Notes Elasto-plasticité

B. Lecampion

February 24, 2020

Remarque 1: la déformation totale d'un matériau élasto-plastique est la somme d'une partie élastique ϵ_{ij}^e (reversible) et une partie plastique irréversible ϵ_{ij}^p:

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^p$$

La relation d'élasticité reliant contraintes et la partie élastique des déformations reste valide:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}\epsilon_{kl}^e = c_{ijkl}\left(\epsilon_{kl} - \epsilon_{kl}^p\right)$$

Remarque 2: Les déformation plastique ne sont pas 'visqueuses', en d'autres terme ne dépendent pas du temps physique. En revanche, elles sont dépendentes de l'histoire du chargement qui est souvent ... exprimé comme une fonction temporelle. On utilisera donc beaucoup en élasto-plasticité le taux de déformation $\dot{\epsilon}_{ij}$.

Le critère de rupture exprime mathématiquement les observation expérimentales suivantes

1. en dessous d'un seuil de contraintes la déformation est strictement élastique (réversible)
2. les contraintes ne peuvent pas aller au délà de ce critère de rupture (si on contrôle un essai en force, tout s'écroule brutalement. C'est pour cela que l'on contrôle en vitesse de déplacement)

On écrit donc

$$\begin{aligned} f(\sigma_{ij}) < 0 \qquad \dot{\epsilon}_{ij}^p = 0 \\ f(\sigma_{ij}) = 0 \qquad \dot{\epsilon}_{ij}^p > 0 \end{aligned}$$

On notera que pour beaucoup de matériaux, lors d'essai mécanique un durcissement (c'est le cas des métaux, de certains sols selon leur état initial- i.e. sous-consolidé) ou un radoucissement[1] (c'est le cas de certains sols selon leur état initial, i.e. sur-consolidé) est observé. Le critère évolue alors avec la déformation plastique. On n;envisagera pas de tels cas. On se réduira au cas **élastique parfaitement plastique** - le critère n'évolue pas (dans un essai de compression/traction, la contrainte "plafonne" une fois la rupture atteinte).

1 Ecoulement plastique / Analogie avec la friction

Pour un matériau parfaitement plastique associé, le taux de déformations plastiques $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ est considéré comme étant proportionnel au gradient du critère de rupture

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \tag{1}$$

,i.e. normal à la "courbe" de niveaux définit par $f = 0$. λ est appelé multiplicateur plastique ([1/T]). Les expériences confirment que cela n'est pas "trop" faux pour beaucoup de matériau.

Analogie avec la friction

Afin de l'intuiter physiquement, il est intéressant de discuter le cas du mouvement d'un bloc de masse M reposant sur un plan prenant en compte la friction entre ce bloc et le plan. On notera μ le coefficient

[1] hardening vs softening en anglais

de friction; F_x , F_y les forces horizontales appliquées sur le bloc; $\dot{u}_x$ et $\dot{u}_y$ les vitesses de déplacement correspondantes. Afin de faire bouger le bloc, il convient que

