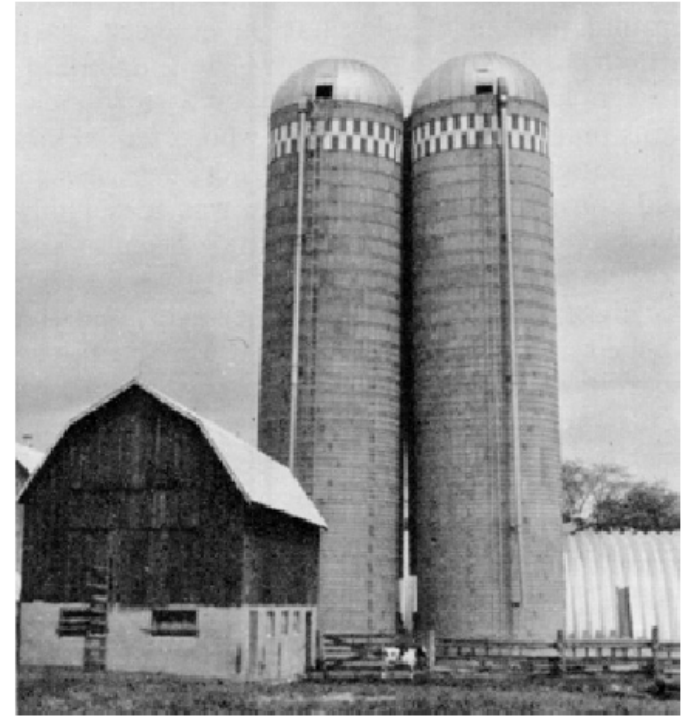


# Tassement fondations superficielles

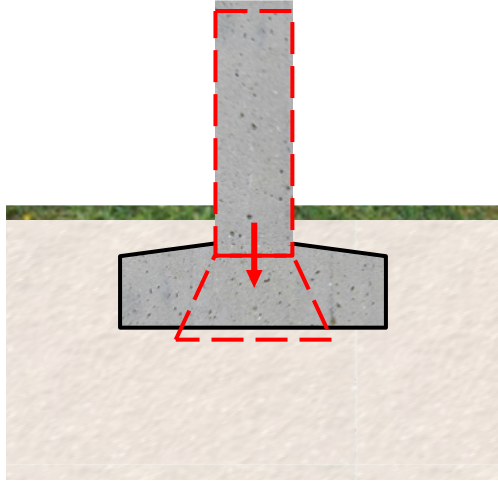
Brice Lecampion

**EPFL**



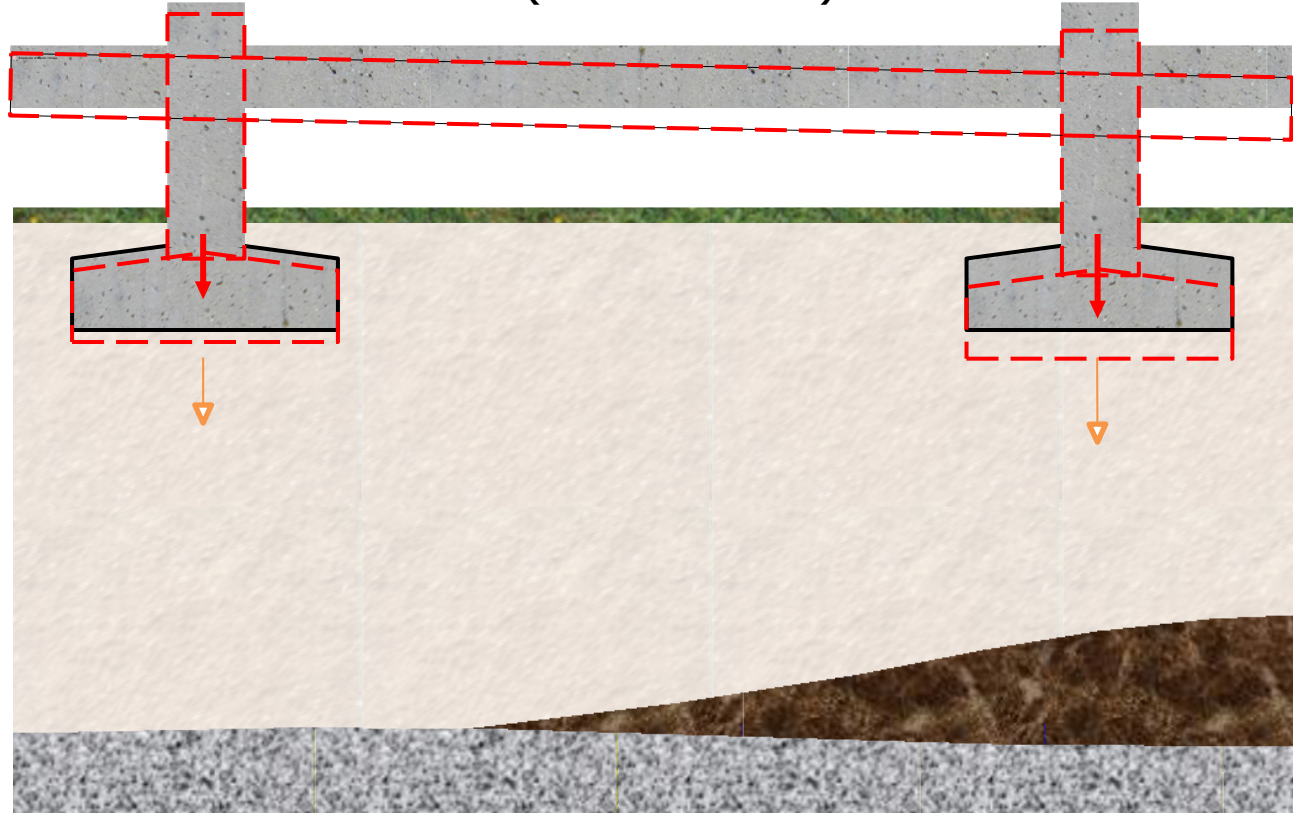
# Etats limites pour les fondations superficielles

