical stress, it is just increased by q . Similarly there may be an initial pore-pressure such that we solve for variation from that initial state. For clarity, we take such an initial state as null: as the system is linear we can always add the initial state afterward.

$$\epsilon^v = m_v(q - u)$$

The initial strain of the soil layer and increase of pore-pressure due to the sudden loading at $t = 0^+$ can be obtained by integrating the continuity equation in time over a small time interval t_ϵ :

$$\Delta n = -n\beta_w u + \underbrace{\int_0^{t_\epsilon} \frac{k}{\gamma_w} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz}_{0 \text{ as } t_\epsilon \rightarrow 0}$$

as $\Delta n = -\epsilon^v = -m_v(\sigma_{zz} - u) = -m_v(q - u)$, we have

$$u = \frac{q}{1 + n\beta_w/m_v} (\approx q)$$

we see that if water is compressible ($\beta_w \approx 0$), the pore-pressure is equal to the applied load at $t = 0^+$. (nota $1/(1 + n\beta_w/m_v)$ is akin to a Skempton coefficient in oedometric conditions)

Pore-Pressure dissipation

The evolution of pore pressure in time, is governed by the following equation (as the load remains constant), initial and boundary conditions:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= c_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ u(z = 0, t) &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial z}(z = L, t) &= 0 \\ u(z, t = 0^+) &= \frac{q}{1 + n\beta_w/m_v} = u_u \end{aligned}$$

This partial differential equation is similar to the one obtained in heat conduction. It can be solved using separation of variables. Introducing the following scale coordinates and dimensionless time:

$$\xi = z/L \quad \tau = c_v t / L^2$$

the solution (using separation of variables and Fourier series for the spatial variation) is given as:

$$\frac{u(\xi, \tau)}{u_u} = \sum_{k=1, \dots, \infty} a_k \sin\left(\frac{k\pi}{2}\xi\right) \exp\left(-\frac{\pi^2 k^2}{4}\tau\right)$$

$$\frac{u(\xi, \tau)}{u_u} = \sum_{k=1,3,5, \dots, \infty} \frac{4}{\pi k} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\xi\right) \exp\left(-\frac{\pi^2 k^2}{4}\tau\right)$$

We see that $\lim_{\tau \rightarrow \infty} p(\xi, \tau) = 0$, i.e. the pore-pressure dissipates at large time, i.e. once all the fluid initially pressurized has been “drained” off the layer.

The vertical strain (=volumetric strain here) is given by

$$\epsilon_{zz}(\xi, \tau) = m_v(q - u(\xi, \tau))$$

such that the settlement of that layer is given by

$$\frac{\Delta H}{H} = \frac{1}{2} \int_0^2 \epsilon_{zz}(\xi, \tau) d\xi$$

$$\frac{\Delta H}{H} = m_v q \left(1 - \frac{1}{1 + n\beta_w/m_v} \sum_{k=1,3,5,\dots,\infty} \frac{16}{\pi^2 k^2} \sin\left(\frac{k\pi}{4}\right)^2 \exp\left(-\frac{\pi^2 k^2}{4}\tau\right) \right)$$

at large time

$$\frac{\Delta H}{H} = m_v q$$

Note that for a layered medium, under oedometric conditions, at large time, we can use the previous expression for each layers i and sum over each layer to get the total settlement.

IMPORTANT NOTE: under a finite foundation, the state of strain is not oedometric (there is some lateral deformation), so it is incorrect to use the previous expression if the foundation is not “wide”. Notably, if the foundation is not wide (compared to the depth of the most compliant layer) instead of $m_v = 1/(K+4/3G)$, in plane strain, under a foundation the elastic constant to use (drained) is $(1 - \nu^2)/E$. Note also that there are some shape factors to accomodate the fact that the foundation is finite in the other directions -> these factors are obtained from the integration of Boussinesq solution.

If the soil is multilayered, there is no direct solution (nota: elastic solution can be obtained using Hankel transform but they are complicated and semi-numerical). An approximation often used, is to estimate the vertical effective stress increment in each layer (using the elastic solution for a homogeneous half space loaded on its surface) and then approximate the layer settlement using a uni-dimensional relation (or in oedometric condition - no lateral deformation):

$$\frac{\Delta H_i}{H_i} = \frac{\Delta \sigma'_{zz}}{E_i}$$

This is an approximation! (to do it right, one must solve the real 2D/3D problem using numerical methods).

5.4.4 Non linear primary consolidation

In practice, a soil is not linearly elastic and in oedometric condition, one has the following volumetric constitutive relation

$$\epsilon = -\frac{\Delta e}{1+e} = \frac{C_c}{1+e} \log \frac{\sigma'}{\sigma'_o}$$

C_c is the compression index. (Here the Log is Log10)

i.e. the tangent modulus oedometric modulus is

$$\frac{d\sigma'}{d\epsilon} = \frac{C_c}{1+e} \sigma'$$

We will not derive the solution of pore-pressure dissipation in that case. However, we can obtained the drained (long term) settlement (under the approximation of oedometric conditions), if the soil was initially **only normally consolidated**, any additional load will make the soil deforms along the normal consolidation line (given by eq. with $\sigma'/\sigma'_o = q/\sigma'_o$ in drained conditions):

$$\epsilon = \frac{C_c}{1+e} \log \frac{\sigma'_o + q}{\sigma'_o}$$

If the soil is overconsolidated (i.e. has experienced in its past a vertical effective stress σ'_{vmax} larger than the current one at rest), the compression index is lower if the current effective stress state is lower than σ'_{vmax} , equals if larger than σ'_{vmax} .

Values:

Sol pré-consolidé:

$$\epsilon = -\frac{\Delta e}{1+e} = \frac{C_p}{1+e} \log \frac{\sigma'}{\sigma'_o} \quad \sigma' < \sigma'_{vmax}$$

$$\epsilon = \frac{C_p}{1+e} \log \frac{\sigma'_{vmax}}{\sigma'_o} + \frac{C_c}{1+e} \log \frac{\sigma'}{\sigma'_{vmax}} \quad \sigma' > \sigma'_{vmax}$$

$$OCR = \frac{\sigma'_{vmax}}{\sigma'_o}$$

Silt

$$C_c/(1+e) = 0.1 - 0.02$$

clay

$$C_c/(1+e) = 0.25 - 0.025$$

APPROXIMATION In a multilayered medium, we can approximate the state of stress “just under” the fondation as 1D (no lateral deformation), and approximate the vertical strain in the layer $\Delta H/H$ using the effective vertical stress at the middle of the layer:

$$\Delta H = \frac{C_c}{1+e} H \log \frac{\sigma'_v}{\sigma'_{v_o}}$$

where σ'_{v_o} is the initial stress at the middle of the layer (e.g. $= \gamma' z_{middle}$ if the water table is at $z = 0$ (and the medium uniform)). Then we can sum the displacement of all the layers.

$$w = \sum_i \Delta H_i$$

5.4.5 Secondary Consolidation

Settlement often continues even after the pore-pressure increases - undrained response due to the sudden application of the load- has been released (i.e. after full drainage). Settlement are often found to creep “logarithmically”:

$$\epsilon = \epsilon_p + \frac{C_\alpha}{1+e} \log \frac{t}{t_p}$$

where ϵ_p is the strain due to the primary consolidation, and t_p the time at which primary consolidation becomes negligible. The coefficient C_α is usually related to the compression index C_c , e.g. $C_\alpha \approx 2 - 3 10^{-2} C_c$ - exact value is soil dependent of course. Note that we can estimate it from the response of a “long” oedometric creep test.

If one wants to properly model such a time dependent behaviour, a proper viscoelastic or viscoplastic model would need to be fully characterized (using long lab tests with different stress path etc.)... although more scientifically sound, this is typically not realistic in practice. One can back-calculate the constant from in-situ observations or long oedometric tests.

5.4.6 Approche simplifiée pour l'estimation des tassements

...

Chapter 6

Fondations profondes

Pour déterminer si des fondations sont des fondations profondes, il faut répondre aux critères de classification suivants (issus ancienne norme SIA 191, Pieux):

- Mode de transmission des efforts au massif de fondation
- Effet sur le terrain encaissant
- Fonction mécanique
- Mode et moment de l'installation
- Mode de mise en place
- Mode de soutènement de la paroi du forage
- Matériau
- Destination

6.1 Différent types

On distingue plusieurs types de pieux pour les fondations profondes:

6.1.1 Pieux battus

Les pieux battus peuvent être en bois, acier ou béton. Pour chaque matériau, une utilisation est préconisée. Les pieux battus ont pour principaux avantages d'être économiques car ils sont rapidement mis en place. Il est aussi possible de les incliner jusqu'à 30/45°, ce qui est particulièrement intéressant pour reprendre des charges inclinées. Enfin, le refoulement du sol est favorable pour le dimensionnement. D'un autre côté, il faut prendre en compte les bruits et vibrations engendrées et le risque d'endommager les pieux pendant la mise en place. La manutention est également complexe.

6.1.1.1 Bois

Les pieux battus en bois conviennent pour des sols fins sous la nappe. Ils peuvent supporter des ouvrages provisoires ou des charges faibles: charge. Ces pieux ont une bonne résistance à la flexion et sont assez résistant (longue durée de vie) dans des sols immersés. Leur longueur est cependant limitée et ils sont susceptibles de se dégrader si ils sont soumis à des changements (immersés puis secs). Ils sont également plus fragiles lors du battage.

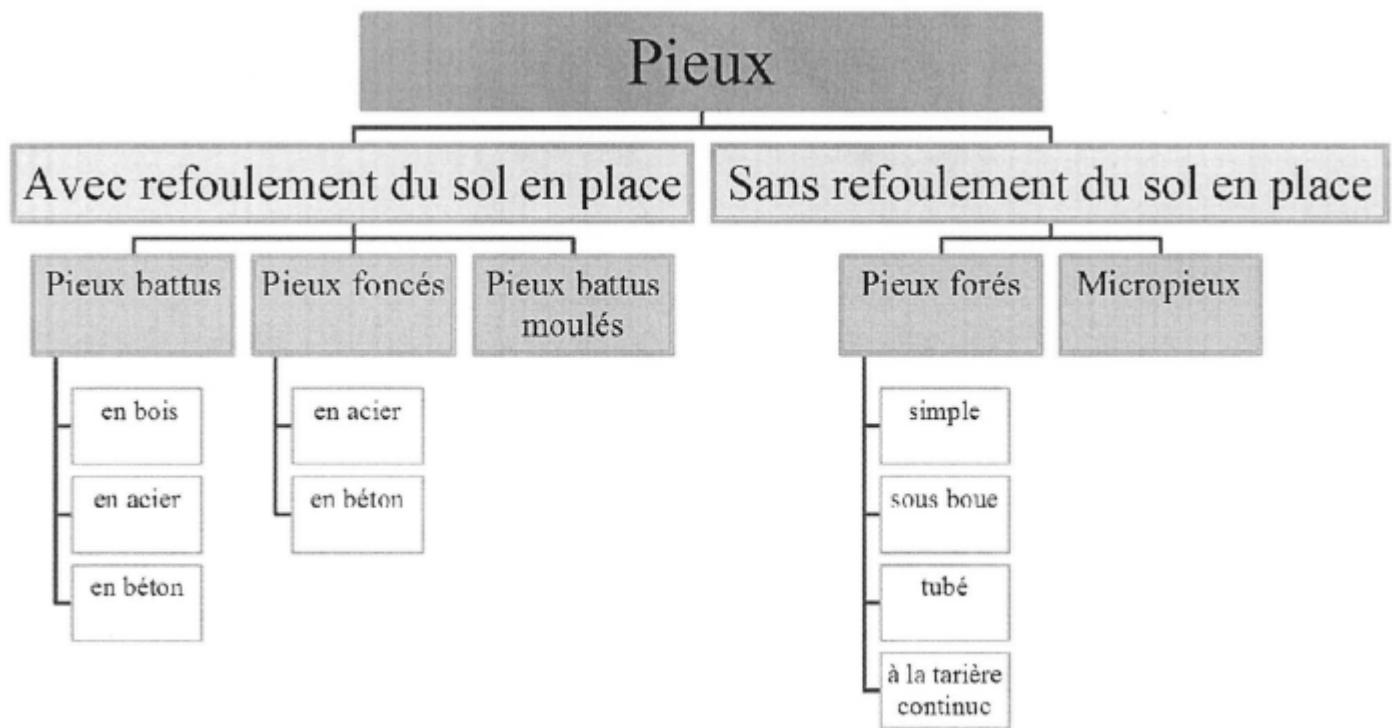


Figure 6.1: Classification des pieux pour fondations profondes

6.1.1.2 Acier

Les pieux en aciers sont principalement utilisés dans un sol qui repose sur un substrat compact, comme des rochers ou de la moraine. Le battage est aisé et le refoulement faible. De plus, leur résistance est élevée. En revanche leur coût est plus important et le risque de corrosion est élevé. Il peut également y avoir des vibrations si les profilés utilisés sont des tubes. Il existe différents types de profilés (tubes, poutrelles -profilé en H-, ciassons de palplanches).

