

Analyse limite & calcul à la rupture pour la géotechnique notes

B. Lecampion

February 23, 2020

La vérifications des états limites ultimes (ELU - ULS) repose sur la détermination de(s) la charge(s) maximale supportable par une structure (dans notre cas, une fondation, un mur de soutènement etc.). Dans ce cadre, l'analyse limite est très couramment employée, notamment en géotechnique. Elle repose sur un modèle rigide plastique du sol (en conditions drainées ou non-drainées selon que l'analyse est effectuée à long ou court terme). Les formules “classiques” de capacité portante des fondations ont été obtenues par cette méthode (avec plus ou moins d'approximations), idem pour la stabilité des talus. De plus, des nouveau logiciel éléments finis (e.g. OptumG2) permettent maintenant de faire directement de l'analyse limite numérique et donc d'obtenir des bornes des charges maximales pour des configurations complexes rapidement (sans devoir résoudre le problème élastoplastique temporel complet). L'idée de ces notes est d'introduire les méthodes d'analyse limite pour la géotechnique. Réferez vous au cours Mécanique des structures pour GC (Civil 223) et au cours de Mécanique des milieux continus (Civil 225) pour plus de détails sur les concepts de bases.

Conventions En géotechnique / mécanique des sols, les contraintes sont typiquement compressives et donc en pratique, la convention est de prendre les contraintes positives en compression. En ce qui concerne les déformations, deux conventions sont possibles: i) soit on garde une convention d'extension positive mais cela implique de mettre un signe – dans les lois de comportements (relation contraintes - déformation), soit ii) on utilise la convention que les déformations de “contraction” sont positives (i.e. extension négative). On utilise la deuxième convention ici. En résumé:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} > 0 & \quad \text{en compression} \\ \epsilon_{ij} > 0 & \quad \text{en contraction}\end{aligned}$$

On notera donc que comme $\epsilon_{ij} > 0$ en contraction, les déplacements seront positif dans le sens opposé du système de coordonnée choisi (en pratique, on retombera sur ses pieds avec un peu de sens de physique).

1 Le problème rigide-plastique

Soit un domaine V de surface S , le problème rigide-plastique consiste en

- les équations d'équilibre (en négligeant les efforts inertIELS - approche quasi-statique)

$$\sigma_{ij,j} - b_i = 0$$

où le signe moins devant les forces de volume est du à la convention de contraintes positives. On utilise ici la convention de sommation sur les indices répétés, et la notation suivantes pour les dérivées partielles

$$h_{,j} = \partial h / \partial x_j$$

b_i est une force de volume (en pratique le poids du sol). Le tenseur des contraintes est symmétrique $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ (conservation du moment angulaire).

- En tout point de V , le champ de contraintes est continument différentiable. Notons que des surfaces de discontinuité (de normal n_j) peuvent exister, mais le vecteur contraintes $T_i = \sigma_{ij}n_j$ doit être continu à travers de telles surfaces, soit

$$(\sigma_{ij}^- - \sigma_{ij}^+) n_j = [[\sigma_{ij}]] n_j = 0$$

où $[\sigma_{ij}]$ désigne donc le saut du champ de contraintes à travers d'une telle surface de discontinuité.

- les conditions aux limites en tractions et déplacement imposés:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}n_j &= t_i^d && \text{donnée sur } S_{t_i} \text{ de normale } n_j \\ u_i &= u_i^d && \text{donnée sur } S_{u_i} \end{aligned}$$

avec non intersection de S_{t_i} et S_{u_i} . On notera que par la suite on se restreint aux cas où les déplacements imposés ne varient pas en temps $\dot{u}_i^d = 0$, où l'on note la dérivée temporelle $\partial u / \partial t = \dot{u}$. On notera aussi S_t pour la surface où les tractions / efforts sont imposés.

- Le tenseur des déformations

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$$

- Équations de compatibilité - ici pour l'élasticité plane:

$$\partial_{yy}\epsilon_{xx} + \partial_{xx}\epsilon_{yy} = 2\partial_{xy}\epsilon_{xy}$$

- Soit, le critère de plasticité f (et le potentiel d'écoulement plastique g). La loi de comportement rigide plastique s'écrit

$$\begin{aligned} f(\sigma_{ij}) &< 0 & \dot{\epsilon}_{ij} &= 0 \\ f(\sigma_{ij}) &= 0 & \dot{\epsilon}_{ij} &= \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \end{aligned} \tag{1}$$

où l'on note la dérivée temporelle $\partial u / \partial t = \dot{u}$. Le cas de la plasticité associée correspond à $f = g$. On se restreint à ce cas ici. λ est le multiplicateur plastique ($\lambda \geq 0$) (sans dimension car f a une dimension de contraintes). On voit donc que

$$\lambda f(\sigma_{ij}) = 0$$

Dans le cas de la plasticité associée ($f = g$), les déformations plastiques sont orientées dans la direction normale de la surface de rupture.

Le modèle rigide-plastique néglige les déformations élastiques du milieu par rapport aux déformations plastiques: une hypothèse satisfaisante lorsque l'on veut étudier la ruine d'une structure.