$$\sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \mu M g$$

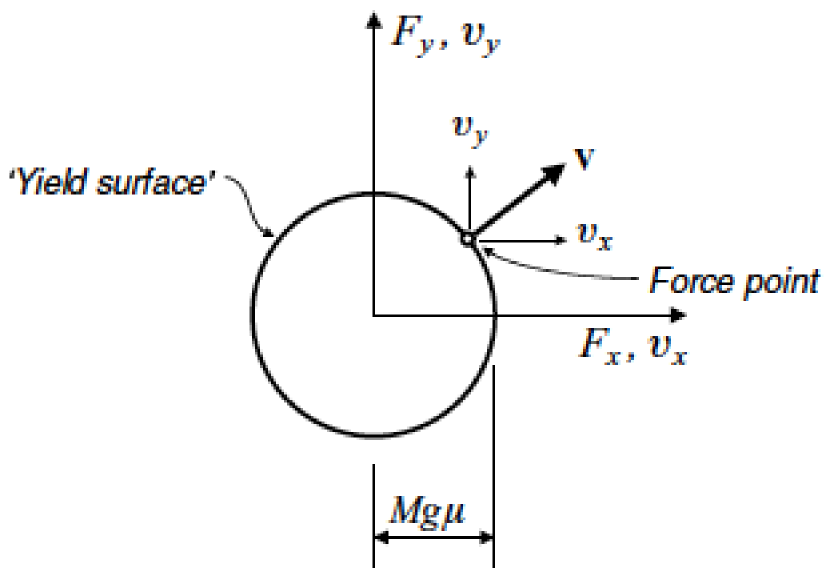
que l'on peut récrire

$$F_x^2 + F_y^2 = (\mu M g)^2$$

Cette expression est "similaire" à un critère de rupture ($f = 0$). Si $F_x^2 + F_y^2 < (\mu M g)^2$, il n'y a pas de mouvement, sinon on a la contrainte $F_x^2 + F_y^2 = (\mu M g)^2$ pendant le glissement. Dans l'espace des forces horizontales (F_x, F_y), c'est un cercle. On intuite facilement que la direction du mouvement de glissement est aligné avec la résultante des forces horizontales, i.e.

$$\frac{\dot{u}_x}{\dot{u}_y} = \frac{F_x}{F_y}$$

Si on represente graphiquement les choses on voit que le vecteur de vitesse de glissement est "normal" au critère de rupture:



Il est utile de définir le taux de travail plastique $\dot{W}_p$, qui correspondant à la puissance dissipée:

$$\dot{W}_p = F_x \dot{u}_x + F_y \dot{u}_y$$

On voit que $\dot{W}_p$ n'est d'autre que le produit vectoriel de la force horizontale avec le vecteur de vitesse de glissement. Il est donc "maximal" pour le cas où ce dernier est exactement aligné avec la résultante des forces (normal au critère de rupture).

Faisons maintenant l'expérience suivante, on préscrit la vitesse de glissement ($\dot{u}_x$ et $\dot{u}_y$). Quelles sont les forces F_x, F_y correspondantes? On l'obtient en trouvant le point sur le cercle de rupture tel que la résultante est alignée avec le vecteur vitesse de glissement.

Le fait que la déformation plastique est telle que le taux de travail plastique $\dot{W}_p = \sigma_{ij}\dot{\epsilon}_{ij}^p$ (qui est lié à l'énergie dissipée) est maximal (au cours de la déformation) est lié à la loi d'écoulement associé normale eq. (1).

Remarque 1 Le fait que $\dot{W}_p$ est maximal n'aide pas vraiment à déterminer le multiplicateur plastique λ ;(

Remarque 2 L'hypothèse du travail plastique maximale / normalité de la def. plastique par rapport à la surface de rupture ne repose que sur un intuition. Elle n'est pas forcèment vérifiée pour certains matériaux. Notamment les milieux granulaires / sols ne sont pas très bien modélisé par un critère de Mohr-Coulomb associé (top de dilatance cf. exo 1) - il convient alors de "relacher" cette hypothèse de normalité et de prendre un critère dit non-associé avec un potentiel d'écoulement plastique g différent du critère f.

Remarque 3 Pour un matériau élastique parfaitement plastique, dans ce cas les déformations plastiques peuvent augmenter infiniment sans augmentation des contraintes (réponse plate dans la courbe effort-déformation). Le plateau plastique implique qu'il n'éxiste pas de relation unique entre contraintes et deformation plastique. Connaissance des contraintes n'implique pas connaissance des déformations. En revanche, si les déformations sont imposées alors on peut calculer les contraintes. On voit donc que pour un matériau parfaitement plastique, suivant le type de conditions aux limites il n'est pas forcèment possible de déterminer le multiplicateur plastique (cela dépend aussi de la géométrie). En revanche, le comportement plastique parfait permet d'utiliser les théorèmes de l'analyse limite pour estimer les charges de ruines des structures géotechniques.