6.1.1.3 Béton préfabriqué

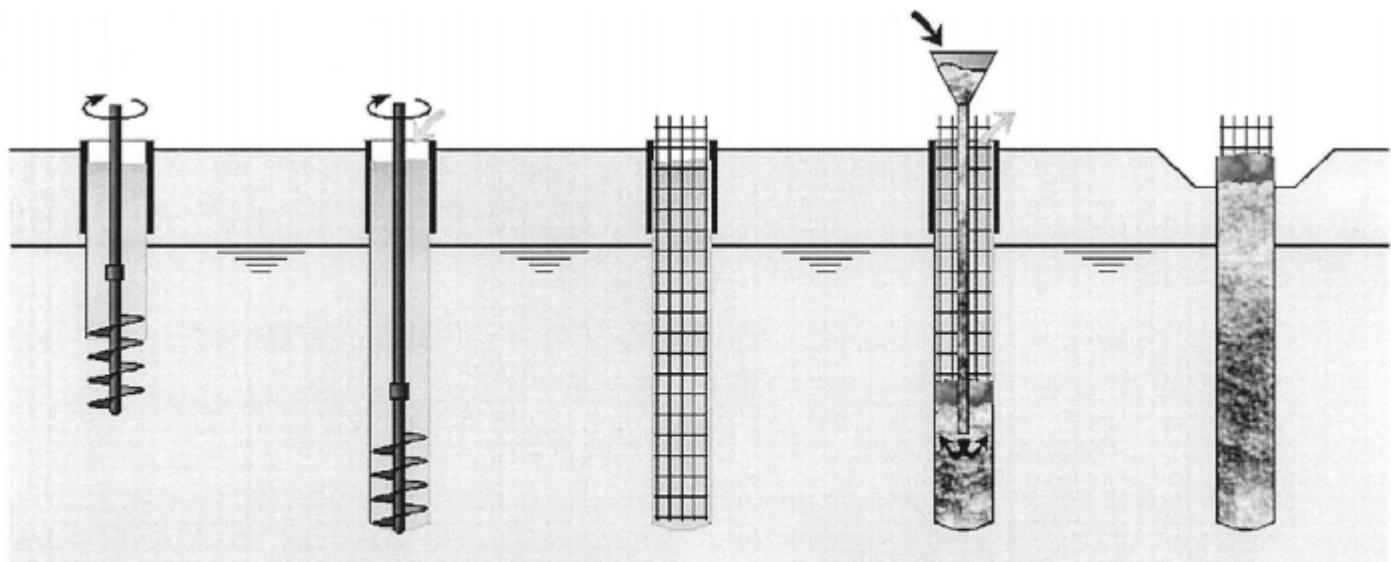
Les pieux en béton sont les plus performants dans des sols avec faible compacité (alluvions, sol morainique à faible compacité). Ce type de pieux peut supporter des charges importantes et est résistant à la corrosion et à la flexion. Toutefois, les pieux sont lourds et fragiles. Ainsi, lors de battages complexes, les têtes peuvent être détruites, sans compter le bruit occasionné et les vibrations. Il existe plusieurs types de pieux en béton en fonction de leur dimensions et résistances.

6.1.2 Pieux forés

Tout comme les pieux battus, il existe différents types de pieux forés. On distingue les pieux forés sous boue, les pieux forés tubés et les pieux forés à la tarière continue. Contrairement aux pieux battus, les pieux forés n'engendrent pas ou très peu de vibrations et bruits. Il est possible de passer des obstacles et des horizons plus durs. Les diamètres peuvent également être augmentés ce qui permet d'accroître la capacité portante. En revanche, l'inclinaison de tels pieux est plus complexe (même impossible), l'exécution est délicate à cause du curage/bétonnage et il est compliqué de vérifier la capacité portante à l'exécution. De plus, le rendement de mise en oeuvre est plus faible que celui des pieux battus.

6.1.2.1 Pieux forés sous boue

Ce type de pieux est adapté pour des terrains pulvérulents (facilement friable, peut devenir de la poudre) en dessous de la nappe phréatique. La réalisation des pieux forés sous boue s'apparente à celle des pieux forés simples. La principale différence est liée à l'ajout de boue bentonique qui assure la stabilité du trou de forage.



Forage	Curage du fond	Introduction cage d'armature	Bétonnage (de bas en haut)	Recépage de la tête
--------	-------------------	---------------------------------	----------------------------------	------------------------

Figure 6.2: Pieux forés sous boue

6.1.2.2 Pieux forés tubés

Pour les pieux forés tubés, la stabilité du trou de forage est assurée par un tubage en métal. Ces pieux présentent l'avantage d'être utilisables dans tous types de terrain.

6.1.2.3 Pieux forés à la tarière continue

Cette technique se distingue sensiblement des autres. Elle suit le déroulement suivant:

1. Le forage est effectué à l'aide d'une tête de rotation (moteur hydraulique) qui entraîne une tarière creuse et un tube plongeur. Possibilités d'ancrage dans les couches dures ou mi-dures
 2. Le forage terminé, le tube est bloqué. La tarière remonte légèrement et le béton est injecté dans le système via le tube plongeur.
 3. Le bétonnage continue jusqu'à ce que le tube plongeur soit sorti.
 4. Les cages d'armatures restent à être installées dans le béton frais.

6.2 Estimation de la capacité portante d'un pieu isolé sous chargement axial

6.2.1 Mécanismes de rupture et facteur influençant la capacité portante

Le mécanisme de rupture n'est aussi net que sous une fondation superficielle. De nombreux "modèles" ont été proposés - ils sont tous assez incertains et des résultats très différents peuvent être obtenus: l'incertitude sur ces modèles est plus importante que sur les propriétés du sol !

Pour un pieu, en plus d'un terme de résistance en pointe, vient s'ajouter l'effet du frottement le long du périmètre externe du pieu (fut). On calculera toujours le pourcentage repris en pointe et par frottement.

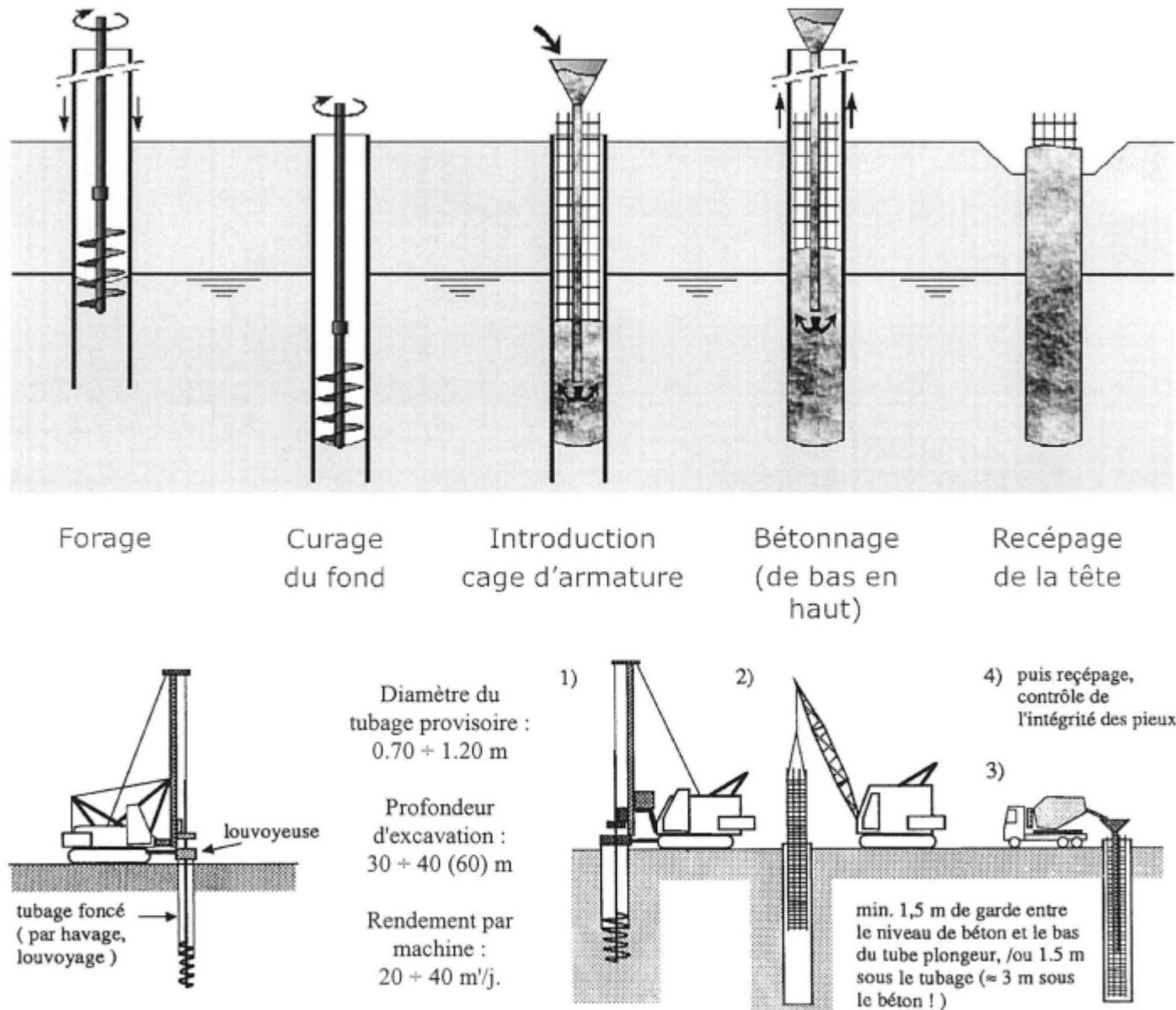


Figure 6.3: Pieux forés tubés

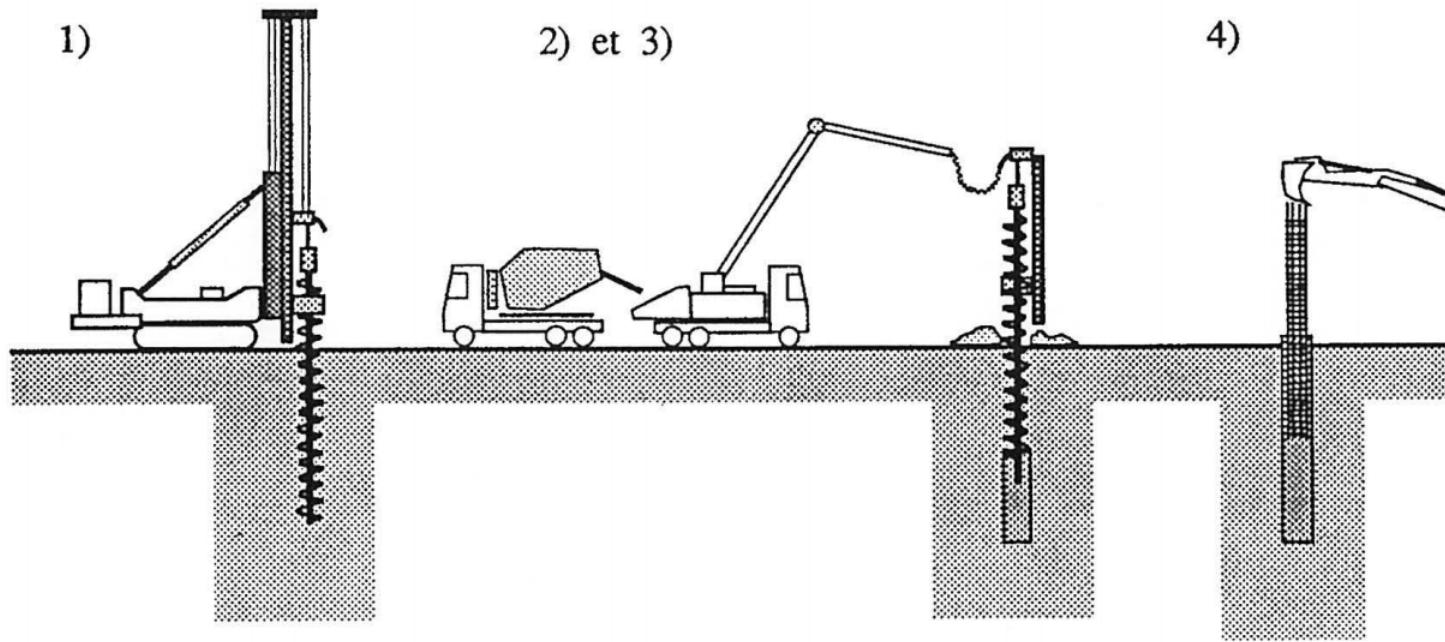


Figure 6.4: Pieux forés à la tarrière continue

Résistance de pointe

Un premier type de modèle estime la résistance de pointe à partir des formules des fondations superficielles. Lorsque que la profondeur du pieu augmente, la résistance de pointe augmente donc linéairement avec ce type de modèle. Or, en réalité, la résistance n'augmente plus au delà d'un profondeur "critique" L_c . Cette profondeur critique dépend du diamètre du pieu, de la nature et de la compacité du sol.

Un deuxième type de modèles de résistance de pointe (de Beer, Jaky, Meyerhoff) se basent sur un mécanisme de poinconnement généralisé qui se referme sur le pieu (cf. figure). Au delà d'une profondeur critique la résistance de pointe devient constante. Des expressions analytiques et approximées de L_c existent: $L_c = D \exp \pi \tan \phi' \times \tan \pi/4 + \phi'/2$, ou $L_c \approx D \times (2 + \phi'/8)$.

Un troisième type de modèle de résistance de pointe se base sur un poinconnement localisé sous la pointe de telle sorte que la résistance de pointe est indépendante de la longueur (profondeur du pieu).

6.2.1.1 Facteurs influençant

Résistance de pointe unitaire:

- le type de sol: propriétés de rupture ($c', \phi' - c_u$), les contraintes initiales in-situ vertical
- les caractéristiques du pieu: rapport diamètre/longueur (longueur critique)
- la mise en œuvre du pieu: la modification des contraintes sous la pointe n'est pas la même pour des pieux forés ou battus

Résistance de frottement latéral unitaire:

- le type de sol:
- la mise en œuvre du pieu: avec ou sans refoulement du sol. $\sigma'_h = K \sigma'_v$, avec $K_o < K < K_p$ pour des pieux avec refoulement, et $K_a < K < K_o$ pour des pieux sans refoulement

6.2.2 DTU

6.2.2.1 Sols pulvérulents

On considère aussi dans cette partie les sols cohérents pour le long terme.

