Formulaire condensé - Géotechnique - 2024

Ce formulaire **n'est évidemment pas exhaustif**. Le but est de donner les formules compliquées. Également, au besoin, des abaques seront fournis avec l'énoncé des exercices.

1 Critère de rupture et écoulement plastique

- Critère de Mohr Coulomb exprimé en fonction des contraintes principales (effectives ou totales selon le type de sollicitation (drainée ou non-drainée / long ou court terme))

$$f(\sigma_I, \sigma_{III}) = (\sigma_I - \sigma_{III}) - (\sigma_I + \sigma_{III}) \sin\phi - 2C\cos\phi \leq 0$$

  où C et ϕ sont la cohésion et l'angle de frottement du sol (drainée ou non-drainée selon le type de calcul).

- Critère de Mohr Coulomb exprimé en fonction des contraintes normale σ_n et tangentielle τ à la facette de rupture (contraintes effectives ou totales selon le type de sollicitation (drainée ou non-drainée))

$$f(\sigma_n, \tau) = \tau - C - \sigma_n \tan\phi \leq 0$$

- Loi d'écoulement plastique associé (modèle rigide-plastique) exprimant le taux de déformations plastiques en fonction du gradient du critère de rupture $f(\sigma_{ij})$

$$\begin{aligned} f(\sigma_{ij}) < 0 \qquad & \dot{\epsilon}_{ij} = 0 \\ f(\sigma_{ij}) = 0 \qquad & \dot{\epsilon}_{ij} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \end{aligned}$$

  On ne rappelle pas ici le principes des puissances virtuelles, les équations d'équilibres, les démarches d'analyse limite, les bandes de cisaillement etc.

2 Fondations superficielles

2.1 Capacité portante

2.1.1 Conditions drainées (long-terme)

$$q'_p = c' N_c s_c i_c b_c g_c d_c + q' N_q s_q i_q b_q g_q d_q + \frac{1}{2}\gamma b' N_\gamma s_\gamma i_\gamma b_\gamma g_\gamma d_\gamma$$

avec c': la cohésion drainée, q': la surcharge effective, b': la largeur utile, $\{N_c, N_q, N_\gamma\}$: les facteurs de portance,$\{s_c, s_q, s_\gamma\}$: coefficients correcteurs de forme (rectangulaire et circulaire), $\{i_c, i_q, i_\gamma\}$: coefficients correcteurs d'inclinaison de la charge,$\{b_c, b_q, b_\gamma\}$: coefficients correcteurs d'inclinaison de la base de fondation.

- Facteurs de portance
  - Pour une semelle rugeuse:

$$N_q = \frac{e^{\left(\frac{3\pi}{2} - \phi'\right)\tan\phi'}}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi'}{2}\right)}, \quad N_c = (N_q - 1)\cot\phi', \quad N_\gamma = 2(N_q - 1)\tan\phi'.$$

    Pour une semelle lisse:

$$N_q = e^{\pi \tan \phi'} \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi'}{2}\right), \quad N_c = (N_q - 1)\cot\phi', \quad N_\gamma = 1.8(N_q - 1)\tan\phi'.$$

- Facteurs de forme
  - Pour une semelle filante:

$$s_q = 1, \quad s_c = 1, \quad s_\gamma = 1.$$

Pour une semelle rectangulaire ou circulaire ($b' = L'$):

$$s_q = 1 + \frac{b'}{L'}\sin\phi', \quad s_c = \tfrac{s_q N_q - 1}{N_q - 1}, \quad s_\gamma = 1 - 0.4\frac{b'}{L'} \geq 0.6.$$

- Largeur et longueur utile (cas d'une charge excentrée)

$$b' = b - 2e_b \qquad L' = L - 2e_L$$

- Facteurs d'inclinaison de la charge

$$i_q = \left(1 - \frac{H}{V + A'c'\cot\phi'}\right)^m, \quad i_c = i_q - \frac{1 - i_q}{N_c \tan\phi'}, \quad i_\gamma = \left(1 - \frac{H}{V + A'c'\cot\phi'}\right)^{m+1}.$$

Cas 1: H est la composante horizontale de la charge agissant dans la direction parallele à la largeur b' de la fondation

$$m = m_b = \frac{2 + b'/L'}{1 + b'/L'}$$

Pour une semelle filante: $m = m_b = 2$.