Etat limite ultime de  
résistance du matériau  
de la fondation  
(sécurité interne)



+ Etat limite de service du  
matériau de la fondation  
(durabilité)

Etat limite de service lié au sol  
(tassements)



# Definitions & ordre de grandeurs

Déviaton / verticale  $> 1/250$  visible

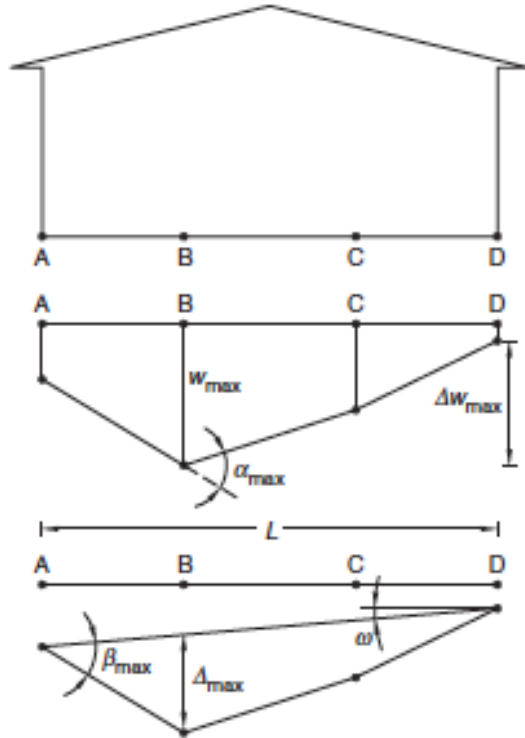
$\beta_{\max} < 1/500$  (fissures)

$< 1/150$  (dommages structures)

Mur porteurs

$\Delta/L < 2 \cdot 10^{-4}$  ( $L/H \sim 1$ )

$\Delta/L < 4 \cdot 10^{-4}$  ( $L/H = 5$ )



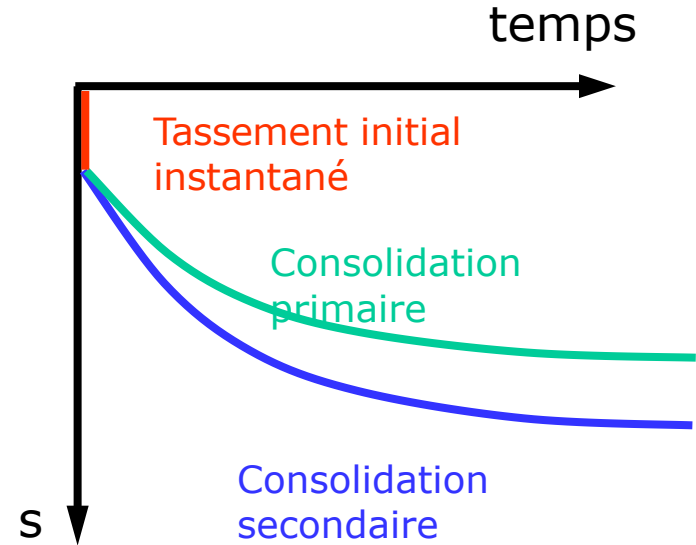
$w$  = Settlement  
 $\omega$  = Tilt  
 $\Delta w$  = Relative settlement  
 $\beta$  = Relative rotation  
 $\alpha$  = Angular strain  
 $\Delta$  = Relative deflection  
 $\frac{\Delta}{L}$  = Deflection ratio

<u>Tassements totaux</u>	
Dispositif de drainage	15 à 30 cm
Problèmes d'accès	30 à 60 cm
Constructions en maçonnerie	3 à 5 cm
Structures en cadre	5 à 10 cm
Silos, radiers, cheminées	10 à 30 cm
<u>Tassements différentiels</u>	
Murs en briques hauts et continus	1 mm/m
Structures en béton armé	3 mm/m
Structures métalliques simples	5 mm/m
<u>Inclinaison</u>	
Tour ou cheminée	4 mm/m
Stockage de denrées	10 mm/m
Grue sur voie de roulement	3 mm/m