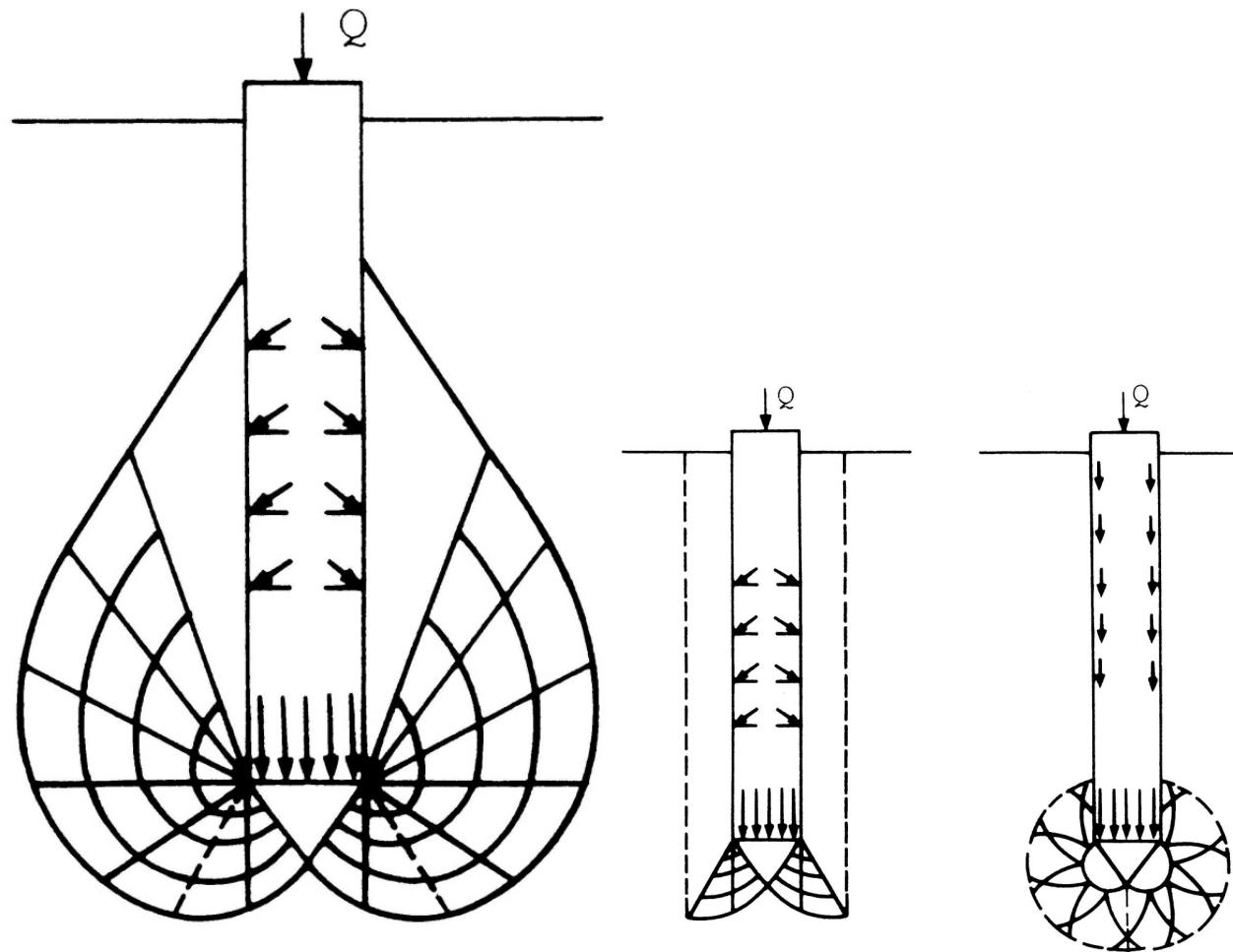


Figure 6.5: Mécanismes: de poinçonnage généralisé se refermant autour du pieu (à gauche), poinçonnage local en pointe (milieu et droite).

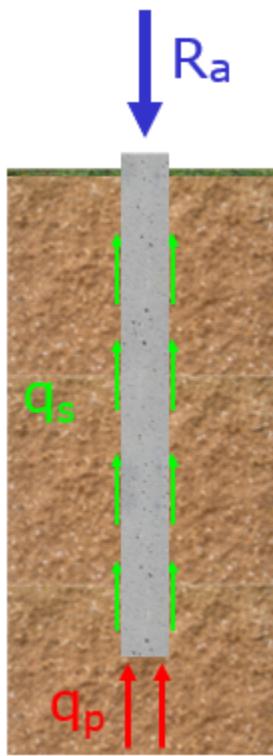


Figure 6.6: Capacité portante d'un pieu en sol pulvérulent

- La résistance en point unitaire q_p est indépendante de la longueur/profondeur du pieu
 - $N_{q_{max}} = 10^{3.04} \tan \phi'$ selon Tcheng
 - $N_c = (N_{q_{max}} - 1) \cotan \phi'$
 - $\lambda = 1 + 0.3(B/D)$, le coefficient de forme

$$q_p = 50N_{q_{max}} + \lambda \cdot c' \cdot N_c$$

- La résistance au frottement latéral unitaire q_s
 - Pieux forés : $K_a < K < K_0$
 - Pieux battus : $K_0 < K < K_p$
 - $\delta = \phi'$
 - * Béton : $\delta = \frac{2}{3}\phi'$
 - * Acier : $\delta = \frac{1}{2}\phi'$

$$q_s = \sigma'_v \cdot K \cdot \tan \delta$$

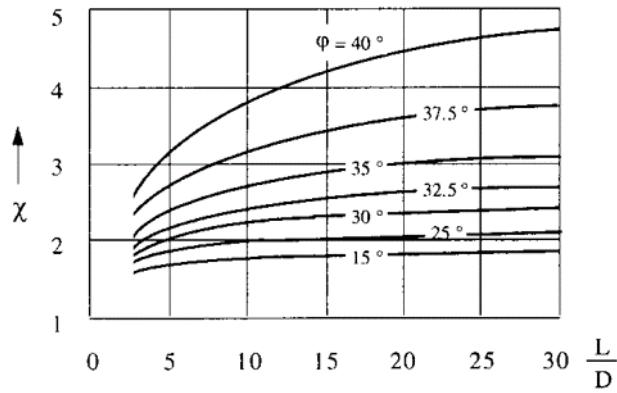
$$R_a = Q_u = R_b + R_s = A_p q_p + U_p L q_s$$

6.2.2.2 Sols cohérents (court terme)

- La résistance en point unitaire q_p
 - $\lambda = 1 + 0.3(B/D)$, le coefficient de forme

$$q_p = 7\lambda \cdot c_u$$

- La résistance au frottement latéral unitaire q_s

Figure 6.7: Facteur de profondeur, χ

- Pieux forés : $\beta = 0.5 \div 0.7$
- Pieux battus : $\beta = 0.7 \div 1.0$

$$q_s = \beta \cdot c_u$$

$$R_a = Q_u = R_b + R_s = A_p q_p + U_p L q_s$$

6.2.3 Lang & Huder

6.2.3.1 Sols pulvérulents

On considère aussi dans cette partie les sols cohérents pour le long terme.

- La résistance en point unitaire q_p

- $N_q = e^{\pi \tan \phi'} \tan^2(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi'}{2})$
- $N_c = (N_q - 1) \cotan \phi'$
- χ , le facteur de forme et de profondeur

$$q_p = (c' \cdot N_c + \sigma'_{v,pointe} \cdot N_q) \chi$$

- La résistance au frottement latéral unitaire q_s

- Pieux forés : $K \tan \delta' \approx 0.4$
- Pieux battus : $K \tan \delta' \approx 0.8$

$$q_s = c' + \sigma'_{v,moyen} \cdot K \cdot \tan \delta$$

$$R_a = Q_u = R_b + R_s = A_p q_p + U_p L q_s$$

6.2.3.2 Sols cohérents (court terme)

- La résistance en point unitaire q_p

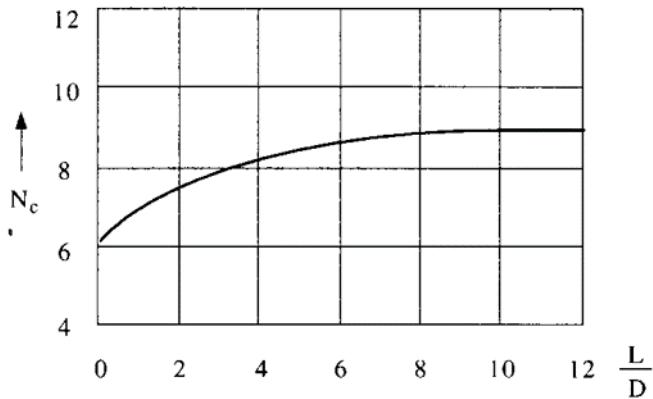
$$q_p = c_u \cdot N_c$$

- La résistance au frottement latéral unitaire q_s

- Pieux forés : $s \approx 0.6 \div 0.9 c_u$, adhésion pieu-sol
- Pieux battus : $s \approx c_u$

$$q_s = \bar{s}$$

$$R_a = Q_u = R_b + R_s = A_p q_p + U_p L q_s$$

Figure 6.8: N_c facteur de portance et profondeur

6.2.4 Formules de Battage

6.2.4.1 Formule des Hollandais

On dérive dans un premier temps la formule de battage la plus simple possible (aussi appelée formule des hollandais). Dans ce qui suit, on note

- P_D le poids du mouton
- P_c le poids du casque
- P_p le poids du pieu

On s'intéresse à la relation entre l'enfoncement du pieu, que l'on note ici s , et la réaction dynamique du sol Q_{dyn} due au choc du mouton. Dans un premier temps, en appliquant l'équation de la dynamique au mouton, on détermine facilement la vitesse V_0 du mouton lors de l'impact avec le casque. En effet, pour une hauteur de chute h , l'intégration de l'accélération du mouton en chute libre

$$\frac{dV}{dt} = g$$

donne

$$h = \frac{1}{2}gt_{impact}^2 \rightarrow t_{impact} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

soit

$$V_0 = gt_{impact} = g\sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2gh}.$$

Au moment de l'impact, en considérant l'hypothèse d'un choc mou (sans rebond), la conservation de la quantité de mouvement s'écrit

$$P_D \cdot V_0 = (P_D + P_c + P_p) \cdot V'_0$$

On notera par la suite $\bar{P} = P_D + P_c + P_p$, la vitesse après impact V'_0 est donc:

$$V'_0 = \frac{P_D}{\bar{P}} \cdot V_0 = \frac{P_D}{\bar{P}} \cdot \sqrt{2gh}$$

. Ensuite l'équilibre du pieu (mouton, casque) s'enfonçant dans le sol, s'écrit donc:

$$\sum F = m \frac{dV}{dt} \quad \bar{P} - Q_{dyn} = \frac{\bar{P}}{g} \frac{dV}{dt}$$

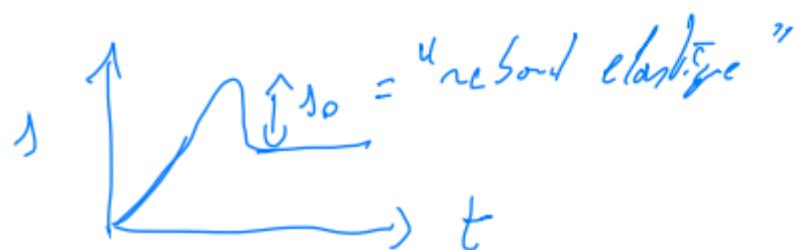
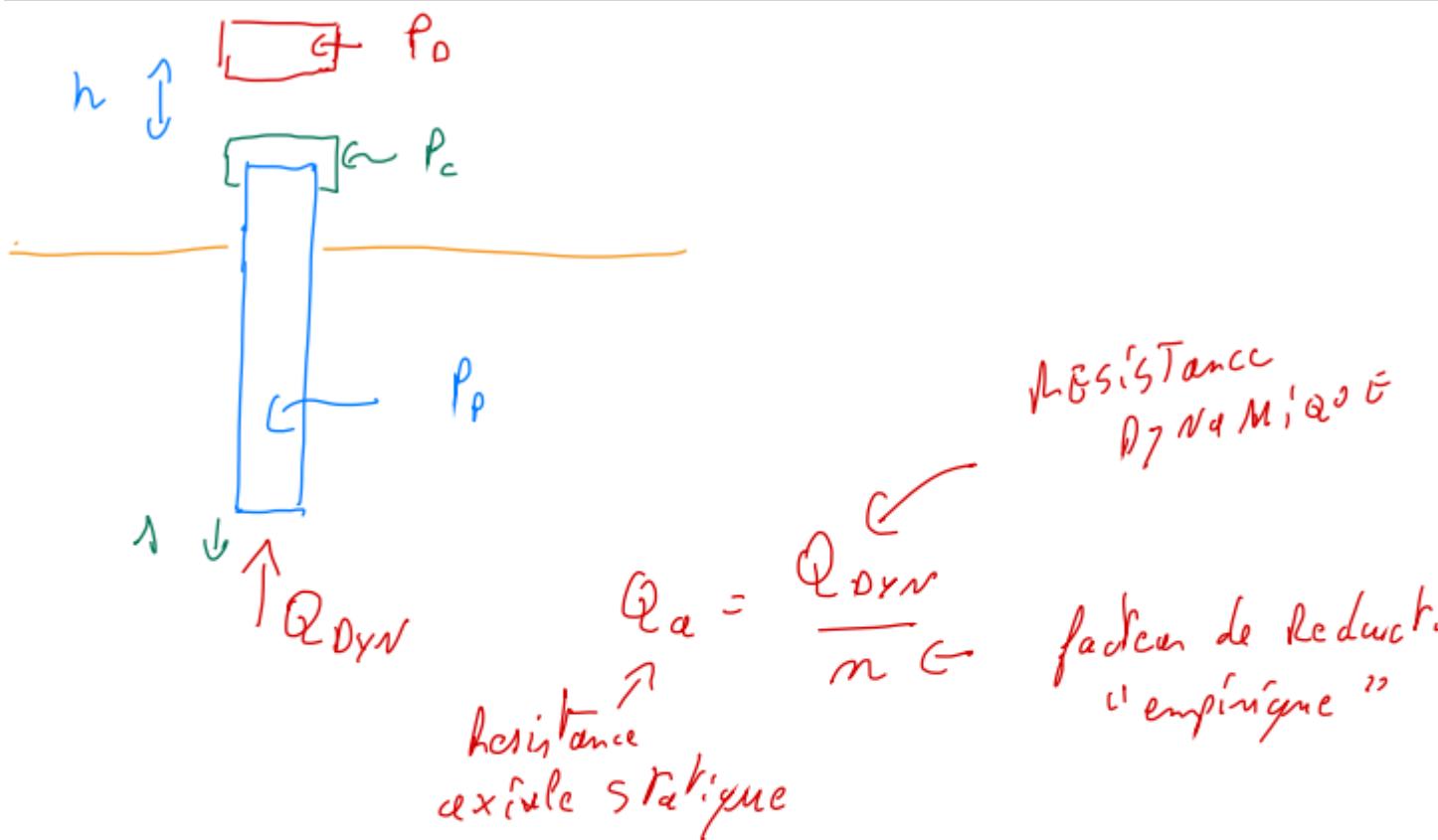