Cas 2: H agit dans la direction parallele à la longueur L' de la fondation

$$m = m_L = \frac{2 + L'/b'}{1 + L'/b'}$$

Cas 3: H agit dans la direction formant une angle θ avec la direction de longueur L' de la fondation

$$m = m_\theta = m_L \cos^2\theta + m_b \sin^2\theta.$$

- Facteurs d'inclinaison de la base de la fondation.
  - On considère α l'angle d'inclinaison de la base de la fondation par rapport à l'horizontale.

$$b_c = b_q - \frac{1 - b_q}{N_c \tan\phi'}, \quad b_q = b_\gamma = (1 - \alpha\tan\phi')^2.$$

- Facteurs du à une fondation en profondeur

- On ne conseille pas d'utiliser une correction pour une profondeur de l'assise de fondation D inférieure à 2 m.

$$
\begin{aligned}
&d_c = d_q - \frac{1-d_q}{N_c \tan\phi'} \qquad d_\gamma = 1 \\
&d_q = 1 + 2\tan\phi'(1-\sin\phi')^2 \frac{D}{b'} \qquad D \leq b' \\
&d_q = 1 + 2\tan\phi'(1-\sin\phi')^2 \mathrm{ArcTan}\frac{D}{b'} \; D > b'
\end{aligned}
$$

- Facteurs d'inclinaison du sol ω du sol.

$$
g_c = g_q - \frac{1-g_q}{N_c \tan\phi'} \qquad g_q = (1-\tan\omega)^2 = g_\gamma
$$

2.1.2 Conditions non-drainées (court-terme)

$$
q_p = c_u N_c s_c i_c b_c g_c d_c + q
$$

avecc_u: la cohésion non drainée, q: la surcharge totale, N_c facteur de portance:

$$
N_c = (2+\pi) \text{ semelle lisse} \qquad N_c = 5.71 \text{ semelle rugueuse}
$$

s_c: coefficient correctif de forme rectangulaire et circulaire ($b' = L'$):

$$
s_c = 1 + 0.2\frac{b'}{L'};
$$

i_c: coefficient correcteur d'inclinaison de la charge (avec H l'effort horizontal)

$$
i_c = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{H}{A' c_u}}\right);
$$

b_c: coefficient correcteur d'inclinaison de la base de la fondation (α l'angle d'inclinaison de la base de la fondation par rapport à l'horizontale)

$$
b_c = 1 - \frac{2\alpha}{2+\pi}.
$$

g_c: coefficient correcteur pour une surface de sol inclinée (angle ω)

$$
g_c = 1 - \frac{2\omega}{2+\pi}
$$

avec ajout d'un terme $-\omega\gamma b(1 - 0.4b'/L')$ dans l'équation de la capacité portante.

d_c : coefficient correcteur pour une assise de fondation à une profondeur D

$$
\begin{aligned}
&d_c = 1 + 0.4\frac{D}{b'} \qquad (D \leq b') \\
&d_c = 1 + 0.4\mathrm{ArcTan}\frac{D}{b'} \qquad D > b'
\end{aligned}
$$

2.2 Tassements

2.2.1 Fondation circulaire

Contraintes verticales induites par une fondation circulaire de rayon a (sous son centre à la profondeur z) ayant une charge repartie p

$$\Delta\sigma_{zz} = p \times \left(1 - \frac{1}{\sqrt{(1+a^2/z^2)^3}}\right)$$

2.2.2 Fondation rectangulaire (b, L)

Contraintes verticales induites à la profondeur z à l'aplomb d'un coin d'une fondation rectangulaire (b, L)

$$\Delta\sigma_{zz} = q \times J(b, L, z)$$

$$J(b, L, z) = \frac{1}{2\pi}\left(\arctan\left(\frac{bL}{Rz}\right) + \frac{bLz}{R}\left(\frac{1}{b^2+z^2} + \frac{1}{L^2+z^2}\right)\right)$$

avec $R^2 = b^2 + L^2 + z^2$.