# Tassement des fondations superficielles

Le tassement résulte de trois types de déformations

- la déformation instantanée = déformation élastique du sol de fondation
- la déformation lente par consolidation primaire, provoquée par l'expulsion d'une partie de l'eau et de l'air contenus dans les pores du sol
- la déformation lente par consolidation secondaire, qui correspond à une déformation viscoplastique par réajustement des particules de sol



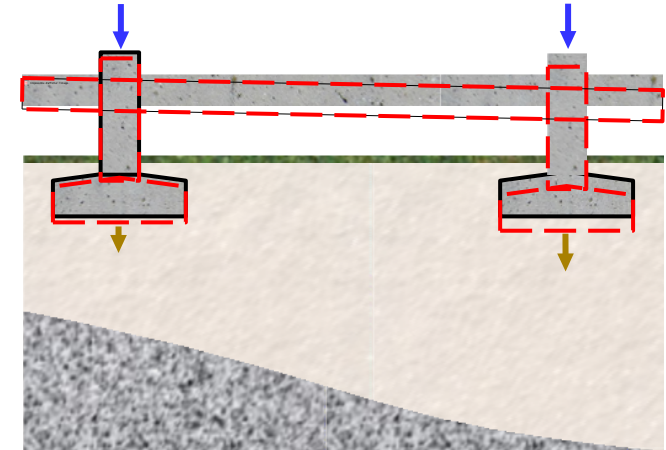
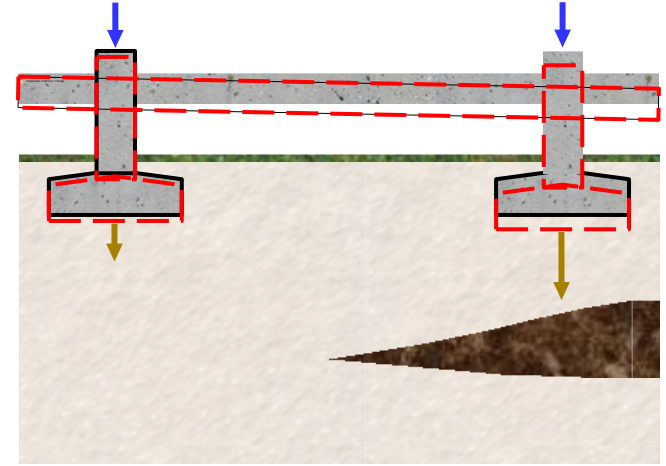
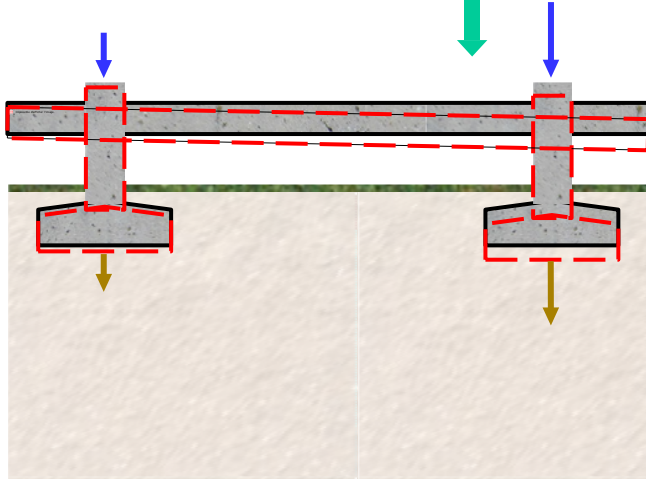
	Déformation instantanée	Consolidation primaire	Consolidation secondaire
Sables et graviers	prépondérante	négligeable	négligeable
Argiles	10÷30 % de la déformation totale	prépondérante	10÷25 % de la déformation totale
Sols organiques	négligeable	~ 50 %	~ 50 %



# Sources de tassements différentiels entre les fondations superficielles d'un même ouvrage

→ 2 causes principales:

- Hétérogénéité du massif de fondation  
(variation d'épaisseur, variation de  $E$ )
- Charges différentes  
(*variation de  $\Delta\sigma'$* )