Figure 6.9: Répartition des charges sur un pieu

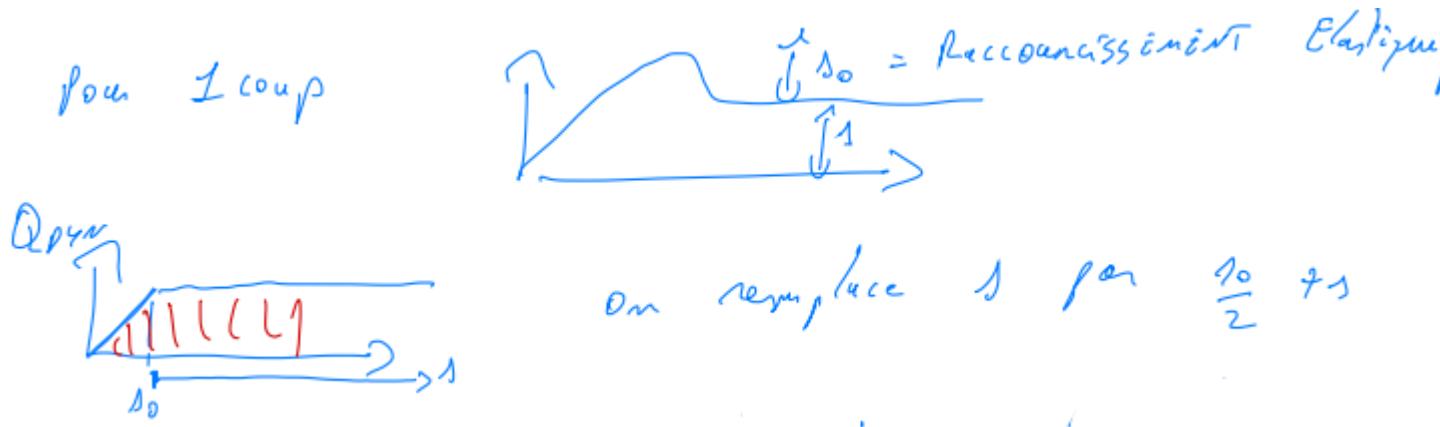


Figure 6.10: Élasticité du pieu

En négligeant le poids du système \bar{P} par rapport à la réaction dynamique du sol Q_{dyn} (dans les forces appliquées), on obtient - en prenant pour l'origine des temps, le moment de l'impact:

$$V(t) = V'_0 - Q_{dyn} \frac{gt}{\bar{P}}$$

$$s(t) = V'_0 t - \frac{1}{2} Q_{dyn} \frac{gt^2}{\bar{P}}$$

Le pieu s'arrête lorsque $V(t_a) = 0$, soit en $t_a = \frac{V'_0 \bar{P}}{Q_{dyn} g}$, et l'enfoncement correspondant $s(t_a)$

$$s(t_a) = s = \frac{1}{2} \frac{V'_0^2 \bar{P}}{g Q_{dyn}}$$

que l'on peut re-écrire

$$Q_{dyn} = \frac{h}{s} \frac{P_D^2}{\bar{P}}$$

6.2.4.2 Formule générales

En partant de la charge dynamique donnée auparavant, les formules des Hollandais permettent d'estimer la capacité portante statique.

$$Q_{dyn} = \frac{h P_D^2}{s \bar{P}}$$

$$Q_A = \frac{Q_{dyn}}{n}$$

$n = 6$ uniquement lorsque l'on utilise la **formule des Hollandais**. Si on souhaite ré-écrire l'expression en terme énergétique: $Q_{dyn} \cdot s = h \frac{P_D^2}{\bar{P}}$ où $Q_{dyn} \cdot s$ représente l'énergie utile. L'énergie de battage est représentée par $P_D h$, l'énergie perdue vaut $h P_D \frac{\bar{P} - P_D}{\bar{P}}$.

$$P_D h = Q_{dyn} \cdot s + h P_D \frac{\bar{P} - P_D}{\bar{P}}$$

On prend maintenant en compte l'élasticité du pieu. (réf figure ci-dessous)

On remplace $s \rightarrow \frac{s_0}{2} + s$ comme montré sur le schéma ci-dessus. Ainsi, $Q_{dyn} \left(s + \frac{s_0}{2} \right) = h \frac{P_D^2}{\bar{P}}$.

Estimation du raccourcissement élastique s_0 Pour $s = 0$ on a $Q_{dyn} = \frac{2}{s_0} \frac{h P_D^2}{\bar{P}}$

Elasticité du pieu

$$\begin{aligned}\frac{s_0}{2} &= \frac{Q_{dyn}}{A_P E_P} \\ s_0^2 &= \frac{2LhP_D^2}{A_P E_P \bar{P}} \\ s_0 &= \sqrt{\frac{L}{A_P} \cdot \frac{2hP_D^2}{E_P \bar{P}}}\end{aligned}$$

- E_P , module élastique du pieu
- A_P , aire du pieu

$Q_A = \frac{Q_{dyn}}{n}$ avec $n = 4$ pour la **formule de Crandall**.

6.2.4.3 Équation générale

$$\eta P_D h = (Q_{dyn} - (P_D + P_C + P_C))s + \eta P_D h \frac{(P_D + P_C)(1-e^2)}{\bar{P}} + \mu Q_{dyn}^2 \frac{L}{A_P E_P}$$

- $\eta P_D h$, énergie de battage où ζ correspond au rendement de battage $0.75 \leq \eta \leq 1$.
 - $(Q_{dyn} - (P_D + P_C + P_C))s$, l'énergie utile.
 - $\eta P_D h \frac{(P_D + P_C)(1-e^2)}{\bar{P}}$, la perte d'énergie due au choc.
- e le coefficient de résistivité du choc, $e = 0$ pour un choc mou. $e = 1$ pour un choc élastique

$\zeta = 1$	Énergie utile	Perte dûe au choc	Élasticité du pieu	n
Hollandais	$Q_{dyn} \cdot s$	$e = 0$, mou	Non, $\mu = 0$	6
Crandall	$Q_{dyn} \cdot s$	$e = 0$, mou	$\mu = 0.5$	4
Stern	$(Q_{dyn} - \bar{P})s$	$e \neq 0$	$\mu = 0.5$	3

$$Q_A = \frac{Q_{dyn}}{n}$$

6.2.4.4 Applications

Diagramme de battage Projet pour lequel on désire un Q_A donné. On choisit la formule de Crandall, soit $Q_A = \frac{Q_{dyn}}{n}$ avec $n = 4$.

$$\begin{aligned}Q_{dyn}(s + \frac{s_0}{3}) &= h \cdot \frac{P_P^2}{\bar{P}} \\ s &= \frac{h}{Q_{dyn}} \frac{P_P^2}{\bar{P}} - \frac{s_0}{2}\end{aligned}$$

On estime Q_{dyn} ainsi que $\frac{s_0}{2}$.

6.3 Essai de chargement statique

6.4 Groupe de pieux

6.5 Frottement négatif

On appelle frottement négatif, une inversion du signe de la contrainte de cisaillement agissant le long du fût du pieu (par rapport à la suite initiale). Un telle inversion va se produire si le tassement du sol aux alentours du pieu est plus grand que le tassement du pieu.

Ce phénomène se développe dans le temps lié au tassement du sol. Il est donc maximal à long terme.

La conséquence est une surcharge du pieu, notamment pour les pieux colonnes. Pour les pieux flottants, cette surcharge induit des tassements additionnels.

6.5.1 Estimation du frottement négatif

6.5.1.1 Sur toute la hauteur de la couche compressible

Le frottement négatif s'applique sur toute la hauteur de(s) couche(s) compressibles. En notant q la surcharge sur le sol au niveau de la couche compressible (de part et d'autre du pieu mais n'agissant pas sur le pieu), le frottement négatif unitaire q_{sn} est simplement donnée par la contrainte effective horizontale fois le coefficient de friction de l'interface

$$q_{sn} = \sigma'_h(z) \tan \delta = (q + \gamma'(z - z_c))K(z) \tan \delta$$

où q est la charge sur la couche compressible en $z = z_c$. On intègre donc en suite sur toute la couche compressible pour obtenir l'effort (surcharge du pieu) résultant agissant sur le pieu:

$$Q_{sn} = \pi D \int_{z_c}^{z_c+H} q_{sn}(z) dz$$

	argiles molles/ sol organique	argiles raides	sables & graves
pieu foré	0.15	0.2	0.35
foré tubé	0.1	0.15	
Pieu battu	0.2	0.3	0.45

Table 6.1: Valeurs “typiques” de $K \tan \delta$ pour l'estimation du frottement négatif

6.5.1.2 Sur une partie de la hauteur de la couche compressible

Le frottement négatif ne se développe pas forcément sur toute la hauteur de la couche compressible. On peut estimer une profondeur sur laquelle le frottement négatif agit comme suit.

1. On estime le profil du tassement du pieu $u_p(z)$ en fonction de la charge appliquée en tête
2. le profil du tassement du sol $u_s(z)$ en fonction de la charge appliquée sur le sol (mais pas sur le pieu)

La profondeur pour laquelle $u_p(z = h) = u_s(z = h)$ définit la limite entre les zones de frottement négatif ($z < h, u_p < u_s$) et de frottement positif ($z > h, u_p > u_s$). On estime ensuite la résultante du frottement négatif (effort de tension dans le pieu) comme précédemment.

6.5.1.3 Effet d'accrochage du sol autour du pieu

Il y existe une zone de transition entre le pieu et le sol : la contrainte effective σ'_h à l'interface du sol-pieu est plus faible que la contrainte effective “loin du pieu”. Il existe des méthodes empiriques pour prendre cet effet en compte (correction qui tend à diminuer l'effet du frottement négatif).

6.6 Méthodes aux modules de réactions - sollicitations mixtes

Avant de passer à l'évaluation des tassements d'un pieu, on introduit la méthode dites des modules de réactions. Cette méthode “modélise” le comportement du sol par un loi “local” de type ressort et modélise les éléments de structures avec une approche classique (théorie des poutres, plaques). Cette méthode peut donc être utilisée pour de nombreuses applications d'interactions sols-structures.

Cette approche permet de coupler facilement un code de calcul de mécanique des structures avec la “réaction” du sol. En revanche, il convient de se rappeler qu'intrinsèquement une telle approximation ne prend pas en compte le fait que les déformations d'un milieu continu ne sont pas simplement “local” : les contraintes induites se transmettent sur des longues distances.

De nombreuses “lois” empiriques pour les modules de réactions du sol ont donc été “développées” dans la pratique.

6.6.1 Théorie des poutres

6.6.1.1 Equilibre

On considère un élément de structure élancé (poutres, pieu etc.) droite selon \mathbf{e}_1 , ayant une section $S(x_1)$ dans un mouvement plan du type $\mathbf{u} = u_1(x_1, x_2)\mathbf{e}_1 + u_2(x_1, x_2)\mathbf{e}_2$. On note N l'effort normal, T l'effort tranchant et M le moment fléchissant (par rapport au :

$$N = \int_S \sigma_{11} dS \quad T = \int_S \sigma_{12} dS \quad M = \int_S x_2 \sigma_{11} dS$$

les équations d'équilibres quasi-statique se réduisent à

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dx_1} + f_1(x_1) &= 0 \\ \frac{dT}{dx_1} + f_2(x_1) &= 0 \\ \frac{dM}{dx_1} + T &= 0 \end{aligned}$$

où f_2 dénote la distribution de pression appliquée sur la surface externe S de la structure élancé dans la direction normal , et f_1 la distribution de pression tangentielle. Dans la méthode des modules de réactions, on va relier ces distributions d'efforts au déplacement relatif de la structure et du sol (& un module de réaction du sol).

6.6.1.2 Loi de comportement de la poutre

Le déplacement dans un mouvement plan est du type

$$\mathbf{u} = (u_1(x_1) + \theta(x_1)x_2)\mathbf{e}_1 + u_2(x_1)\mathbf{e}_2$$

i.e.

$$\epsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \theta}{\partial x_1} x_2 \quad \epsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \theta \right)$$

de plus pour une poutre droite la rotation local θ est égal à (relation géométrique)

$$\theta = \frac{\partial u_2}{\partial x_1}$$

Elasticité linéaire donne les relations de comportements:

- Traction-compresssion

$$N = ES \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$$

avec E le module d'élasticité.

- Flexion avec $I = \int_S x_2^2 dS$ moment quadratique par rapport à x_3

$$M = EI \frac{\partial \theta}{\partial x_1} = EI \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2}$$

- Cisaillement

$$T = 2\mu S \frac{\partial u_2}{\partial x_1}$$

On notera que la convention de la théorie des poutres est celle de la mécanique des milieux continus.

Notation usuelles en géotechniques:

On notera par la suite $u_1 = u$ et $u_2 = v$. De plus souvent, pour des éléments type pieu ou paroi verticale, on aura $x_1 = z$. De même pour les distributions de forces appliquées, on notera $f_1 = f$ et $f_2 = r$

6.6.2 Reactions du sol

Prenons l'exemple d'un pieu dans un sol homogène ayant une sollicitation purement horizontal en tête H , on va modéliser la réaction horizontale du sol comme étant fonction du déplacement horizontal du pieu dans le sol. On écrit

$$r(z) \equiv r(z, v(z))$$

Modélisant la reaction du sol en faisant l'hypothèse d'élasticité:

$$r = k_n(z) \times v(z)$$

On peut étendre la modélisation au cas plastique en introduisant une limite d'élasticité pour cette réaction - au delà de laquelle elle devient constante. Par exemple, pour un modèle de type elastoplastique parfait, on écrit ensuite $r = r_Y$ pour $v > v_L$. En résumé:

$$r = \begin{cases} k_n(z) \times v(z) & v < r_Y/k_n \\ r_Y & v > r_Y/k_n \end{cases}$$

Utilisant la théorie des poutres, la loi de comportement de la poutre, la loi de reaction du sol et les conditions aux limites (encastrement, effort donnée etc.), on peut résoudre pour la déformée et les efforts dans la structure.