2.2.3 Relations - effort-déformation

Ici ϵ_{zz} est la composante vertical du tenseur de déformation ($\epsilon_{zz} = \Delta H/H$ avec ΔH le tassement vertical d'une couche de hauteur H)

Loi - Elastique linéaire 1D

$$\epsilon_{zz} = \Delta\sigma_{zz}/E$$

Loi - Elastique non-linéaire (consolidation oedométrique)

- sol normalement consolidé ($\sigma'_o = \sigma'_{vmax}$ où σ'_{vmax} est la contrainte effective verticale maximale auquel le sol a été soumis)

$$\epsilon_{zz} = \frac{C_c}{1+e}\,\mathrm{Log}\frac{\sigma'}{\sigma'_o} \qquad \sigma' > \sigma'_o$$

- Sol sur-consolidé ($\sigma'_o < \sigma'_{vmax}$ où σ'_{vmax} est la contrainte effective verticale maximale auquel le sol a été soumis)

$$\epsilon_{zz} = -\frac{\Delta e}{1+e} = \frac{C_p}{1+e}\,\mathrm{Log}\frac{\sigma'}{\sigma'_o} \qquad \sigma' < \sigma'_{vmax}$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{C_p}{1+e}\,\mathrm{Log}\frac{\sigma'_{vmax}}{\sigma'_o} + \frac{C_c}{1+e}\mathrm{Log}\frac{\sigma'}{\sigma'_{vmax}} \qquad \sigma' > \sigma'_{vmax}$$

On notera que l'on doit utiliser le Log en base 10 dans les formules précédentes ($\mathrm{Log}x = \ln x/\ln 10 \sim 0.434294\ln x$).

Temps caractéristique de consolidation primaire

$$t = H^2/c_v$$

où H est la longueur de drainage de la couche, $c_v = \dfrac{k}{\gamma_w(m_v + n\beta_f)}$ est la diffusivité hydraulique du sol avec k le coefficient de perméabilité (m/s), m_v la compressibilité oedoemétrique drainée du sol (Pa), n sa porosité et β_f la compressibilité de l'eau (1/Pa).

3 Fondations profondes

3.1 Capacité portante d'un pieu isolé sous chargement vertical

3.1.1 Selon le DTU

- Conditions drainées:
  - résistance de pointe unitaire

$$q_{pl} \approx 50N_{qm} + \lambda c' N_c$$
$$N_{qm} = 10^{3.04\tan\phi'} \qquad N_c = (N_{qm} - 1)\cot\phi'$$
$$\lambda = 1 + 0.3(B/D)$$

    avec $B = D$ pour des pieux circulaires.
  - frottement latéral unitaire

$$q_s = K\sigma'_v \tan\delta$$

    avec $K_a \leq K \leq K_o$, $\delta = \phi'$ pour des pieux forés, $K_o \leq K \leq K_p$ pour des pieux battus ($\delta = 2/3\phi'$ pieu en béton, $\delta = \phi'/2$ pieu en acier).

- Conditions non drainées
  - résistance de pointe unitaire

$$q_{pl} = 7\lambda c_u$$
$$\lambda = 1 + 0.3(B/D)$$

  - frottement latéral unitaire

$$q_s = \beta c_u$$

    avec $\beta \approx 0.5 - 0.7$ pour des pieux forés, $\beta \approx 0.7 - 1$ pour des pieux battus.

3.1.2 Selon Lang & Huder

- Conditions drainées:
  - résistance de pointe unitaire

$$q_{pl} \approx (\sigma'_{v,pointe} N_q + c' N_c)\chi$$
$$N_q = e^{\pi\tan\phi'} \tan^2(\pi/4 + \phi'/2) \qquad N_c = (N_q - 1)\cot\phi'$$

    avec χ facteur de forme (fonction du rapport longueur sur diamètre et de l'angle de frottement du sol) $\chi \in [1 - 5]$ donné par un abaque.

- frottement latéral unitaire

$$q_s = c' + \sigma'_{v,moyen} K \tan\delta$$

avec typiquement $K \tan\delta = 0.4$ pour des pieux forés, 0.8 pour des pieux battus. $\sigma'_{v,moyen}$ est la contrainte effective moyenne le long du pieu.