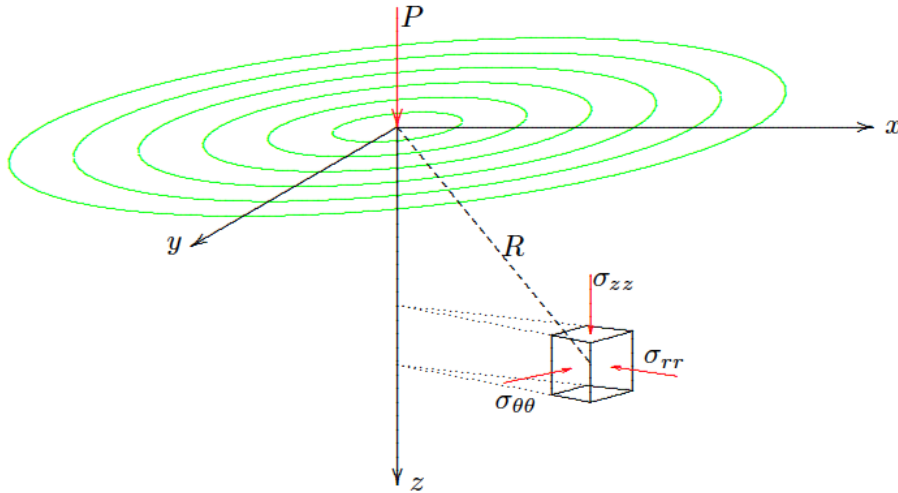
# Plan

---

1. Estimation des contraintes induites dans le massif de sol par des charges en surface (Théorie de l'élasticité)
2. Fondation souple vs rigide
3. 1D versus 3D
4. Phénomènes
  1. Consolidation primaire
  2. Non-linearité
  3. Compression secondaire
5. Approche pour le cas multi-couches
6. Etude de cas

# Boussinesq – contraintes dans le massif

Point force sur un demi-espace élastique



$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\sigma_{zz} = \frac{3P}{2\pi} \frac{z^3}{R^5},$$

$$\sigma_{rr} = \frac{P}{2\pi} \left[ \frac{3r^2 z}{R^5} - (1 - 2\nu) \frac{1}{R(R+z)} \right],$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{P}{2\pi} \frac{1 - 2\nu}{R^2} \left( \frac{R}{R+z} - \frac{z}{R} \right),$$

$$\sigma_{rz} = \frac{3P}{2\pi} \frac{r z^2}{R^5}.$$



M. BOUSSINESQ.

# On peut intégrer... (superposition)

---

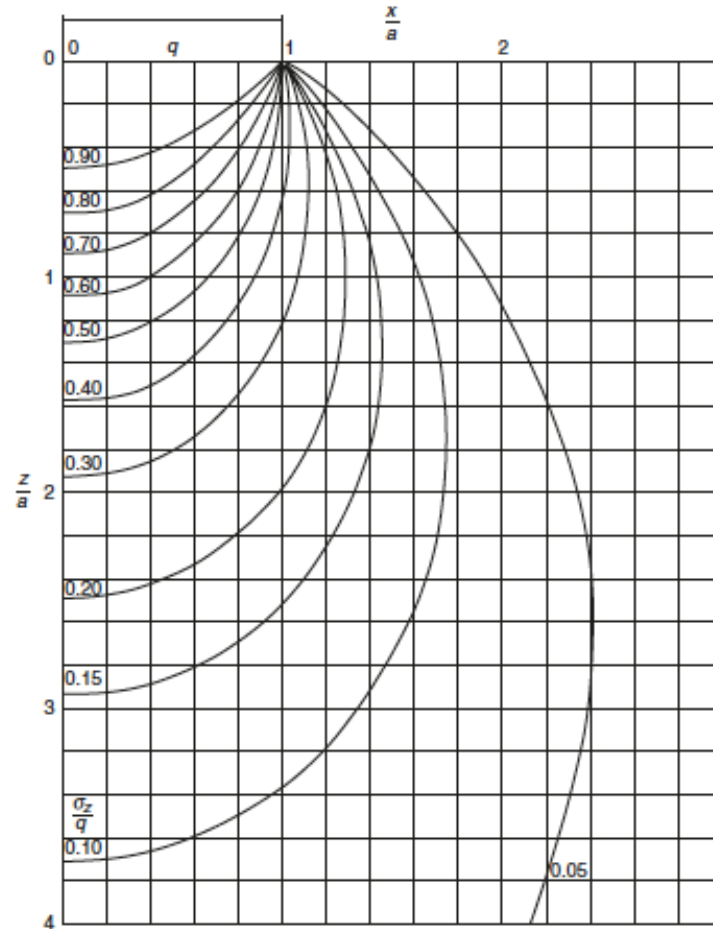
- Charge  $q$  sur un disque de rayon  $b$ 
  - Sous l'aplomb de la fondation (**en  $r=0$** )

$$\sigma_{zz} = q \left( 1 - \frac{z^3}{(b^2 + z^2)^{3/2}} \right)$$

Déplacement de la fondation (**en  $r=0$** )

$$u_z = 2(1 - \nu^2) \frac{qb}{E}$$

# Iso-contour des contraintes



# Fondation rectangulaire

---

Contrainte induite à une profondeur  $z$  à l'aplomb d'un des coin de la fondation rectangulaire