6.7 Tassement des fondations profondes

6.7.1 Estimation basée sur les modules de réactions / cambefort-cassan

Dans le cas d'un pieu chargé seulement axialement, l'équilibre du pieu se réduit à celui de l'effort normal:

$$\frac{dN}{dx} + f(x) = 0$$

la distribution de pression tangentielle au pieu provient de la résultante du frottement latéral autour du pieu (qui agit dans le sens opposé à l'axe x): $f = -\pi D q_s$. En introduisant le comportement du pieu, on obtient

$$\frac{\pi D^2}{4} E_p \frac{d^2 u}{dx^2} - \pi D q_s = 0$$

Dans le domaine des charges de services, les observations faites lors d'essais de chargement statique par Cambefort, on montré que l'on pouvait décrire la mobilisation du frottement latéral par un ressort élastique

$$q_s = Bu \quad B : [\text{Pa}/L]$$

De la même manière, la réaction en pointe est décrite par un loi linéaire:

$$R_p = -N(x = L) = \frac{R}{D} u(x = L).$$

R a la dimension d'une contrainte.

En introduisant la mobilisation du frottement latéral dans l'équation d'équilibre pour l'effort normal, on obtient l'ODE

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - a^2 u(x) = 0 \quad a = \sqrt{\frac{4B}{E_p D}}$$

qui admet une solution homogène sous la forme

$$u = C_1 \exp(ax) + C_2 \exp(-ax)$$

Les constantes d'intégrations sont obtenus à partir des conditions aux limites:

- En tête du pieu ($x = 0$), pour une charge compressive axial P (dans le domaine des charges de services)

$$-P = N(x = 0) = \frac{E_p}{\pi D^2/4} \frac{du}{dx} = \frac{E_p a}{\pi D^2/4} (C_1 - C_2)$$

- En pointe ($x = L$),

$$-N(x = L) = \frac{E_p}{\pi D^2/4} \frac{du}{dx} = \frac{R}{D} u(x = L)$$

on obtient

$$\frac{E_p a}{\pi D^2/4} (C_1 \exp(aL) - C_2 \exp(-aL)) = \frac{R}{D} (C_1 \exp(aL) + C_2 \exp(-aL))$$

au final on obtient la solution dite de cassan pour le déplacement en tête du pieu

$$u(x = 0) = \frac{4P}{\pi D} \frac{1 + \frac{R}{a D E_p} \tanh(aL)}{R + a D E_p \tanh(aL)} \quad a = \sqrt{\frac{4B}{E_p D}}$$

Valeurs des coefficients de réactions:

- Pieu Foré

$$R \approx 4.5E_m \quad B \approx 0.42E_m$$

- Pieu battu

$$R \approx 13.5E_m \quad B \approx 1.25E_m$$

avec E_m le module pressiométrique (obtenu à partir de la phase linéaire de l'essai préssiométrique).

Chapter 7

Calculs hydraulique en régime permanent autour des ouvrages - instabilités d'origine hydraulique

7.1 Ecoulements en régime permanent

La conservation de fluide en régime permanent s'écrit:

$$\nabla \cdot \underline{q} = 0 = \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_z}{\partial z}$$

et la loi de Darcy:

$$q_i = -k \frac{\partial h}{\partial x_i} = k \times i_i$$

$$\underline{q} = k \underline{i}$$

Dans le cas homogène & isotrope, on obtient donc (en 2D)

$$\Delta h = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0$$

et en 3 D

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0$$

Dans le cas d'un sol homogène, pour une perméabilité anisotrope, on obtient (ici en 2D)

$$\begin{aligned} k_h \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_v \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} &= 0 \\ \underbrace{\frac{\partial^2 h}{\partial (k_v/k_h)x^2}}_{X^2} + k_v \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} &= 0 \\ X &= \sqrt{k_v/k_h}x \end{aligned}$$

Rappels nappe libre vs captive, conditions aux limites générales

Notions d'équipotentielle et de ligne de courant. Flow-net

Flow net

$$\Delta q \approx \frac{\Delta n}{\Delta s} \Delta \phi$$

7.1.0.1 Ecoulement autour d'un puit (nappe captive)

Nappe confinée de hauteur t

$$Q = 2\pi k t \frac{h_\infty - h}{\ln R_\infty / R_w}$$

7.2 Ecoulements en nappe libre - approximation de Dupuit

Dupuit (width)

$$Q_x = \int_z q_x = -k \times h \frac{\partial h}{\partial x}$$

i.e. 3D -> 2D

$$\frac{\partial h^2}{\partial x^2} + \frac{\partial h^2}{\partial y^2} = 0$$

2D -> 1

$$\frac{dh^2}{dx^2} = 0$$

reservoir

$$Q = k \frac{h_1^2 - h_2^2}{2L}$$

7.2.1 Ecoulement à travers un barrage en terres

7.2.2 Ecoulement autour d'un puit

Nappe libre Dupuit (debit >0 en production)

$$Q = \pi k \frac{h_\infty^2 - h_w^2}{\ln R_\infty / R_w}$$

Sichardt

$$R_\infty \approx 3000(h_\infty - h_w)\sqrt{k}$$

7.3 Ecoulement autour d'un élément de soutènement

7.3.1 Rideau de palplanches infini

schéma.

Simplifications: i) perte de charge uniquement en aval (cas d'une fiche dans une couche tres permeable), ii) aucune perte de charge (paroi fiché dans un milieu impermeable)

Solution de mandel (sol homogène isotrope).

Attention Mandel donne la perte de charge moyennée em fonction de α (définit comme le rapport entre la perte de charge aval et amont), α est solution de l'équation implicite suivante:

$$\tan \pi\alpha - \pi\alpha = \pi \frac{t - t_w}{h_w + t_w}$$

Dans le cas $\frac{t - t_w}{h_w + t_w} > 0.1$ on a la formule approchée suivante

$$\alpha \approx 0.095 + \frac{0.81}{1 + \sqrt{1 + (h_w + t_w)/(t - t_w)}}$$

La perte de charge en amont est donnée par:

$$|i_{amont}| = (1 - \alpha) \frac{h_w + t_w}{h_w + t}$$

en aval

$$|i_{aval}| = \alpha \frac{h_w + t_w}{t - t_w}$$

Repartition de la pression de pores

En amont (coté du terrain) en prenant l'axe z vers le bas, on a alors $h = u/\gamma_w - z$ et donc

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \gamma_w \left(\frac{\partial h}{\partial z} + 1 \right)$$

et ici

$$\frac{\partial h}{\partial z} = -|i_{amont}|$$

On obtient donc (pour $z > z_{gw}$):

$$u(z) = \gamma_w(z - z_{gw}) - (1 - \alpha)\gamma_w \frac{h_w + t_w}{h_w + t}(z - z_{gw})$$

Notamment la pression de pore en pieu de paroi est

$$u_* = u(z = L) = \gamma_w(t - t_w) + \alpha\gamma_w(h_w + t_w)$$

on peut recrire

$$u(z) = \frac{u_*}{h_w + t}(z - z_{gw})$$

En aval (côté excavé) on a

$$\frac{\partial h}{\partial z} = |i_{aval}|$$

et pour $z > H + t_w$, en définissant $z' = z - H$

$$u(z') = \gamma_w(z' - t_w) + \alpha\gamma_w \frac{h_w + t_w}{t - t_w}(z' - t_w)$$

et on a évidemment continuité des pressions en $z=L$, $u(z' = t) = u_*$, et du coté aval on peut écrire

$$u(z') = \frac{u_*}{t - t_w}(z' - t_w)$$

7.3.2 Cofferdam

Davidenkov - perte de charge aval (moyenne)

$$\alpha h_w = \frac{\Phi_2}{\Phi_1 + \Phi_2} h_w$$

$$\Phi_{1,2}(d_1/T_1, d_2/T_2)$$

debit par mètre de batardeau

$$q = \frac{k}{\Phi_1 + \Phi_2} h_w$$

Enceintes fermées

- circulaire de rayon b

$$\alpha h_w = 1.3 \frac{\Phi_2}{\Phi_1 + \Phi_2} h_w \quad Q = (2\pi b) 0.8 \frac{k}{\Phi_1 + \Phi_2} h_w$$

- carrée (demi-coté b)

$$\alpha h_w = 1.3 \frac{\Phi_2}{\Phi_1 + \Phi_2} h_w \text{ (coté)} \quad Q = 0.7 \times 8b \frac{k}{\Phi_1 + \Phi_2} h_w$$

$$\alpha h_w = 1.2 \frac{\Phi_2}{\Phi_1 + \Phi_2} h_w \text{ (coin)}$$

- Rectangulaire $B = 2b$ et L

$$Q = 2 \frac{k}{\Phi_1 + \Phi_2} h_w L \left(1 + \frac{B}{L} \right) \left(1 - 0.3 \frac{B}{L} \right)$$

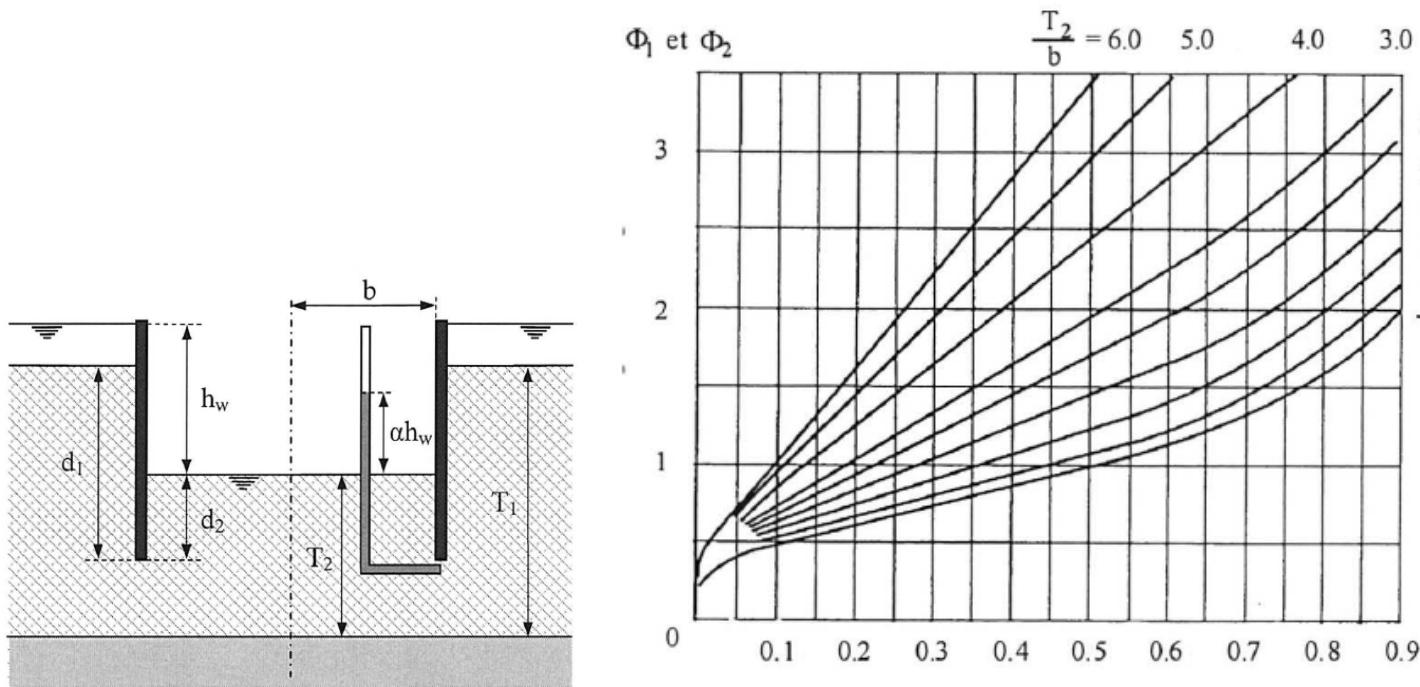


Figure 7.1: Davidenko- chart

7.4 Rabbatement de nappes autour d'une excavation

Approche...

Formule de Sichardt

$$R \approx 3000(H - h)\sqrt{k}$$

avec k and m/s , H en m donc le prefactor 3000 est en $1/(\text{m/s})^{1/2}$.

note en general de l'équation de diffusion....

$$R = \sqrt{4ct} = \sqrt{4 \frac{k}{\mu \times m_v} t}$$

7.5 Instabilités d'origine hydraulique - phénomène du renard

systèmes de coordonnées z vers le haut , contraintes > 0 en compression

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \gamma &= 0 \end{aligned}$$

On récrit en contraintes effectives $\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} + u\delta_{ij} = \sigma_{ij} + \gamma_w(h - z)\delta_{ij}$
la charge hydraulique est

$$h = \frac{u}{\gamma_w} + z$$

(z vers le haut, w.r. un plan de référence) -> note au repos (sans écoulement $h=0$)
D'où:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma'_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_{xz}}{\partial z} + \gamma_w \frac{\partial h}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma'_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_{zz}}{\partial z} + \gamma_w \frac{\partial h}{\partial z} + (\gamma - \gamma_w) &= 0 \end{aligned}$$

Forces d'écoulement

$$\gamma_w \underline{i} = -\gamma_w \underline{\nabla} h$$

Pesanteur déjaugé:

$$-\gamma' \underline{e_z}$$

Un renard hydraulique arrive lorsque le gradient hydraulique est supérieure au gradient hydraulique critique:

$$i_c = \gamma' / \gamma_w$$

i.e. quand les forces d'écoulement sont supérieures à la force de pesanteur déjaugée.

7.6 Défaut de portance d'une paroi - renard “solide”

....

Chapter 8

Stabilité des talus

8.1 Stabilité d'une pente infinie - glissement plan

8.1.1 Cas sans eau

8.1.1.1 Approche par facteur de sécurité

On se réfère à la Fig. 8.1. On étudie le cas d'un glissement plan parallèle à une surface inclinée infinie d'inclinaison β .

On définit le facteur de sécurité comme le rapport entre la force résistante le long du glissement $F_{resistanc} = T$ et la force motrice venant de l'inclinaison du terrain $F_{motrice}$.