- Conditions non-drainées
  - résistance de pointe unitaire

$$q_s = N_c c_u$$

avec le facteur $N_c \in [6-9]$ en fonction du rapport longeur sur diamètre du pieu - donné par un abaque.

  - frottement latéral unitaire

$$q_s \approx \bar{s}$$

avec $\bar{s} = 0.6 - 0.9 c_u$. pour les pieux forés et $\bar{s} \approx c_u$ pour les pieux battus.

3.2 Formule de battage

Formule générale

$$P_D h = \left[Q_D - (P_D + P_C + P_p)\right] s + P_D h \frac{(P_p + P_C)(1-e^2)}{(P_D + P_C + P_p)} + \mu Q_D^2 \frac{L}{E_p A_p}$$

avec P_D le poids du mouton, P_C et P_p les poids du casque et du pieux. Q_D la capacité portante dynamique. E_p le module d'élasticité du pieux et A_p l'aire de la section du pieu. Dans le cas de la formule de Crandall et des Hollandais $e = 0$. Pour Crandall $\mu = 0.5$, pour la formule des Hollandais $\mu = 0$. La capacité portante dynamique est divisée par un coefficient de reduction pour obtenir un capacité portante statique admissible équivalente $Q_{adm} = Q_D/n$ avec $n = 6$ en utilisant la formule des Hollandais, $n = 4$ avec la formule de Crandall.

3.3 Tassements

Approximation de Cassan-Cambefort pour le tassement en tête d'un pieu de diamètre D et de longueur L et de module E_p

$$s = \frac{4}{\pi} \frac{P}{D} \times \frac{1 + \frac{R}{a D E_p} \tanh(aL)}{R + a D E_p \tanh(aL)} \qquad a^2 = \frac{4B}{D E_p}$$

où $R \approx 4.5 E_m$ ($13.5 E_m$) et $B \approx 0.42 E_M$ ($1.25 E_M$) pour des pieux forés (battus). E_M étant le module pressiométrique du sol.

Les méthodes basées sur l'élasticité résultent en des abaques (e.g. méthode de Poulos).

3.4 Effet de groupe

Coefficient d'éfficacité

- Dans les argiles (pour une rupture en bloc)

$$C_e \approx \frac{2s(m+n-2)}{\pi D\, m \times n}$$

avec s la distance entre pieux, m et n les nombres de pieux selon x et y respectivement et D le diamètre des pieux.

- Formule de Converse-Labarre

$$C_e \approx 1 - 2\arctan(D/s)\frac{m(n-1)+n(m-1)}{\pi m \times n}$$

4 Hydraulique des sols

Charge hydraulique $h = u/\gamma_w + z$ (avec z hauteur prise positive vers le haut - choix de l'origine arbitraire).
Gradient hydraulique $\mathbf{i}$ et vecteur vitesse d'écoulement $\mathbf{v}$ (loi de Darcy)

$$\mathbf{i} = -\nabla h \qquad \mathbf{v} = k \times \mathbf{i}$$

avec k le coefficient de perméabilité (en m/s).

Formules de Dupuit pour un puit de pompage

- pour une nappe libre

$$Q = \pi k \frac{H^2 - h^2}{\ln R/R_p}$$

- pour une nappe captive de hauteur m

$$Q = \pi k \frac{2m(H-h)}{\ln R/R_p}$$

où k est le coefficient de perméabilité, H la hauteur piezométrique loin du puit (valeur initiale) et h la hauteur piezométrique dans le puit de rayon R_p. R est le rayon d'action du puit que l'on peut estimer avec la formule de $R \approx 3000(H-h)\sqrt{k}$ (avec k en m/s et R, H et h en m). Q est le débit en m^3/s.