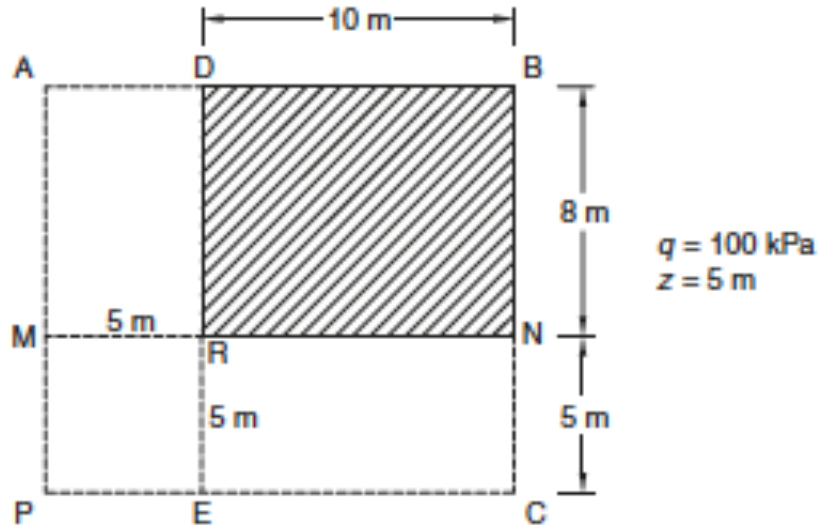
$$\sigma_{zz} = q \times J(b, L, z)$$

$$J(b, L, z) = \frac{1}{2\pi} \left( \arctan \left( \frac{bL}{Rz} \right) + \frac{bLz}{R} \left( \frac{1}{b^2 + z^2} + \frac{1}{L^2 + z^2} \right) \right)$$

$$R^2 = b^2 + L^2 + z^2$$

# Superposition - Example

---

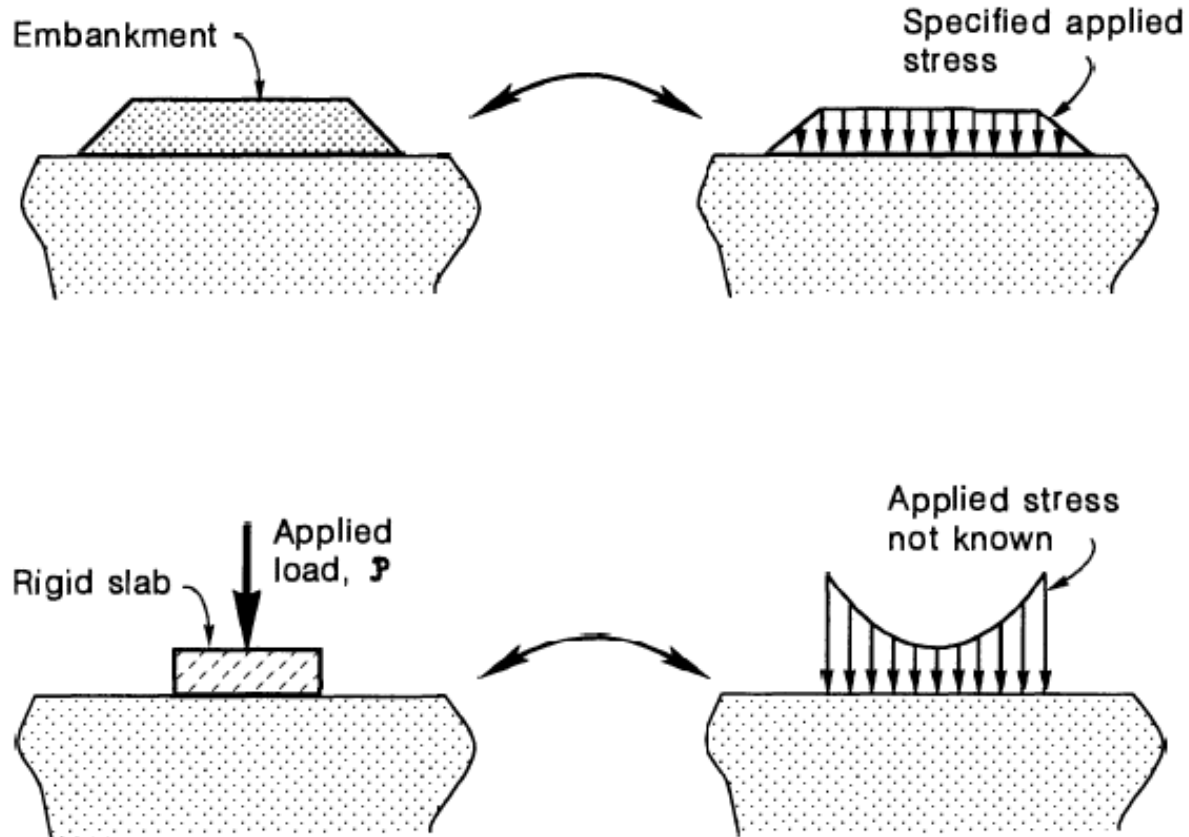


Calculer la contrainte vertical induite sous le point P  
à 5 mètres de profondeur