Comme la pente est infinie on peut raisonner sur un élément unitaire $L \equiv 1$ dans la direction de la pente (cf. Fig.). Le poids W de cet élément est simplement

$$W = \gamma L d = \gamma L H \cos \beta$$

La composante normale du poids sur la surface de glissement est donc

$$W_N = N = W \cos \beta$$

et la composante tangentielle qui est la force motrice

$$W_T = F_{motrice} = W \sin \beta$$

La force résistance le long du glissement plan est obtenu en utilisant le critère de Mohr-Coulomb qui relie la contrainte normal et tangentielle à la rupture

$$F_{resistance} = T = cL + N \tan \phi$$

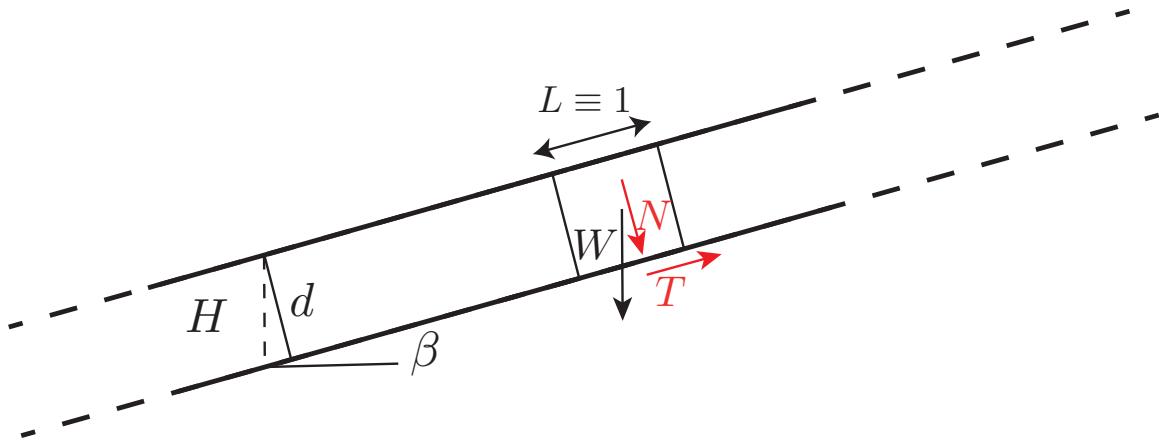


Figure 8.1: Glissement plan à une profondeur H - pente infinie.

On obtient donc le facteur de sécurité

$$F_s = \frac{F_{resistance}}{F_{motrice}} = \frac{cL + W \cos \beta \tan \phi}{W \sin \beta}$$

que l'on peut réécrire

$$F_s = \frac{c}{\gamma H \sin \beta \cos \beta} + \frac{\tan \phi}{\tan \beta}$$

et on retrouve bien le résultat intuitif que pour un sol sans cohésion, l'inclinaison de la pente maximale est égale au coefficient de friction du sol (angle au repos).

8.1.1.2 Lien avec l'analyse limite

On se propose de faire maintenant un raisonnement similaire par une approche cinématique en analyse limite - qui nous donnera donc une borne supérieure. Ici, on fait également le calcul pour un élément unitaire le long de la surface de rupture.

L'analyse limite est basé sur le modèle rigide plastique. On prendra tout d'abord un critère de Mohr-Coulomb associé. On a vu (cf cours d'analyse limite), que le long d'une surface de glissement, pour un critère de Mohr-Coulomb de type associé la discontinuité de vitesse (qui vu que seul la partie supérieure de la pente bouge correspond ici à la vitesse de la partie supérieure de la pente qui glisse) \dot{U} fait un angle égale à ϕ avec la surface de glissement.

La puissance des efforts extérieurs dans ce cas est:

$$\mathcal{P}_{ext}(\dot{U}) = \int_V \gamma \dot{U}_z dV = \gamma \|\dot{U}\| \sin(\beta - \phi) \times L \times H \cos \beta$$

et la puissance dissipée le long de la surface de glissement (puissance résistance maximale) est

$$\mathcal{P}_{diss}(\dot{U}) = \int_L c \|\dot{U}\| \cos \phi ds = c \|\dot{U}\| \cos \phi \times L$$

et on obtient en utilisant le ratio de la puissance dissipée et de la puissance extérieure et la puissance des effort extérieurs, le coefficient de sécurité suivant:

$$F_s^{UB} = \frac{c \cos \phi}{\gamma H \cos \beta \sin(\beta - \phi)}$$

et pour un sol de cohésion nulle, ce facteur de sécurité est zero ! On aurait pu déjà déduire ce résultat car la puissance dissipée est facteur de c .

8.1.1.3 Ecoulement plastique non-associé

Ce résultat non-intuitif et différent de celui précédemment obtenu est du à l'hypothèse d'écoulement plastique associée. Une telle hypothèse n'est pas réaliste car le fait que le vecteur vitesse fasse un angle égal au coefficient de friction implique une dilatance continue pendant la déformation. Expérimentalement, on observe que après une certaine distance de glissement la dilatance "sature" et la vitesse de glissement devient parallèle à la surface de glissement. Il convient donc de lever la restriction de prendre un critère de plasticité non-associé. On introduit donc un potentiel plastique g différent du critère de rupture f - dans le repère contraintes normale / tangentielle à la surface de glissement plan.

$$\begin{aligned} f(\sigma_n, \tau) &= \tau - c - \sigma_n \tan \phi \\ g(\sigma_n, \tau) &= \tau - \sigma_n \tan \psi \end{aligned}$$

où ψ est l'angle de dilatance ($\psi < \phi$) avec

$$\begin{aligned} t_i &= \sigma_{ij} n_j \text{ vecteurs contraintes sur } S_\Sigma \\ t_s &= \tau = s_i \sigma_{ij} n_j \text{ contrainte de cisaillement sur } S_\Sigma \\ t_n &= \sigma_n = n_i \sigma_{ij} n_j \text{ contrainte normale sur } S_\Sigma \end{aligned}$$

où n_j est la normale à la surface de glissement S_Σ et s_i le vecteur tangent associé.

On écrira l'écoulement plastique non-associé sous la forme

$$[[\dot{u}_i]] = \lambda_d \frac{\partial g}{\partial t_i} \quad f(t_i) = 0$$

où λ_d est un multiplicateur plastique de dimensions $[L/T]$ ici et $\lambda_d f = 0$ et $\lambda_d \geq 0$. on obtient donc

$$\begin{aligned} [[\dot{u}_n]] &= -\lambda_d \tan \psi \\ [[\dot{u}_s]] &= \lambda_d \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} [[\dot{u}_n]] &= -\|\dot{U}\| \sin \psi \\ [[\dot{u}_s]] &= \|\dot{U}\| \cos \psi \end{aligned}$$

On peut donc calculer la puissance dissipée (unitaire) le long d'une surface de glissement p_{diss}

$$p_{diss} = t_i [[\dot{u}_i]] = \tau [[\dot{u}_s]] + \sigma_n [[\dot{u}_n]]$$

avec la rupture $f = 0$, i.e. $\tau = c + \sigma_n \tan \phi$

$$p_{diss} = (c + \sigma_n \tan \phi) \|\dot{U}\| \cos \psi - \sigma_n \|\dot{U}\| \sin \psi$$

Pour une rupture développée ayant atteint l'état critique, la dilatance devient nulle (déformation purement cisailante), soit $\psi = 0$. On obtient alors

$$p_{diss}^{CS} = (c + \sigma_n \tan \phi) \|\dot{U}\|$$

où le superscript *CS* est une abbréviation de “critical state”.

En re-faisant à l'état critique le calcul pour cette surface de rupture plane infinie. La puissance des efforts est également changée car la vitesse de glissement est parallèle au plan de glissement

$$\mathcal{P}_{ext}(\dot{U}) = \int_V \gamma \dot{U}_z dV = \gamma \|\dot{U}\| \sin(\beta) \times L \times H \cos \beta$$

et la puissance dissipée est - comme $\sigma_n = \frac{W}{L} \cos \beta = \gamma H \cos^2 \beta$

$$\mathcal{P}_{diss}(\dot{U}) = \int_L p_{diss} ds = (c + \gamma H \cos^2 \beta \tan \phi) \|\dot{U}\| L$$

et on obtient un facteur de sécurité

$$F_s = \frac{c}{\gamma H \cos \beta \sin \beta} + \frac{\tan \phi}{\tan \beta}$$

On retrouve exactement le résultat obtenu préalablement par une approche d'équilibre limite - qui faisait l'hypothèse implicite d'un écoulement non-associé (pas de dilatance). Il est important de se rappeler que la dilatance du sol “sature” pour des déplacement suffisant et la déformation plastique s'effectue alors sans dilatance (sans changement de volume). L'hypothèse d'un écoulement associé n'est pas réaliste pour analyser des grand glissement. Les méthodes de stabilité des pentes se placent souvent à l'état critique (sans dilatance - écoulement non-associé) implicitement.

8.1.2 Présence d'eau

Faisons maintenant, le calcul pour le cas d'une nappe à une distance H_w du glissement plan. Dans ce cas, l'écoulement d'eau est parallèle au plan de glissement et à la surface. Il convient cette fois ci d'écrire le critère de Mohr-Coulomb en contraintes effectives. La pression d'eau u le long de la surface de glissement est ici:

$$u = \gamma_w H_w \cos \beta$$

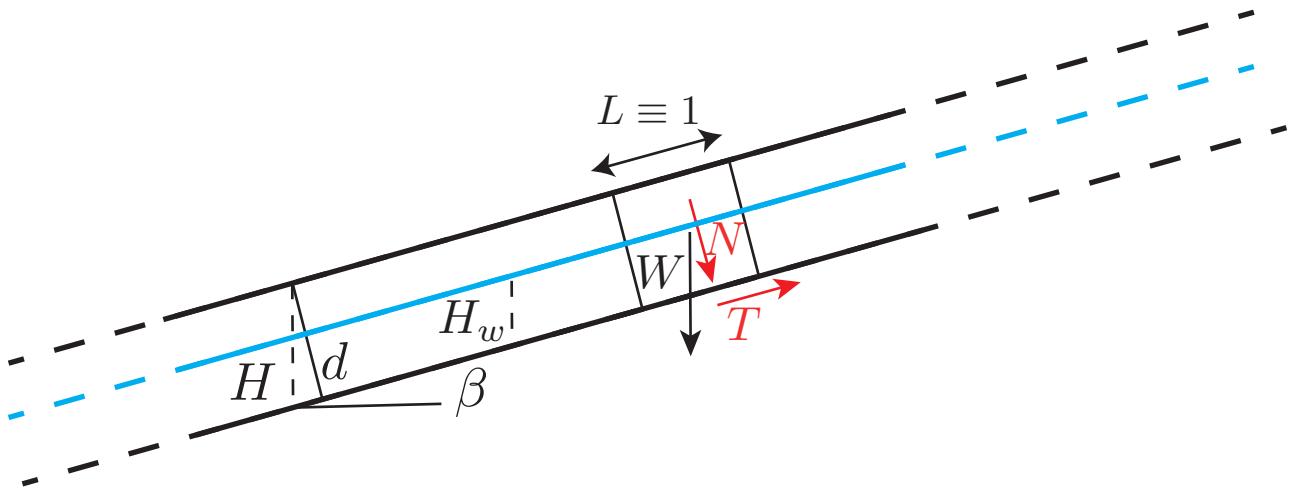


Figure 8.2: Pente infine avec écoulement parallèle

et sa résultante est $u \cos \beta \times L$. La force résistante (puissance dissipée / par la vitesse de glissement) devient

$$F_{\text{résistante}} = (c + (\gamma H - \gamma_w H_w) \cos^2 \beta \tan \phi) L$$

et le facteur de sécurité est maintenant

$$F_s = \frac{c}{\gamma H \sin \beta \cos \beta} + \frac{(\gamma H - \gamma_w H_w) \tan \phi}{\gamma H} \tan \beta$$

On notera que pour le cas $H_w = H$ et un sol de cohésion nulle comme $\gamma_w \approx \gamma/2$, le facteur de sécurité est divisé par 2 en présence d'eau !

$$F_s = \frac{(\gamma H - \gamma_w H_w) \tan \phi}{\gamma H} \frac{1}{\tan \beta} \approx \frac{1}{2} \frac{\tan \phi}{\tan \beta}$$

8.2 Stabilité d'un talus fini

8.2.1 Glissement plan

On se souvient que pour un talus vertical ($\beta = \pi/2$), les bornes de l'analyse limite (sup et inf) donnent (cf semaine 2):

$$3.73 \frac{\cos \phi}{1 - \sin \phi} \leq \frac{\gamma H}{c} \leq 3.83 \frac{\cos \phi}{1 - \sin \phi}$$

et on avait obtenu par un calcul par l'extérieur (cinématique) en faisant l'hypothèse d'un glissement plan

$$\left(\frac{\gamma H}{c} \right)^+ = 4 \frac{\cos \phi}{1 - \sin \phi}$$

On étend ici ce calcul au cas d'un talus d'inclinaison β . (sans écoulement d'eau). Les résultats seront applicables soit à court terme ($c = c_u$, $\phi = 0$) notamment dans les argiles, soit pour le cas sans eau.

On se réfère à la figure 8.3. Comme dans le cas d'un talus vertical ($\beta = \pi/2$), la puissance des efforts extérieurs est:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{ext.}}(\dot{U}) &= \int_{OAB} \gamma \dot{U}_z \, dS = \int_{OAB} \gamma \|\dot{U}\| \cos(\alpha + \phi) \, dS \\ &= \gamma \|\dot{U}\| \cos(\alpha + \phi) \times \left(\frac{1}{2} H^2 \tan \alpha - \frac{1}{2} H^2 \cot \beta \right) \end{aligned}$$

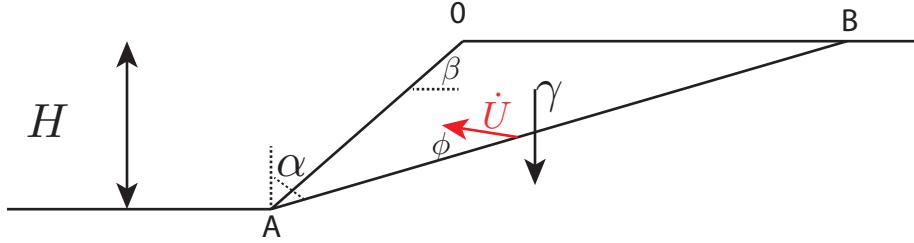


Figure 8.3: Talus incliné - glissement plan.