On rappelle qu'en mécanique des milieux continus, on appelle un champ de contraintes σ_{ij} *statiquement admissible* si il vérifie les équations d'équilibres et les conditions aux limites en tractions. On appelle un champ de déplacement u_i *cinétiquement admissible* si il vérifie les conditions aux limites en déplacement et est régulier (i.e. ne crée pas d'ouverture ou de "trou" dans le domaine, en revanche des surfaces de glissement peuvent apparaître).

1.1 Principe des puissances virtuelles

Le principe des puissances virtuelles (PPV) est l'équivalent du principe des travaux virtuels écrit en vitesse. Soit \hat{u}_i , un champ de vitesses virtuelles cinématiquement admissibles, le principe des puissances virtuelles s'écrit (en quasi-statique - i.e. sans effet inertiel):

$$\mathcal{P}_{ext}(\hat{u}_i) = \mathcal{P}_{int}(\hat{u}_i)$$

où la puissance des efforts extérieurs $\mathcal{P}_{ext}(\hat{u}_i)$ est définie par:

$$\mathcal{P}_{ext}(\hat{u}_i) = \int_V (-b_i) \hat{u}_i \, dV + \int_{S_t} t_i^d \hat{u}_i \, dS$$

[Attention le signe – dans l'expression précédente est due à la convention de contraintes positive en compression et la convention de déplacement positif dans la direction opposée au système de coordonnée] et la puissance intérieure par

$$\mathcal{P}_{int}(\hat{u}_i) = \int_{V/S_\Sigma} \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}(\hat{u}_i) \, dV + \int_{S_\Sigma} \sigma_{ij} n_j [\hat{u}_i] \, dS$$

où $[\hat{u}_i]$ dénote le saut de vitesse virtuel à travers la surface S_Σ .

Note: on peut retrouver facilement le PPV en multipliant l'équation d'équilibre par \hat{u}_i et intégrant sur V et en utilisant la formule de Green ($\int_V h_i \hat{u}_i \, dV = \int_S h_i n_i \, dS$).

1.2 Théorèmes de l'analyse limite

- Théorème de la borne inférieure (lower bound theorem)

La ruine ne se produira pas si l'on peut trouver un état de contraintes qui réponde aux équations d'équilibre et aux conditions aux limites de traction (champ statiquement admissible - SA) et qui est partout inférieur ou égal au critère de rupture.

- Théorème de la borne supérieure (upper bound theorem)

La ruine doit se produire si, pour toute déformation plastique compatible (i.e. pour lequel le champ de déplacement est cinématiquement admissible), le taux de travail des forces externes est égal ou supérieur au taux de dissipation d'énergie interne.

[On notera que si il y a déformation, les contraintes correspondantes doivent satisfaire le critère de rupture. Des discontinuités de déplacement le long de bande de cisaillement sont possibles.]

1.3 Paramètres de chargement / notions des domaines de charges admissibles / Approches du calcul à la rupture

Pour un ouvrage géotechnique, les paramètres de chargement vont typiquement être : les charges à reprendre par les fondations, la hauteur d'une paroi / mur de soutenement, la force d'un ancrage, la longueur d'un clou etc.

Le but d'un calcul ELU est de déterminer le domaine admissible de ces charges. Dénons K ce domaine, si les charges (par exemple Q_1, Q_2) restent à l'intérieur de K l'ouvrage est stable. Evidemment le domaine K contient l'origine (charges nulles) - c.f. Figure 1.

Si les charges atteignent la frontière du domaine K , on arrive à la ruine de l'ouvrage: on ne peut pas avoir un champ de contraintes satisfaisant l'équation d'équilibre et le critère de plasticité simultanément en tout point de l'ouvrage. On parle alors de ruine plastique. On peut noter que ce domaine K va dépendre:

1. de la géométrie de l'ouvrage considérée
2. du critère de plasticité utilisé
3. du chargement

En revanche, il ne dépend pas du trajet de chargement (i.e. comment la ruine peut être atteinte) ni des conditions initiales (qui sont a priori telles que la structure est stable en étant non-chargée).

En pratique, on va approximer K par des approches par l'intérieur (dite statique) et par l'extérieur (dite cinématique).

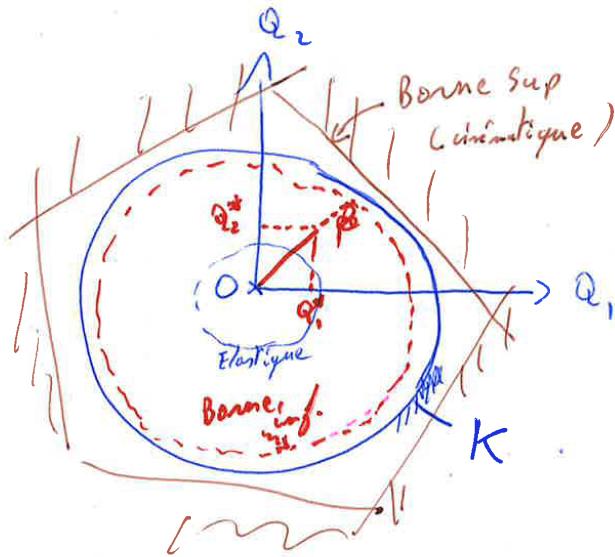


Figure 1: Domaine de stabilité K d'un ouvrage dans le cas de 2 paramètres de chargement (Q_1, Q_2) . On bornera K par l'intérieur (approche statique) et l'extérieur (approche cinématique).