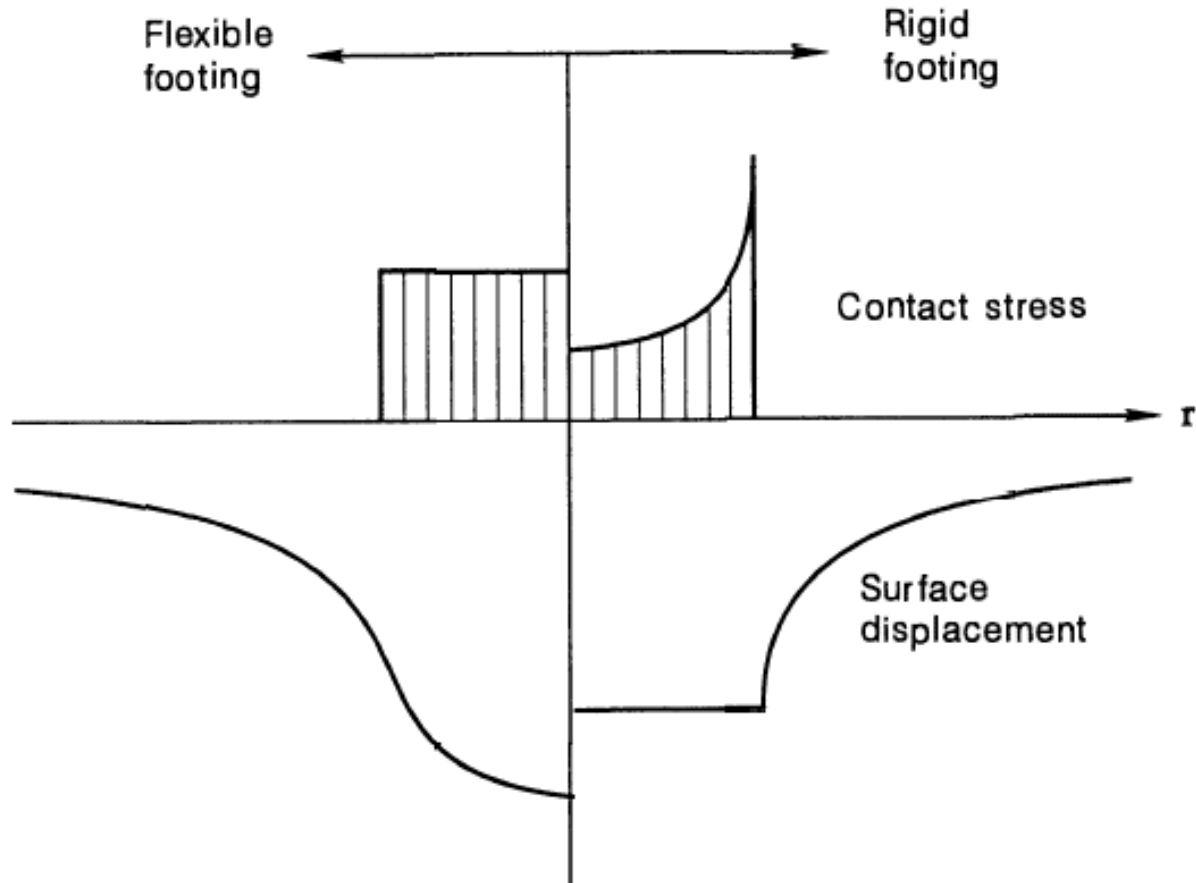
# Fondation souple / rigide

---



# Fondation souple / rigide

---



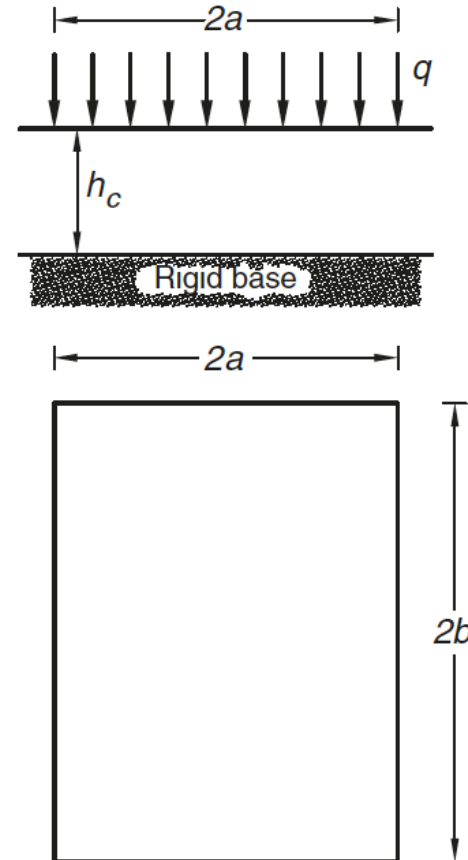
# Fondation souple – couche rigide en $z=h_c$

Formule d'un déplacement élastique

$$w = \frac{2aq}{E} (1 - \nu^2) I_F$$

D'après Lancellota

$\frac{h_c}{a}$	Coefficient of influence $I_F$				
	Circle	$b/a = 1$	2	5	10
0.20	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08
0.50	0.22	0.21	0.21	0.21	0.21
1.00	0.45	0.44	0.43	0.43	0.43
2.00	0.68	0.72	0.78	0.78	0.78
3.00	0.78	0.84	0.99	1.02	1.02
5.00	0.87	0.95	0.19	1.34	1.34
10.00	0.93	1.04	1.36	1.69	1.77
$\infty$	1.00	1.12	1.52	2.10	2.53