La puissance dissipée le long de la surface de glissement (modèle associé) est identique que pour le cas vertical:

$$\mathcal{P}_{diss}(\dot{U}) = \int_{AB} c \|\dot{U}\| \cos \phi ds = \frac{H}{\cos \alpha} c \|\dot{U}\| \cos \phi$$

L'application du PPV donne l'expression suivante de la borne supérieure paramétrée par α :

$$\frac{\gamma H}{c} = 2 \frac{\cos \phi}{\cos(\alpha + \phi)} \frac{1}{(\sin \alpha - \cos \alpha \cot \beta)}$$

Il convient donc de minimiser cette expression par rapport à α pour obtenir la borne supérieure la plus petite. Que l'on obtient pour α :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} \cos(\alpha + \phi) (\sin \alpha - \cos \alpha \cot \beta) &= 0 \\ \sin(2\alpha + \beta + \phi) &= 0 \end{aligned}$$

à savoir pour

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\phi + \beta}{2}$$

[On retrouve bien $\alpha = \pi/4 - \phi/2$ pour le cas $\beta = \pi/2$]. La borne supérieure est au final:

$$\frac{\gamma H}{c} = \frac{4 \cos \phi \sin \beta}{1 - \cos(\beta - \phi)}$$

[On retrouve bien $4 \cos \phi / (1 - \sin \phi)$ pour le cas $\beta = \pi/2$].

Le facteur de sécurité (rapport puissance dissipée max / puissance des efforts extérieurs) est

$$F_s = \frac{c}{\gamma H} \frac{4 \cos \phi \sin \beta}{1 - \cos(\beta - \phi)}$$

Le cas $\phi = 0$, se simplifie en

$$F_s = \frac{c}{\gamma H} \frac{4 \sin \beta}{1 - \cos \beta} = \frac{c}{\gamma H} \frac{4}{\tan \beta/2}$$

8.2.2 Glissement circulaire

On effectue ici une approche de type équilibre limite qui est très souvent utilisé en mécanique des sols - attention cela diffère de l'analyse limite par l'extérieur dans le sens que l'on utilise pas le principe des travaux virtuels.

Considérons le cas d'un talus incliné dans un milieu purement cohérent ($\phi = 0$) de cohésion c avec une surface de glissement circulaire de rayon R passant par le bas de talus et ayant comme centre le haut du talus (point O). Il est classique de définir un coefficient de sécurité comme le rapport entre le moment résistant (du à la cohésion sur le plan de glissement) et le moment moteur du poids du sol en mouvement. On a ici

$$\mathcal{M}_{resistant} = c \times R(\pi - \beta) \times R$$

$$\mathcal{M}_{moteur} = W \sin(\beta/2) \times |OG|$$

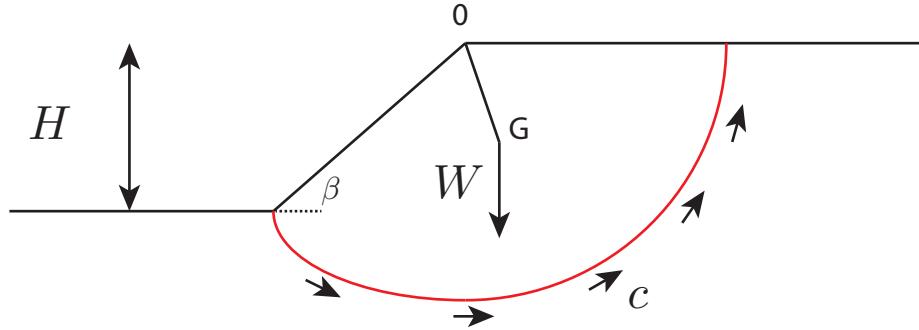


Figure 8.4: Talus inclinée - sol purement cohérent - glissement circulaire

avec le poids W de la section circulaire égal à

$$W = \gamma R^2(\pi - \beta)$$

La distance $|OG|$ entre le centre de gravité et le centre de la section circulaire est donnée par la relation géométrique suivante:

$$|OG| = \frac{4R \sin(\pi/2 - \beta/2)}{3(\pi - \beta)}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} F_s &= \frac{3cR^2(\pi - \beta)}{4\gamma R^3 \sin(\beta/2) \sin(\pi/2 - \beta/2)} \\ &= \frac{c}{\gamma H} \frac{3(\pi - \beta) \sin \beta}{2 \sin(\beta)} \\ &= \frac{c}{\gamma H} \frac{3(\pi - \beta)}{2} \end{aligned}$$

On notera que la limite

$$\lim_{\beta \rightarrow \pi/2} F_s = \frac{c}{\gamma H} \frac{3\pi}{4} \approx 2.35 \frac{c}{\gamma H}$$

est différente de la meilleure estimation obtenue par l'analyse limite qui se situe entre 3.73 et 3.83 ($\times \frac{c}{\gamma H}$)!

Ce résultat est une illustration du fait que les approches de type équilibre limite ne donnent ni une borne supérieure ni une borne inférieure. En revanche, les estimations obtenues pour des ruptures de glissements sont assez proches et donnent des résultats plutôt conservatifs.

8.2.3 Glissement circulaire avec écoulement

En pratique, pour des sols frottant, les surfaces de glissement seront des spirales logarithmiques. Une première approche consiste à garder l'hypothèse d'un glissement circulaire mais de relâcher l'hypothèse que le centre du cercle se situe en haut du talus et que le rayon du cercle de glissement est égal à $H/\sin \beta$. Il convient alors d'optimiser par rapport à la position du centre du cercle afin d'obtenir le coefficient de sécurité le plus faible.

On obtient les abaques de Caquot-Kérisel...

8.2.4 Méthode des tranches (tiré de Lancellotta)

8.19.2 Method of slices

The previous analysis is very effective in determining the safety factor when considering a homogeneous infinite slope and the failure mechanism is of the translational type. The method of slices has been developed to analyse more complex situations, and where more than one layer with different strength parameters is present, the expected groundwater regime differs from simple patterns and the failure surface may be composite.

In this method (see Figure 8.60) the soil mass is subdivided into a number of vertical slices and the equilibrium of each slice is then considered. If a number of n slices is considered, the unknowns are the following:

- n forces N'_i normal to the base of each slice;
- $(n - 1)$ normal forces E'_i and $(n - 1)$ shear forces X_i at the interface of slices;
- n coordinates a to locate the normal forces N'_i ;
- $(n - 1)$ coordinates b to locate the interface forces E'_i .

If the further unknown of the safety factor is added (note that the safety factor gives the possibility of expressing the shear forces at the bottom in terms of N'_i), then the total number of unknowns is $(5n - 2)$ to be compared with the number $3n$ of available equilibrium equations.

Presuming that the slices are so thin that the forces N'_i can be located on the centroid of each slice, then there are $(4n - 2)$ unknowns, but the problem still remains statically undetermined. It is then necessary to introduce additional assumptions in order to remove the extra unknowns. These assumptions usually refer to the interface forces, and they explain the differences between various methods (see for example Morgenstern and Price, 1965; Sarma, 1973). In the sequel, we limit the presentation to some approximate methods of analysis, which has been proved to give satisfactory results.

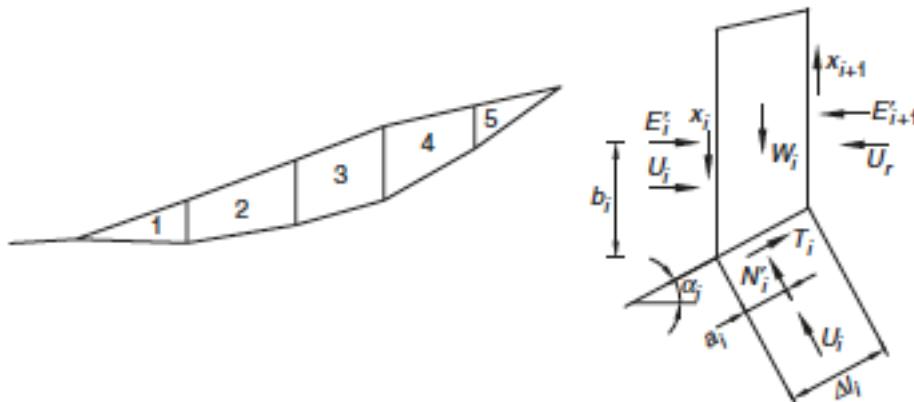


Figure 8.60 Method of slices.

8.19.3 Simplified Bishop method

In this method (Bishop, 1955), the failure surface is represented by a circular sliding surface (rotational failure). With reference to Figure 8.61, equating the moment about O of the weight of the soil with the moment of the forces acting on the sliding surface, the safety factor is given by:

$$F = \frac{R \cdot \sum [c'l_i + (N_i - U_i) \tan \varphi']}{\sum W_i x_i}, \quad (8.118)$$

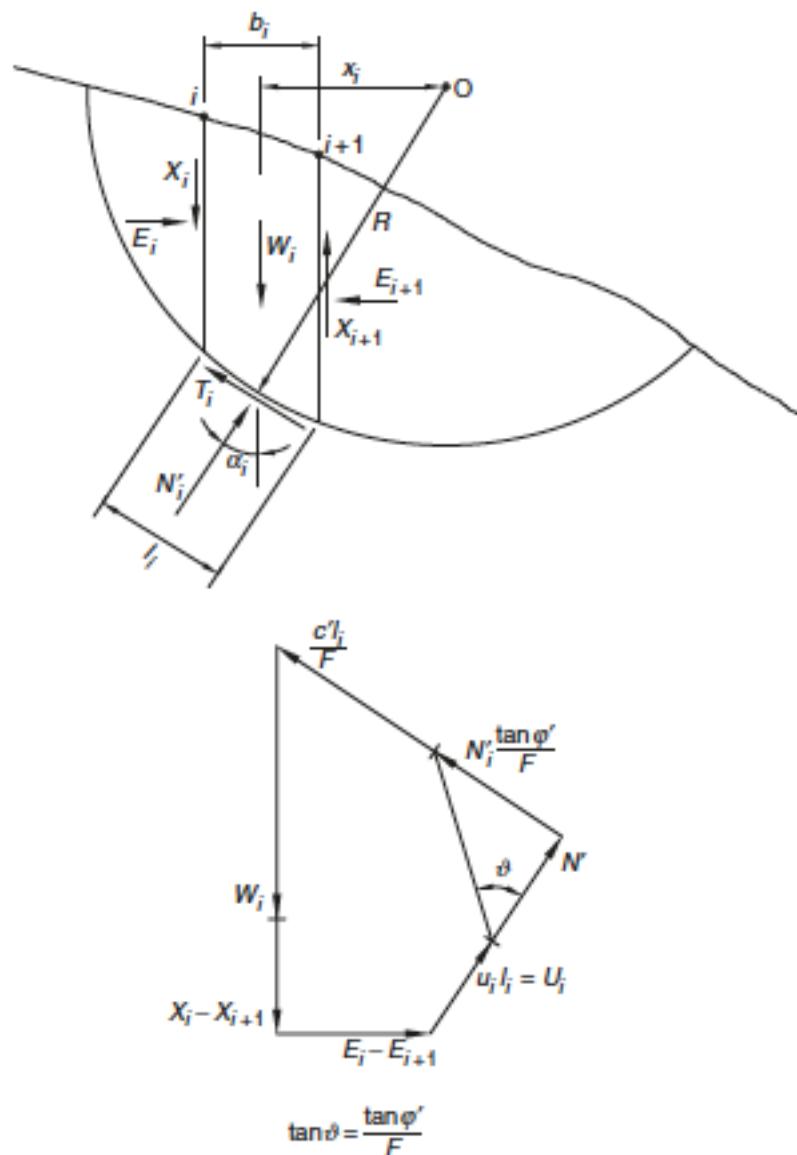


Figure 8.61 Simplified Bishop method.

the magnitude of the mobilized shear strength being:

$$T_i = \frac{c'l_i + (N_i - U_i)\tan\varphi'}{F}. \quad (8.119)$$

From the vertical equilibrium of the slice:

$$W_i - T_i \sin \alpha_i - N_i \cos \alpha_i - (X_{i+1} - X_i) = 0, \quad (8.120)$$

we can derive the value of N_i , and, by substituting this value into (8.118), the expression of the safety factor becomes:

$$F = \frac{\sum \left[(c'b_i + W_i(1 - r_u)\tan\varphi' + (X_i - X_{i+1})\tan\varphi') \frac{1}{M_\alpha} \right]}{\sum W_i \sin \alpha_i}, \quad (8.121)$$

where:

$$M_\alpha = \cos \alpha_i \left(1 + \frac{\tan \varphi' \tan \alpha_i}{F} \right) \quad (8.122)$$

and r_u is the ratio which gives the pore pressure as a function of the total weight of the column of the soil above the considered point, i.e.:

$$r_u = \frac{u_i b_i}{W_i}. \quad (8.123)$$

Assuming that $X_i - X_{i+1} = 0$ throughout, the factor of safety can be computed by means of the approximate expression:

$$F = \frac{\sum \left[(c'b_i + W_i(1 - r_u)\tan\varphi') \frac{1}{M_\alpha} \right]}{\sum W_i \sin \alpha_i}, \quad (8.124)$$

where M_α is given by (8.122).

Note that in equation (8.124) the safety factor appears within the summation on the r.h.s. as well on the l.h.s., so that an iterative procedure is needed. An initial value of the safety factor is guessed (closed to unity) and inserted in the r.h.s. and the value of F is computed. This value is the new input on the r.h.s. and the procedure is repeated until an almost constant value of F is attained (usually three to four iterations provide the required convergency).