- **Approche statique:** La philosophie de l'approche par l'intérieur consiste à trouver un champ de contraintes statiquement admissible en paramétrant le chargement par e.g. $(Q_1, Q_2) = \beta \times (Q_1^*, Q_2^*)$ (où Q_1^*, Q_2^* sont des valeurs des charges *petites* interieure à K) et ensuite maximiser β tout en vérifiant que le critère de plasticité $f(\sigma_{ij}) \leq 0$ en tout point du domaine. Ce faisant on obtient une borne inférieure K^- du domaine K (on démontre ce théorème plus loin dans ces notes).
- **Approche cinématique:** Cette fois ci, on va postuler un mécanisme de ruine, i.e. un champ cinématiquement admissible décrivant la ruine plastique de l'ouvrage. Ici en plus des paramètres de chargement, le mécanisme de ruine peut également être paramétrisé par un nombre fini de paramètres (exemple: l'inclinaison d'une surface de rupture). On va calculer la puissance dissipée liée à ce mécanisme de ruine en postulant que le champ de contraintes duquel dérivent les déformations vérifie le critère de plasticité. En utilisant le PPV, on va obtenir une borne supérieure K^+ du domaine K (on démontre ce théorème plus loin dans ces notes). Notons que dans le cas où le mécanisme de ruine est paramétré, il convient de minimiser la borne supérieure obtenue en fonction des paramètres du mécanisme de ruine choisi afin d'obtenir la borne supérieure la plus proche possible du domaine K (i.e. la plus petite).

2 Critères de plasticité en mécanique des sols

Rappelons brièvement les critères de résistance/plasticité classiques utilisés en mécanique des sols (note: vous verrez des modèles de comportement plus réalistes et complets lors du cours de master de Géomécanique notamment).

[On notera en passant que l'approche du calcul à la rupture est basée sur le comportement rigide parfaitement plastique, soit sans écrouissage/radoucissement du critère de plasticité. Une approche qui est d'autant plus valable que le matériau présente une rupture ductile. Hypothèse réaliste pour les sols.]

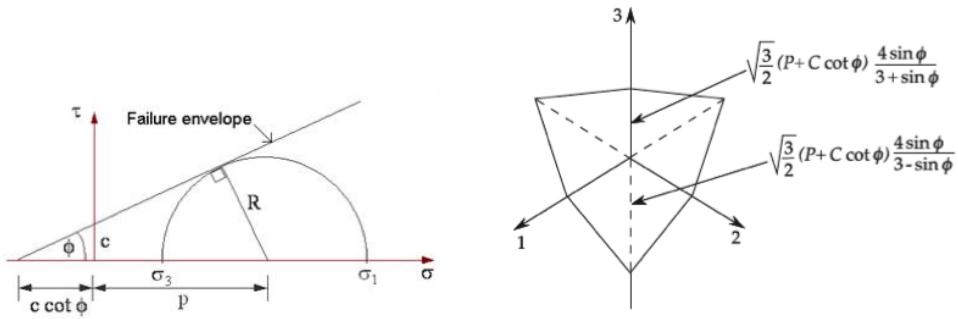


Figure 2: Critère de Mohr-Coulomb (diagramme de Mohr, dans le π -plan de l'espace de contraintes principales).

2.1 Court terme - long termes

2.1.1 Conditions drainées (long terme) - Mohr-Coulomb en contraintes effectives

A long terme, le modèle de Mohr-Coulomb (avec cohésion c' et angle de friction ϕ') est typiquement utilisé pour obtenir une estimation des charges ultimes (bien évidemment, des modèles plus complexes reproduisent mieux le comportement des sols - cf le modèle de Cam-Clay que vous verrez en Master). Dans le diagramme de Mohr, le critère de Mohr-Coulomb correspond à une droite. Il est important de souligner que ce critère de rupture à long terme est bien sur exprimé en fonction des contraintes effectives $\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - u\delta_{ij}$ (contraintes positives en compression). **Pour plus de simplicité (et de clarté) dans la suite de ces notes sur le calcul à la rupture, on ne fera pas de différence entre contraintes effectives et totales**¹. Dans l'espace des contraintes principales (contraintes positives en compression), $\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$, le critère s'écrit (Fig.2):

$$f(\sigma_{ij}) = (\sigma_I - \sigma_{III}) - (\sigma_I + \sigma_{III}) \sin \phi - 2C \cos \phi \quad (2)$$

On rappelle que pour la facette dont l'orientation correspond au point touchant la droite de Mohr Coulomb dans le diagramme de Mohr, notant σ_n la contrainte normale à cette facette et τ le cisaillement sur cette facette, le critère de Mohr-Coulomb s'écrit simplement:

$$f(\sigma_n, \tau) = \tau - c - \sigma_n \tan \phi \quad (3)$$

2.1.2 Conditions non-drainées (court terme) - Tresca en contraintes totales

A court terme, le critère de rupture d'un sol s'écrit en contraintes totales (à court terme i.e. en conditions non drainées, dans un essai tri-axial, qq soit l'état initial en augmentant la charge axiale, on obtient toujours le même cercle de Mohr en contraintes effectives). Le critère de Tresca (matériau purement cohérent, non-frictionnel) approxime correctement la rupture du sol à court terme (en *contraintes totales*):

$$f(\sigma_{ij}) = (\sigma_I - \sigma_{III}) - 2C$$

(et classiquement en mécanique des sols on note la cohésion non-drainée c_u).