# Fondation rigide – couche rigide en $z=h_c$

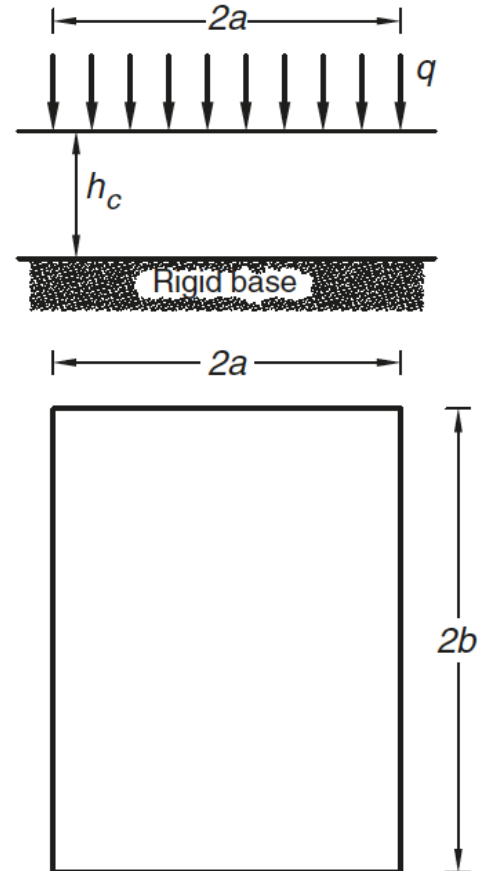
Formule d'un déplacement élastique

$$w = \frac{2aq}{E} (1 - \nu^2) I_R$$

?

D'après Lancellota

$\frac{h_c}{a}$	Coefficient of influence $I_R$				
	Circle	$b/a = 1$	2	5	10
0.20	0.096	0.096	0.098	0.099	0.099
0.50	0.225	0.226	0.231	0.236	0.238
1.00	0.396	0.403	0.427	0.441	0.446
2.00	0.578	0.609	0.698	0.748	0.764
3.00	0.661	0.711	0.856	0.952	0.982
5.00	0.740	0.800	1.010	1.201	1.256
10.00	0.818	0.873	1.155	1.475	1.619
$\infty$	0.849	0.946	1.300	1.826	2.246



# 1D (oedométrique) vs 3D

---

# Tassement – Phénomènes

---

1. **Consolidation primaire (i.e. drainage)**
  - dissipation des surpressions
2. **Non-linéarité de la réponse drainée**
  - Importance de la contrainte de préconsolidation / histoire du chargement
  - Estimation du déplacement final (en fin de consolidation primaire)
3. **Compression secondaire (fluage)**

# Un sol.... un milieu poreux

---

- Porosité :

$$n = V_v / V$$

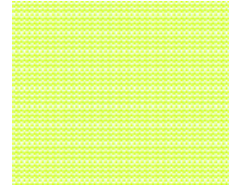
- Indice des vides:

$$e = V_v / V_s = n / (1 - n)$$

- Saturé en eau, perméabilité  $k$
- Pour les sols, les grains sont “incompressibles” comparés à leur arrangement
  - Déformation volumique = - Variation de porosité

$$\epsilon^v = -\Delta n$$

- Contraintes  $> 0$  en compression
- Déformation  $> 0$  en contraction
- Tassement  $> 0$





# Hypothèse d'élasticité

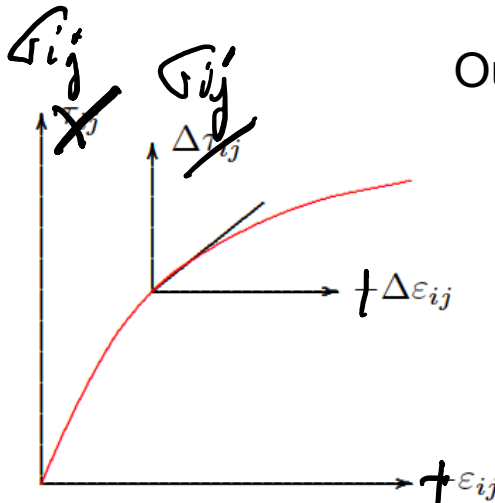
---

- La déformation du sol est fonction des contraintes effectives
- Elasticité linéaire

$$\sigma'_{ij} = 2G\epsilon_{ij} + (K - 2/3G)\epsilon^v\delta_{ij}$$

Ou

$$\epsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E}\sigma'_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma'_{kk}\delta_{ij}$$



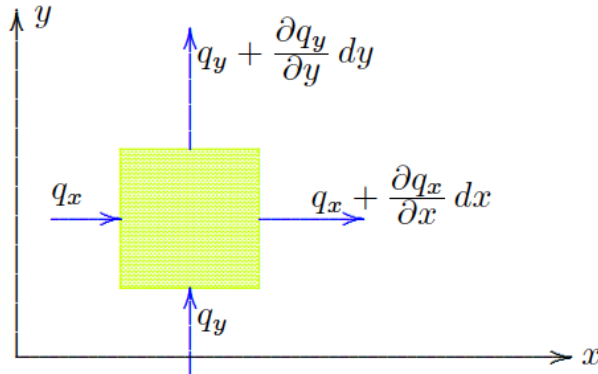
Les sols sont non-linéaire...  
mais on peut tjrs utilisé un module tangent  
(autour des contraintes in-situ)