Equilibre dans le repère normal - tangentiel à la ligne de glissement

$$\frac{u_i b_i}{\cos \alpha_i} + \frac{\sigma' b_i}{\cos \alpha_i} - (W_i + \Delta X_i) \cos \alpha_i + \Delta E_i \sin \alpha_i = 0$$

$$T_{Ri} - (W_i + \Delta X_i) \sin \alpha_i - \Delta E_i \cos \alpha_i = 0$$

avec

$$T_{Ri} = (c' + \sigma' \tan \phi) \frac{b_i}{\cos \alpha_i} / F_s$$

et la définition du facteur de sécurité à partir de l'équilibre global des moments par rapport au centre du cercle de rupture:

$$F_s = \frac{\sum_i (c' + \sigma' \tan \phi) b_i / \cos \alpha_i}{\sum_i W_i \sin \alpha_i}$$

Fellenius: $\Delta X_i = 0$ et $\Delta E_i = 0$ alors on obtient

$$\sigma' b_i = W_i \cos^2 \alpha - u_i b_i$$

et au final

$$F_s = \frac{\sum_i (c' b_i + (W_i \cos^2 \alpha - u_i b_i) \tan \phi) / \cos \alpha}{\sum_i W_i \sin \alpha}$$

Bishop simplifié $\Delta X_i = 0$ on obtient

$$\Delta E_i = T_{Ri} / \cos \alpha_i - (W_i) \tan \alpha_i$$

$$\frac{\sigma' b_i}{\cos \alpha_i} = (W_i) \cos \alpha_i - \frac{u_i b_i}{\cos \alpha_i} - T_{Ri} \tan \alpha_i + (W_i) \tan \alpha_i \sin \alpha_i$$

soit encore

$$\sigma' b_i = (W_i - u_i b_i) - (c' + \sigma' \tan \phi) b_i \frac{\tan \alpha_i}{F_s}$$

i.e.

$$(c' + \sigma' \tan \phi) b_i (1 + \tan \alpha_i \tan \phi / F_s) = c' b_i + (W_i - u_i b_i) \tan \phi$$

d'où on obtient le facteur de sécurité

$$F_s = \frac{\sum_i (c' b_i + (W_i - u_i b_i) \tan \phi) \times \frac{1}{\cos \alpha_i \times (1 + \tan \alpha_i \tan \phi / F_s)}}{\sum_i W_i \sin \alpha}$$

Chapter 9

Poussée - butée des terres sur les éléments de soutènements

Pousee - Butée
Mouvement relatif sol/écran

Etat au repos

$$\sigma'_h = K_o \sigma'_v$$

$$K_o \approx 1 - \sin \phi'$$

$$K_o \approx (1 - \sin \phi') OCR^{\sin \phi'}$$

9.1 Théorie de Rankine

Implicitement, l'angle friction du sol dicte l'orientation de la résultante sur le mur (en d'autres termes, dicte l'angle de friction mur/sol est égal à l'angle de friction du sol).

Actif

$$\frac{\pi}{2} + \phi'$$

$$\sigma'_h = K_a \sigma'_v - 2c' \sqrt{K_a}$$

$$K_a = \frac{1 - \sin \phi'}{1 + \sin \phi'} = \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi'}{2} \right)$$

$$P_a = \frac{1}{2} \gamma H^2 K_a$$

Undrained:

$$z_o = \frac{2c_u}{\gamma}$$

Passive

$$\frac{\pi}{2} - \phi'$$

$$\sigma'_h = K_p \sigma'_v + 2c' \sqrt{K_p}$$

$$K_p = \frac{1 + \sin \phi'}{1 - \sin \phi'} = \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi'}{2} \right)$$

9.1.1 Cas incliné

$$\begin{aligned}\sigma_{33} &= \gamma z \cos^2 i \\ \sigma_{13} &= \gamma z \cos i \sin i\end{aligned}$$

$$\text{OM} = \sigma'_v$$

$$\text{OA} = \sigma'_a$$

$$\text{ON} = \text{OC} \cos i$$

$$\text{NC} = \text{OC} \sin i$$

$$\text{MC} = \text{OC} \sin \phi'$$

$$\frac{\sigma'_a}{\sigma'_v} = \frac{\text{ON} - \text{MN}}{\text{ON} + \text{MN}}$$

$$K_a = \frac{\cos i - \sqrt{\sin^2 \phi' - \sin^2 i}}{\cos i + \sqrt{\sin^2 \phi' - \sin^2 i}}$$

9.2 Analyse limite

Lancellotta Passive with inclinaison

$$\begin{aligned}K_p &= \frac{\cos \delta}{\cos i - \sqrt{\sin \phi^2 - \sin i^2}} \left(\cos \delta + \sqrt{\sin \phi^2 - \sin \delta^2} \right) e^{2\mathcal{V} \tan \phi} \\ 2\mathcal{V} &= \arcsin \left(\frac{\sin \delta}{\sin \phi} \right) + \arcsin \left(\frac{\sin i}{\sin \phi} \right) + \delta + i\end{aligned}$$

9.3 Equilibre limite du coin de Coulomb

Coulomb

$$\tau = \sigma_n \tan \phi'$$

loi des sinus

$$\frac{F}{\sin(\theta - \phi')} = \frac{W}{\sin(\pi/2 + \delta + \phi' - \theta)}$$

$$W = \frac{1}{2} \gamma H^2 \tan \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)$$

$$F^+ = \frac{1}{2} \gamma H^2 \frac{\tan(\theta - \phi')}{\tan(\theta)}$$

mazimum

$$\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{\phi'}{2}$$

$$F_a = \frac{1}{2} \gamma H^2 \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi'}{2} \right)$$

Coulomb cas Général:

$$K_a = \frac{\cos(\phi' - \lambda)^2}{\cos^2 \lambda \cos(\lambda + \delta) \left[1 + \sqrt{\frac{\sin(\delta + \phi') \sin(\phi' - \beta)}{\cos(\lambda + \delta) \cos(\lambda - \beta)}} \right]^2}$$

$$e_{ah} = K_{ah} \gamma' z$$

$$K_p = \frac{\cos(\phi' + \lambda)^2}{\cos^2 \lambda \cos(\delta - \lambda) \left[1 - \sqrt{\frac{\sin(\phi' - \delta) \sin(\phi' + i)}{\cos(\lambda + \delta) \cos(\lambda - \beta)}} \right]^2}$$

9.4 Actions sur les éléments de soutènements

9.4.1 Resultante des actions sur les éléments de soutènements

9.4.1.1 Court terme

$$E_a = \left(\frac{1}{2} \gamma H^2 + qH \right) \times \underbrace{\left(1 - m \frac{4c_u}{\gamma H} \right)}_K \quad m \approx 0.8 - 1$$

$$E_p = \left(\frac{1}{2} \gamma H^2 + qH \right) \times \left(1 + \frac{4c_u}{\gamma H} \right)$$

9.4.1.2 Long terme

/ Etat actif

$$e_a = K_a(\phi', \delta, \beta) \sigma'_v - \underbrace{(1 - K_a(\phi', \delta, \beta)) c' \cot \phi'}_{2c \sqrt{K_a} \text{ cas } \beta = \delta = 0}$$

$$e_{a,h} = e_a \cos \delta$$

$$e_{a,v} = e_a \sin \delta$$

$$K_{a,h} = K_a \cos \delta$$

Etat passif

$$e_p = K_p(\phi', \delta, \beta) \sigma'_v + \underbrace{(K_p(\phi', \delta, \beta) - 1) c' \cot \phi'}_{2c' \sqrt{K_p} \text{ cas } \delta = \beta = 0}$$

$$e_{p,h} = e_p \cos \delta$$

$$e_{p,v} = e_p \sin \delta$$

$$K_{p,h} = K_p \cos \delta$$

Chapter 10

Murs Poids

10.1 Types - disposition constructives

10.2 Mur poids

10.3 Mur équerre

Chapter 11

Parois de soutènement

11.1 Types - disposition constructives

11.2 Defaut de portance en fond de fouille

Renard solide

11.3 Calcul des efforts le long d'une paroi

11.4 Dimensionnement

Soit $r(z)$ la pression normale à la paroi (somme des poussées active, passive + des efforts d'ancrages > 0 vers le coté excavé, i.e $r(z) = e_{ah} - e_{ph}$ dans le cas sans eau / sans surcharge). Le calcul de l'effort tranchant $V(z)$, du moment fléchissant $M(z)$ et de la déformée $y(z)$ de la paroi s'apparente à un calcul de poutre. Dans la notation (axes des V positif vers le coté non-excavé, déformé positive du coté excavé)):

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dz} &= r(z) \\ \frac{dM}{dz} &= V(z) \\ M(z) &= EI \frac{d^2y}{dz^2}\end{aligned}$$

avec E et I le module d'elasticité et moment d'inertie (par metre linéaire de paroi) de la paroi . A noter que - en tête ($z = 0$), la paroi est libre.

On considère une fouille de profondeur h , cas sans eau, γ poids volumique du sol. Aucune surcharge n'est prise en compte ici dans cet exemple simple. On peut généraliser facilement aux cas multi-couche, avec surcharges, avec écoulement etc.

11.4.1 Sans cohésion - sans eau - sans ancrage - Paroi simplement fiché

Dans ce cas simple, on a du coté amont une poussée active des terres. $e_{ah,d}$:

$$e_{ah} = \gamma K_{ah} z$$

Du coté aval, la butée passive des terres vaut dans ce cas simple

$$e_{ph} = \gamma K_{ph} (z - h) \quad z \geq h$$

Le poids de pression nulle, i.e. le point pour lequel $r(z) = e_{ah} - e_{ph} = 0$ (dans notre convention) est toujours sous le fond de fouille. Dans ce cas simple, il est donnée par :

$$z_o = \frac{K_{ph} h}{K_{ph} - K_{ah}}$$

sa profondeur a sous le fond de fouille est

$$a = z_o - h = \frac{K_{ah}h}{K_{ph} - K_{ah}}$$

Effort tranchant et moment fléchissant au dessus du fond de fouille ($z < h$)

$$\begin{aligned} V(z < h) &= -\frac{1}{2}K_{ah}\gamma z^2 \\ M(z < h) &= \frac{1}{6}K_{ah}\gamma z^3 \end{aligned}$$

On denotera V_h et M_h les valeurs pour $z = h$ (juste au dessus du fond de fouille)

Effort tranchant et moment fléchissant au dessous du fond de fouille ($z > h$)

$$\begin{aligned} V(z > h) &= V_h - \gamma K_{ah}h(z - h) + \frac{1}{2}(K_{ph} - K_{ah})\gamma(z - h)^2 \\ M(z > h) &= M_h + V_h(z - h) + \frac{1}{2}\gamma K_{ah}h(z - h)^2 - \frac{1}{6}(K_{ph} - K_{ah})\gamma(z - h)^3 \end{aligned}$$

11.4.2 Equilibre de la paroi:

Pour obtenir la profondeur de la paroi z_ω (ou la profondeur de la fiche $t = z_\omega - h$), on force l'équilibre de rotation en ce point:

$$M(z_\omega) = 0$$

C'est une équation du 3ieme degré (cubique) avec inconnue z_ω . (résolu par Euler....en 1738).

L'effort tranchant à la profondeur obtenue est en général non nul. Afin de satisfaire l'équilibre horizontal (sans changer l'équilibre de rotation), il faut compter sur une force de contre-butée centré en z_w de longueur totale b . Cette contre-butée CB est reliée au coefficient de poussée passive des terres (cette fois du coté amont de la fouille - i.e. d'où le terme de contre-butée):

$$CB = V(z_\omega)$$

Par ailleurs on évalue la contre-butée avec la valeur de poussée passive (de dimensionnement)

$$CB = \int_{z_w - b/2}^{z_w + b/2} e_{ph,d} dz = \int_{z_w - b/2}^{z_w + b/2} \gamma K_{ph} z dz = K_{ph} \gamma z_w b$$

ce qui permet d'obtenir la sur-longueur de contre-butée b .

11.4.3 Paroi ancrée et butée en pied

Dans ce cas, il convient de calculer l'effort d'ancrage A (sa profondeur étant donnée) et la longueur de la paroi. On écrit l'équilibre (rotation et horizontal) en bas de paroi et obtient donc 2 équations pour 2 inconnues. Dans ce cas, il n'y a pas de contre-butée: d'où l'appellation ancrée et butée en pied.

Il convient d'ajouter l'effet de l'effort d'ancrage dans les expressions précédentes de l'effort tranchant et du moment fléchissant.

Effet de l'ancrage Soit une force d'ancrage ponctuelle (ou de button) à la profondeur z_a et de valeur A (exercé dans la direction du coté amont de la fouille). Dans ce cas, l'effort tranchant et moment fléchissant du à l'ancrage (en dessous de z_a) sont:

$$\begin{aligned} V_A(z) &= A & z > z_a \\ M_A(z) &= -A(z - z_a) & z > z_a \end{aligned}$$

(et bien sur nul pour $z < z_a$, la paroi étant libre en tête).

11.4.4 Paroi ancrée et encastrée en pied

Dans ce cas, on veut assurer un encastrement en pied et donc on laisse une contre-butée se développer. Nous avons donc 3 inconnues (effort d'ancrage, longueur totale de la paroi et la surlongeur de contre-butée). Il convient donc de se fixer une des inconnues (par exemple, la longueur totale de la paroi) et de calculer les 2 autres en résolvant l'équilibre de la paroi.

11.4.5 Méthode de la poutre équivalente - (Méthode de Blum)

Dans cette méthode -dite de la poutre équivalente - on fixe que le moment fléchissant soit nul au point de pression nulle (où $r(z) = 0$). On résout donc l'équilibre de la poutre supérieure afin de déterminer l'effort d'ancrage A et l'effort tranchant $V(z_o)$ au point de pression nul.

Dans un deuxième temps, on résout l'équilibre de la poutre inférieure. On a deux équations pour 2 inconnues: la longueur totale de la paroi et la sur-longueur de contre-butée. Il est plus simple d'exprimer tout cela en fonction des résultantes des pressions qui s'applique sur la paroi

Dans le cas sans eau - sol homogène - sans surcharge additionnelle discuté auparavant, on a donc:

1. Poutre supérieure:

$$V(z_o) + A = E_a + E_{ap_1}$$

avec $E_a = \frac{1}{2}\gamma h^2 K_{ah}$ (h hauteur de l'excavation) qui s'applique en $h/3$ depuis le bas de l'excavation, et $E_{ap_1} = \frac{1}{2}\gamma K_{ah} h \times (z_o - h)$ s'appliquant à une distance $(z_o - h)/3$ sous le fond de l'excavation. L'équilibre du moment s'écrit donc - en fixant le moment $M(z_o)$ à zero:

$$A(z_o - z_a) = E_a \times (h/3 + z_o - h) + E_{ap} \times \frac{2}{3}(z_o - h)$$

On détermine donc facilement l'effort d'ancrage A et ensuite l'effort tranchant $V(z_o)$.

2. Poutre inférieure: en notant t_w la distance entre le point d'encastrement et le point de pression nulle z_o

$$\begin{aligned} CB + V(z_o) &= \frac{1}{2}\gamma(K_{ph} - K_{ah})t_w^2 \\ V(z_o)t_w &= \frac{1}{6}\gamma(K_{ph} - K_{ah})t_w^3 \end{aligned}$$

avec

$$CB = K_{ph}\gamma(z_o + t_w)b$$

On détermine donc facilement t_w puis b . La longueur totale de la paroi est donc $z_o + t_w + b/2$

Chapter 12

Parois Clouées

Appendix A

Rappels de mécanique des milieux continus