Rayon équivalent d'une fouille

Fouille Circulaire	Carrée	Rectangulaire	Très allongée	
$R_F = R$	$R_F = L/1.7$	$R_F = (L+\ell)/3.7$	$R_F = L/4$	

Ecoulement autour d'un écran (solution de Mandel) Cas d'un sol de perméabilité isotrope et homogène. Le gradient hydraulique à l'aval et l'amont de l'écran est donné par

$$i_{aval} = \alpha \frac{h_w + t_w}{t - t_w} (> 0 \text{ vers le haut}) \qquad i_{amont} = (1-\alpha)\frac{h_w + t_w}{h_w + t} (> 0 \text{ vers le bas})$$

avec h_w la distance entre le fond de fouille et la nappe phréatique du coté non-excavé, t la longueur de la fiche et t_w la distance entre la nappe et le fond de fouille du coté excavé. Une approximation simple pour α valide pour le cas $\frac{t-t_w}{h_w+t_w} > 0.1$ est donnée par:

$$\alpha \approx 0.095 + \frac{0.81}{1 + \sqrt{1 + (h_w + t_w)/(t - t_w)}}$$

5 Etats actifs/passifs - poussée / butée des terres sur les murs / parois de soutènement

5.1 Long terme - conditions drainées

- Etat actif (poussée)

$$
\begin{aligned}
e_a &= K_a(\phi', \delta, \beta)\sigma'_v - (1 - K_a(\phi', \delta, \beta))c' \cot \phi' \\
e_{ah} &= e_a \cos \delta \qquad e_{av} = e_a \sin \delta
\end{aligned}
$$

Formulaire générale de Coulomb:

$$
K_a = \frac{\cos^2(\phi' - \lambda)}{\cos^2 \lambda \cos(\lambda + \delta) \left[1 + \sqrt{\frac{\sin(\delta+\phi')\sin(\phi'-\beta)}{\cos(\lambda+\delta)\cos(\lambda-\beta)}}\right]^2}
$$

où β est l'angle du terrain par rapport à l'horizontal, λ l'inclinaison du mur (par rapport à la verticale), δ l'angle de friction mur-sol. Dans le cas d'une paroi lisse verticale ($\delta = \lambda = 0$) et un sol horizontal ($\beta = 0$), on a $K_a = K_{ah} = (1 - \sin \phi')/(1 + \sin \phi')$.

- Etat passif (butée)

$$
\begin{aligned}
e_p &= K_p(\phi', \delta, \beta)\sigma'_v + (K_p(\phi', \delta, \beta) - 1)c' \cot \phi' \\
e_{ph} &= e_p \cos \delta \qquad e_{pv} = e_p \sin \delta
\end{aligned}
$$

K_p est donné par les abaques de Caquot-Kerisel. Dans le cas d'une paroi lisse verticale et un sol horizontal, une (sur)-estimation est donnée par $K_p = K_{ph} = (1 + \sin \phi')/(1 - \sin \phi')$.

- Etat initial

$$
\sigma'_h = K_o \sigma'_v \qquad \text{avec } K_o \approx 1 - \sin \phi'.
$$

5.2 Court terme - conditions non-drainées

- Etat actif (poussée)

$$
\sigma_h = K\sigma_v \qquad K \approx 1 - m\frac{4c_u}{\gamma H}
$$

où H est la hauteur de l'excavation et $m \approx 0.8$ pour des argiles normalement consolidées.

- Etat passif (butée)

$$
\sigma_h \approx \sigma_v + 2c_u
$$

5.3 Effet de surcharge sur la paroi

- Surcharge uniforme q en surface sur une bande de largeur b (Grau) à une distance a de la paroi. L'effet sur la paroi est une pression uniforme p entre 2 porfondeurs z_1 et z_2

$$
\begin{aligned}
p &= \frac{q.b. \tan(\pi/4 - \phi/2)}{(a + b)\tan(\pi/4 + \phi/2) - a \tan \phi} \\
z_1 &= a \tan \phi \\
z_2 &= (a + b)\tan(\pi/4 + \phi/2)
\end{aligned}
$$

- Charge ponctuelle Q en surface à une distance a de la paroi. L'effet sur la paroi est une pression décroissant linéairement entre 2 profondeurs z_1 et z_2 avec pour valeur maximal p_{max} en z_1

$$
\begin{aligned}
p_{max} &= \frac{4Q\tan(\pi/4-\phi/2)}{a^2\left[\tan(\pi/4+\phi/2)-\tan\phi\right]}\\
z_1 &= a\tan\phi\\
z_2 &= a\tan(\pi/4+\phi/2)
\end{aligned}
$$

  On notera également que l'effet de cette charge ponctuelle se repartit également linéairement entre $-a/2$ et $a/2$ dans la direction horizontale (effet 3D).