2.1.3 Propriété de convexité du critère de plasticité

Plan tangent à la surface de rupture Soit une courbe $f(x_1, x_2)$ (dépendant de 2 variables). Au point (x_1^0, x_2^0) , la normale à cette courbe est donnée par son gradient de f à ce point: $(\partial f / \partial x_1, \partial f / \partial x_2)^0$. Un développement de Taylor au premier ordre autour de (x_1^0, x_2^0) , donne:

¹la distinction sera implicite: long terme - critère de Mohr-Coulomb en contraintes effectives, court terme - critère de Tresca en contraintes totales.

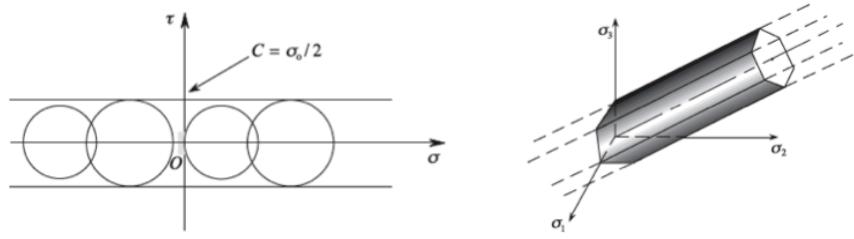
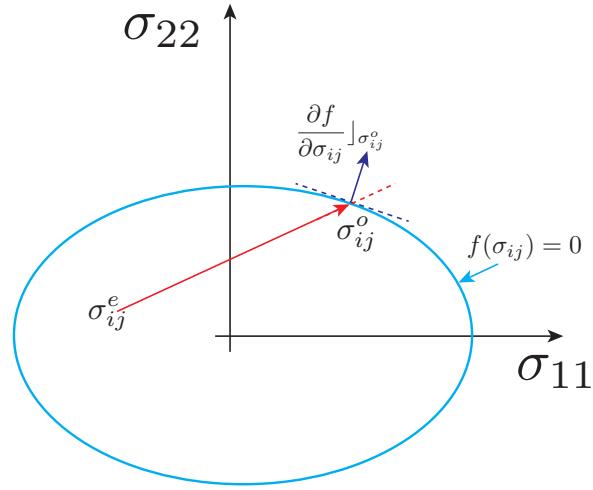


Figure 3: Critère de Tresca (diagramme de Mohr, & dans l'espace de 3 contraintes principales)

Figure 4: Surface de rupture ($f(\sigma_{ij}) = 0$) - exemple en 2D. Illustration de la propriété de convéxité $(\sigma_{ij}^o - \sigma_{ij}^e) \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}|_{\sigma_{ij}^o} > 0$.

$$f(x_1, x_2) = f(x_1^o, x_2^o) + (x_1 - x_1^o) \frac{\partial f}{\partial x_1}|_o + (x_2 - x_2^o) \frac{\partial f}{\partial x_2}|_o$$

la tangente à f au point (x_1^o, x_2^o) a pour équation $(x_1 - x_1^o) \frac{\partial f}{\partial x_1}|_o + (x_2 - x_2^o) \frac{\partial f}{\partial x_2}|_o = 0$, i.e. sous forme vectorielle (summation sur les indices répétés) $(x_i - x_i^o) \frac{\partial f}{\partial x_i}|_o = 0$. Le gradient de f en un point sur la surface donne la normale à celle-ci en ce point.

On peut facilement généraliser au cas d'une surface f fonction de n variables. Dans notre cas, $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ de telles sorte que le critère de plasticité $f(\sigma_{ij})$ ne dépend que de 6 valeurs du tenseur des contraintes (ou des 3 contraintes principales).

Convexité Il est plus simple de visualiser les choses en 2D. Prenons donc un exemple où le critère ne dépend que de σ_{11} et σ_{22} (cf Fig. 4). On voit que pour tout point σ_{ij}^e dans le domaine élastique ($f(\sigma_{ij}^e) < 0$), l'angle entre les vecteurs $(\sigma_{ij}^o - \sigma_{ij}^e)$ et $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}|_{\sigma_{ij}^o}$ est inférieur à $\pi/2$ (avec σ_{ij}^o un point sur la surface de rupture $f(\sigma_{ij}^o) = 0$), soit:

$$(\sigma_{ij}^o - \sigma_{ij}^e) \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}|_{\sigma_{ij}^o} > 0$$

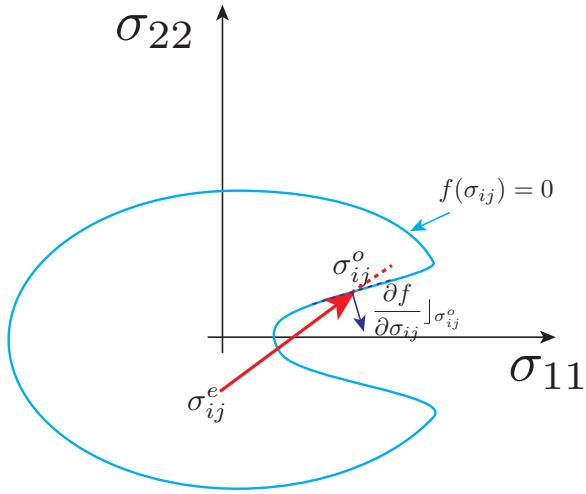


Figure 5: Example de surface concave où l'on peut avoir $(\sigma_{ij}^o - \sigma_{ij}^e) \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}|_{\sigma_{ij}^o} < 0$. Expérimentalement, on observe que les surfaces de rupture sont toujours convexes (cf Fig.4). Cela se comprend intuitivement physiquement.

Cette propriété découle de la “convexité” de la surface de rupture. On voit bien sur la Fig.5 que pour une surface concave cela n'est plus le cas en tout point. On observe expérimentalement que les critères de rupture ont la propriété de convexité (et on peut le comprendre physiquement en imaginant différents chemins de chargement). Cette propriété est importante pour démontrer les théorèmes de l'analyse limite (borne inférieure & supérieure de la charge limite d'une structure).

2.2 Déformations plastiques

Expérimentalement, on remarque que les déformations plastiques peuvent être dérivées d'un potentiel g lorsque le critère de plasticité est atteint, soit:

$$\begin{aligned} f(\sigma_{ij}) &< 0 & \dot{\epsilon}_{ij} &= 0 \\ f(\sigma_{ij}) &= 0 & \dot{\epsilon}_{ij} &= \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \end{aligned}$$

Pour les métaux etc., le potentiel g est bien approximé par le critère de rupture f : $f = g$ (postulat dit de Drucker qui n'est pas trop faux expérimentalement pour certains matériaux). On dit alors que la plasticité est “associée”. Cette hypothèse simplifie beaucoup les calculs et permet notamment de borner les charges limites. En revanche pour les sols, elle n'est pas nécessairement vérifiée expérimentalement (vous re-verrez cela lors de vos cours de Master). Pour le critère de Mohr-Coulomb, l'hypothèse $f = g$ implique que les déformations plastiques augmentent toujours de volume (alors que le comportement des sols est plus complexe et dépend de la pression de pré-consolidation). Néanmoins, il est usuel pour les calculs à la rupture (afin de vérifier les ELUs) de faire les calculs sous l'hypothèse de la plasticité associée: $f = g$. Les bornes obtenues avec cette hypothèse semblent également valable pour le cas non-associé ($f \neq g$) même si aucune preuve mathématique formelle n'existe.

2.2.1 Mohr-Coulomb - dilatance

Prenons le cas du critère de Mohr-Coulomb et raisonnons dans le repère des contraintes principales (en 2D). Pour un critère associé ($f = g$), les déformations plastiques principales seront également dans le même repère.

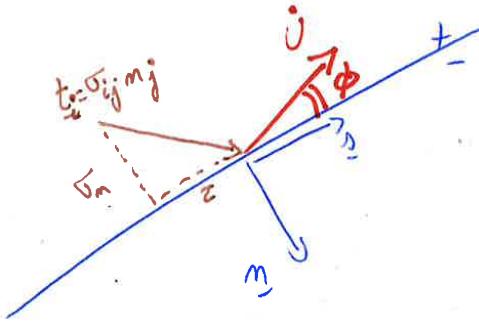


Figure 6: Surface de glissement dans un matériau Mohr-Coulomb. Le vecteur vitesse de discontinuité de déplacement $[[u_i]] = u_i^- - u_i^+$ est représenté ici par \dot{U} dans le cas $u_i^+ = 0$.

En utilisant eq.(2) et (1) on a pour les déformations plastiques principales:

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}_I &= \lambda(1 - \sin \phi) \\ \dot{\epsilon}_{III} &= \lambda(-1 - \sin \phi)\end{aligned}$$

et la déformation volumique $\dot{\epsilon}_v = \dot{\epsilon}_I + \dot{\epsilon}_{III}$ peut s'exprimer en fonction de la déformation de cisaillement $\dot{\gamma} = \dot{\epsilon}_I - \dot{\epsilon}_{III}$:

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}_v &= -\dot{\gamma} \sin \phi \\ \dot{\gamma} &= 2\lambda\end{aligned}$$

L'angle de frottement ϕ étant toujours inférieur à $\pi/2$ et le multiplicateur plastique $\lambda > 0$, on a $\dot{\epsilon}_v < 0$ qui correspond dans la convention MS (compression positive, contraction positive) à une augmentation de volume. En d'autres termes, toute déformation plastique de cisaillement est associée à une augmentation de volume pour le critère de MC associé, ceci est partiellement vrai - en revanche il est typiquement observé qu'à partir d'une certaine déformation plastique: le taux déformation volumique devient nul et la déformation plastique n'est que cisailante (on appelle cela l'état critique en mécanique des sols). Il convient d'utiliser des modèles plus complexes pour prendre en compte ce comportement. Encore une fois, pour le calcul ELU et l'estimation des charges de ruines, le critère de Mohr-Coulomb est efficace.

2.2.2 Surface de Glissement

Il est courant dans les sols que la déformation plastique se localise et que des surfaces de glissement apparaissent. Imaginons le cas d'un matériau satisfaisant le critère de Mohr-Coulomb pour lequel la déformation plastique est localisée sur une surface de glissement Σ . La déformation plastique localisée devient en fait une discontinuité de déplacement: $[[u_i]] = u_i^- - u_i^+$ (c.f. fig.6).

On peut écrire le critère de Mohr-Coulomb directement en terme de contraintes normales et tangentielles à cette surface de glissement:

$$f(\sigma_n, \tau) = \tau - c - \sigma_n \tan \phi.$$

avec

$$\begin{aligned}t_i &= \sigma_{ij}n_j \text{ vecteurs contraintes sur } S_\Sigma \\ t_s &= \tau = s_i \sigma_{ij}n_j \text{ contrainte de cisaillement sur } S_\Sigma \\ t_n &= \sigma_n = n_i \sigma_{ij}n_j \text{ contrainte normale sur } S_\Sigma\end{aligned}$$

où n_j est la normale à la surface de glissement S_Σ et s_i le vecteur tangent associé.

On écrira l'écoulement plastique sous la forme

$$[[\dot{u}_i]] = \lambda_d \frac{\partial f}{\partial t_i} \quad f(t_i) = 0$$

où λ_d est un multiplicateur plastique de dimensions $[L/T]$ ici et $\lambda_d f = 0$ et $\lambda_d \geq 0$.

On voit donc que le rapport des vitesses de discontinuité plastiques normales et tangentielles est:

$$\left\| \frac{[[\dot{u}_n]]}{[[\dot{u}_s]]} \right\| = \tan \phi$$

Le vecteur de discontinuité de déplacement plastique localisée sur la surface de glissement fait donc toujours un angle ϕ par rapport à celle-ci (cf. Fig. 7). Il existe une “dilatance” lié au cisaillement localisé. Le raisonnement est strictement similaire à la sous-section précédente. Notez que dans notre convention (tastement - overlap positif / compression positive),

$$\begin{aligned} [[\dot{u}_n]] &= -\lambda \tan \phi \\ [[\dot{u}_s]] &= \lambda \end{aligned}$$

En définissant $[[\dot{U}]]$ la norme du vecteur de vitesse de discontinuité de déplacement, on peut réécrire

$$\begin{aligned} [[\dot{u}_n]] &= -[[\dot{U}]] \sin \phi \\ [[\dot{u}_s]] &= [[\dot{U}]] \cos \phi \end{aligned} \quad (4)$$

Calcul de la puissance dissipée le long d'une surface de glissement On aura souvent à calculer la puissance dissipée le long de la surface de glissement à la rupture:

$$\int_{S_\Sigma} \sigma_{ij} n_j [[\dot{u}_i]] \, dS$$

Intéressons nous ici à l'intégrande

$$p_{diss} = \sigma_{ij} n_j [[\dot{u}_i]]$$

qui dans le repère (n, s) local à la surface de glissement s'écrit donc:

$$p_{diss} = \tau [[\dot{u}_s]] + \sigma_n [[\dot{u}_n]]$$

A la rupture, on a l'égalité $f = 0$, soit

$$\tau = c + \sigma_n \tan \phi$$

ce qui permet d'obtenir en utilisant (4)

$$\begin{aligned} p_{diss} &= c [[\dot{U}]] \cos \phi + \sigma_n [[\dot{U}]] \sin \phi - \sigma_n [[\dot{U}]] \sin \phi \\ &= c [[\dot{U}]] \cos \phi \end{aligned}$$

On voit donc que la puissance dissipée le long d'une surface de glissement est nulle dans le cas d'un matériau de cohésion nulle. Ce résultat découle directement de l'hypothèse d'un écoulement plastique associé ($f = g$). Le résultat est différent pour le cas non-associé (en exercice, dérivé le cas avec un angle de dilatance $\psi \neq \phi$).

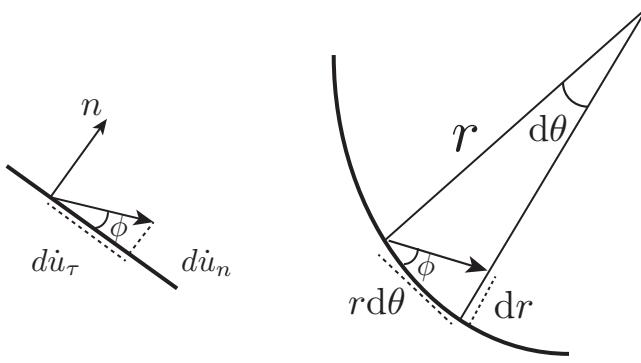


Figure 7: Formes des surfaces de glissement dans un matériau avec un critère de Mohr Coulomb: droite ou spirale logarithmique.

Surface de glissement courbe ? Considérons maintenant une surface de glissement non-nécessairement droite. En tout point, le vecteur déplacement plastique a toujours un angle ϕ par rapport à la surface de glissement. Localement celle ci peut être paramétrée par un rayon de courbure r (dans le cas d'un droite $r \rightarrow \infty$), on voit que pour une rotation $d\theta$ autour du centre de rotation instantané, l'incrément de rayon étant dr , on a (cf Fig. 7):

$$\frac{dr}{rd\theta} = \tan \phi$$

soit après intégration:

$$r = r_o \exp(\theta \tan \phi)$$

Une telle courbe correspond à une spirale logarithmique.

On en conclut donc pour un sol: en conditions drainées ($\phi = \phi'$, contraintes effectives), les surfaces de glissements seront soit des droites ($r_o \rightarrow \infty$), soit des spirales logarithmiques. En conditions non-drainées ($\phi = 0$, contraintes totales), les surfaces de glissement sont soit des droites, soit des arc de cercles.

2.3 Discontinuités de contraintes

Il est également possible que des discontinuités de contraintes apparaissent dans un volume se plastifiant. Considérons une surface (de normale n) avec de part et d'autre de celle-ci deux champs de contraintes (A& B, cf Fig.8), il convient de rappeler que le vecteur de tractions doit être continu entre ces 2 zones, i.e.

$$[[\sigma_{ij}]] n_j = (\sigma_{ij}^B - \sigma_{ij}^A) n_j = 0$$

Toutefois, il peut y avoir une rotation des directions principales de contraintes ainsi qu'un saut dans les valeurs. Considérons le cas de 2 régions A et B ayant deux états de contraintes différents et étant tous les deux à la rupture. La continuité des tractions à travers la surface séparant A et B implique que les cercles de Mohr des 2 régions ont un point commun X (i.e. afin de satisfaire la continuité des tractions entre les 2 zones et donc vérifier l'équilibre). On se réfère à la Fig. 8 où le centre des cercles de Mohr correspondant aux régions est noté A et B. De la région A à B, on a une changement de direction principale de contraintes $d\vartheta$. Explorons le cas où $ds' \rightarrow 0$, $\sin 2d\vartheta \approx 2d\vartheta$, $X \rightarrow T$, l'angle $\widehat{XBA} \approx \pi/2 - \phi$ et $\widehat{BX} \approx \widehat{AX} \approx s' \sin \phi$. En appliquant la loi des sinus au triangle ABX on obtient:

$$\frac{\widehat{AX}}{\sin \widehat{XBA}} = \frac{s' \sin \phi}{\cos \phi} = \frac{\widehat{AB}}{\sin \widehat{AXB}} = \frac{ds'}{\sin 2d\vartheta}$$

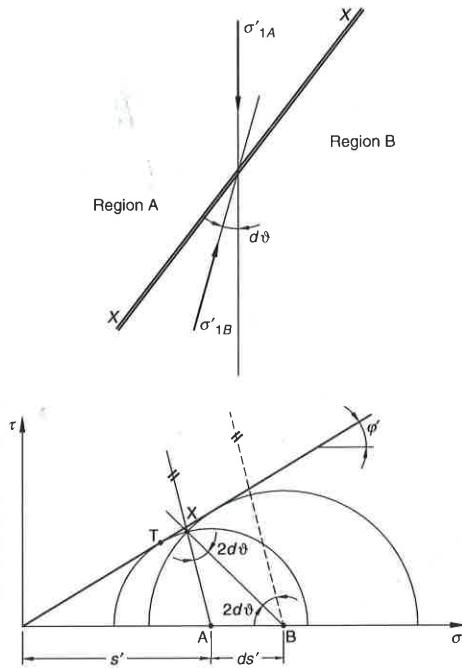


Figure 8: Discontinuité de contraintes entre 2 régions et cercles de Mohr associés.

on obtient alors la relation suivante entre ds' (increment de contraintes moyenne) et $d\theta$ l'angle du changement des directions principales entre les régions A et B ($\sin x \approx x$ pour $x \ll 1$) :

$$\frac{ds'}{s'} = 2d\vartheta \tan \phi$$

Si maintenant, on considère un éventail continu de discontinuité de contraintes dans une région fini où la rotation des directions principales de contraintes total est ϑ (entre le début et la fin de l'éventail de discontinuité), par intégration, on obtient la variation entre les cercles de Mohr au début (contraintes moyenne s'_1) et à la fin (contraintes moyenne s'_2) de l'éventail:

$$\frac{s'_1}{s'_2} = \exp 2\vartheta \tan \phi$$

[Notez que l'on retrouve une expression mathématique du type spirale logarithmique].

3 Démonstration des théorèmes de l'analyse limite

|Cette partie 3 ne sera pas détaillée en cours - je vous invite à refaire les dérivations par vous même|

On rappelle le PPV valable pour tout champ de vitesse C.A (quand les déplacements imposés sont constants en temps)

$$\int_{V/S_\Sigma} \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}(\hat{u}_i) \, dV + \int_{S_\Sigma} \sigma_{ij} n_j \left[\left[\hat{u}_i \right] \right] \, dS = \int_V (-b_i) \hat{u}_i \, dV + \int_{S_t} t_i^d \hat{u}_i \, dS$$

Dans les deux sections qui suivent, on va démontrer les théorèmes statiques et cinématiques de l'analyse limite : bornes inf et sup de la charge de ruine. Pour plus de simplicité, on suppose qu'il n'y a pas de surface

de glissement - mais le raisonnement est strictement le même avec (re-faites les dérivations pour vous en convaincre).

Paramétrons le chargement de tel sorte que $t_i = \alpha t_i^c$ où t_i^c correspond à la charge maximale de rupture de la structure (à la rupture $\alpha = 1$).

3.1 Borne inférieure statique

Soit un champ statiquement admissible σ_{ij}^a correspondant à un paramètre de chargement α^a vérifiant le critère de rupture (à savoir $f(\sigma_{ij}^a) \leq 0$) en tout point, le PPV s'écrit pour ce champ de contraintes statiquement admissible en prenant pour champ de vitesse le champ solution \dot{u}_i

$$\int_V \sigma_{ij}^a \dot{\epsilon}_{ij} dV = \alpha^a \int_{S_t} t_i^c \dot{u}_i dS + \int_V (-b_i) \dot{u}_i dV$$

où \dot{u}_i est le champ de vitesse solution (et $\dot{\epsilon}_{ij}$ le champ de taux de déformation associé). Pour le champ de contraintes exactes σ_{ij} à la rupture correspondant à la valeur $\alpha = 1$ du paramètre de chargement, on a:

$$\int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV = 1 \int_{S_t} t_i^c \dot{u}_i dS + \int_V (-b_i) \dot{u}_i dV$$

En prenant la soustraction des deux expressions précédentes, on obtient

$$(1 - \alpha^a) \int_{S_t} t_i^c \dot{u}_i dS = \int_V (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^a) \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} dV > 0$$

soit

$$\alpha^a < 1$$

car la puissance des efforts extérieurs est positive $t_i^c \dot{u}_i > 0$ (et peut être d'ailleurs utilisé comme un facteur de scaling)). La valeur α^a est donc une borne inférieure du paramètre de chargement à la rupture car

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^a) \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} > 0$$

du fait de la convexité de la surface de rupture (et de "l'associativité" de la déformation plastique - c.f subsection 2.1.3 de ces notes).

3.2 Borne supérieure cinématique

Prenons un champ de déplacement cinématiquement admissible \dot{u}_i^a . Pour un tel champ de déplacement, correspond un champ de contraintes σ_{ij}^b vérifiant le critère de rupture (mais pas forcément l'équation d'équilibre) de telle sorte que $\dot{\epsilon}_{ij}^a = \lambda^b \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}^b}$ où λ^b est le multiplicateur plastique correspondant. On peut définir le facteur de chargement

$$\alpha_{ab} \int_{S_t} t_i^c \dot{u}_i^a dS = \int_V (\sigma_{ij}^b) \lambda^b \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}^b} dV - \int_V (-b_i) \dot{u}_i^a dV$$

Pour le champ de contraintes solution σ_{ij} (à la rupture) - correspondant au paramètre de chargement solution $\alpha = 1$, le PPV pour le champ test \dot{u}_i^a s'écrit:

$$\int_{S_t} t_i^c \dot{u}_i^a dS = \int_V \sigma_{ij} \lambda^b \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}^b} dV - \int_V (-b_i) \dot{u}_i^a dV$$

d'où

$$(\alpha_{ab} - 1) \int_{S_t} t_i^c \dot{u}_i^a dS = \int_V \lambda^b (\sigma_{ij}^b - \sigma_{ij}) \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}^b} dV > 0$$

soit

$$\alpha_{ab} > 1$$

encore une fois à cause de la convexité de la surface de rupture (et de "l'associativité" de la déformation plastique - c.f subsection 2.1.3 de ces notes).

Le champ de déplacement \dot{u}_i^a correspondant au paramètre de chargement α_{ab} fournit donc une borne supérieure $\alpha_{ab} t_i^c$ de la charge de rupture exacte t_i^c .

4 Démarche pour l'obtention des bornes de la charge ultime

La démarche du calcul à la rupture (afin de déterminer la charge ultime d'une structure géotechnique) sera donc la suivante:

1. Paramétrisation du chargement (e.g. descente de charges, forces d'ancrages)
2. Choix du critère de comportement selon que l'on fasse un calcul à court terme (Tresca - contraintes totales) ou long terme (Mohr-Coulomb - contraintes effectives)
3. Approche statique ("par l'intérieur") afin de déterminer une borne inférieure à la vrai charge ultime.
 - (a) Choix d'un champ de contraintes statiquement admissible (donc paramétré par le chargement)
 - (b) Maximisation du paramètre de chargement pour lequel le champ de contraintes vérifie le critère de rupture: obtention d'une borne inférieure de la charge ultime
4. Approche cinématique
 - (a) Choix d'un champ de déplacement cinématiquement admissible - éventuellement avec des lignes de glissement représentant le mécanisme de rupture (souvent paramétrisé)
 - (b) Calculs de la puissance intérieure (en supposant que le matériau vérifie le critère de plasticité dans les zones de déplacement plastiques)
 - (c) Utilisation du principe des puissances virtuelles afin d'obtenir la charge ultime par minimization: obtention d'une borne supérieure du chargement ultime