# Conservation de la masse d'eau

- Durant un incrément de temps, la variation de masse d'eau dans un volume élémentaire est compensée par ce qui y rentre **moins** ce qui y sort.

$$V \Delta m_f / \rho_f = - \left( \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) V \Delta t$$

- La variation de la masse d'eau peut provenir:
  - Variation de porosité:  $\Delta n$
  - Variation du à la compressibilité du fluide contenu dans l'espace poral:  $n\beta_w \Delta u$



Prenant la limite  $\Delta t \rightarrow 0$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + n\beta_w \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} = 0$$

# Loi de Darcy

- Relation lineaire entre la vitesse de filtration  $q_i = nv_i$  (par rapport au solide) et le gradient de la charge hydraulique  $h$

$$q_x = -\frac{\kappa}{\mu_w} \frac{\partial}{\partial x} (u + \gamma_w z) = -k \frac{\partial}{\partial x} h$$

$$q_y = -\frac{\kappa}{\mu_w} \frac{\partial}{\partial y} (u + \gamma_w z) = -k \frac{\partial}{\partial y} h$$

$$q_z = -\frac{\kappa}{\mu_w} \frac{\partial}{\partial z} (u + \gamma_w z) = -k \frac{\partial}{\partial z} h$$

Intrinsic perm. [m<sup>2</sup>]
Coefficient de 'permeabilité' in [m/s]

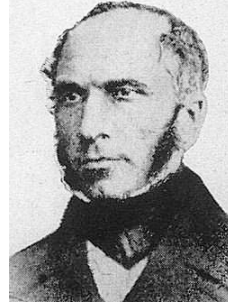
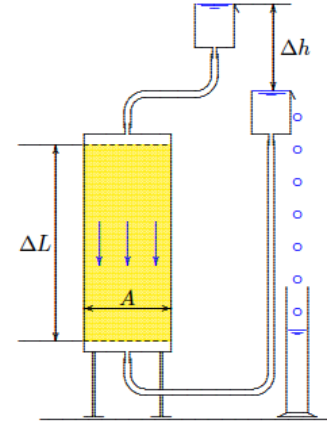
Fluid visc. [Pa.s]

Coefficient de 'permeabilité' in [m/s]

$$k = \kappa \gamma_w / \mu_w$$

Charge hydraulique [m]

$$h = u / \gamma_w + z$$




# Cas unidimensionnel - oedometrique

---

- Pas de déformation latérale ! Problème 1D

$$\epsilon_{zz} = \epsilon^v = \frac{\sigma_{zz} - u}{K + 4/3G} = m_v(\sigma_{zz} - u)$$

- La conservation de la masse fluide se réduit donc à:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{m_v}{m_v + n\beta} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} + \underbrace{\frac{k}{\gamma_w(m_v + n\beta)}}_{c_v} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$


Zero si la charge est cte

- Problème pratique: charge instantannée en  $z=0$   
Drainage en  $z=0$  &  $z=2L$  (symétrie en  $z=L$  / imperméable)

# Surpression - réponse non-drainée

---

- Charge instantanée  $q$  sur la surface.

$$\epsilon^v = m_v(q - u)$$

- Quelle est la sur-pression à l'instant initial?

– On intègre de  $t=0$  à  $t=t_\epsilon$  la conservation de la masse:

$$\Delta n = -n\beta_w u + \underbrace{\int_0^{t_\epsilon} \frac{k}{\gamma_w} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz}_{0 \text{ as } t_\epsilon \rightarrow 0}$$

– Comme

$$\Delta n = -\epsilon^v$$

$$u = \frac{q}{1 + n\beta_w/m_v} (\approx q)$$

“Skempton” oedométrique

# Dissipation de la sur-pression de pore

---

- La charge reste constante, l'équation de diffusion se réduit à

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$u(z = 0, t) = 0$$

Drainage en surface / toit de la couche

$$\frac{\partial u}{\partial z}(z = L, t) = 0$$

Impermeable en  $z=L$  (/ symmetrie pour une couche  $2L$ )

$$u(z, t = 0^+) = \frac{q}{1 + n\beta_w/m_v} = u_u \quad \text{Sur-pression initiale (non-drainée)}$$

- Equation de diffusion (type chaleur)

- Temps caractéristique de diffusion

$$H^2 / (4c_v)$$

- On a-dimensionalise

$$\xi = z/L \quad \tau = c_v t / L^2 = 4c_v t / H^2$$

# Solution

---

- Méthode des séparations de variables, séries de Fourier pour la variation spatiale, exponentielle décroissante pour la variation temporelle

$$\frac{u(\xi, \tau)}{u_u} = \sum_{k=1, \dots, \infty} a_k \sin\left(\frac{k\pi}{2}\xi\right) \exp\left(-\frac{\pi^2 k^2}{4}\tau\right)$$

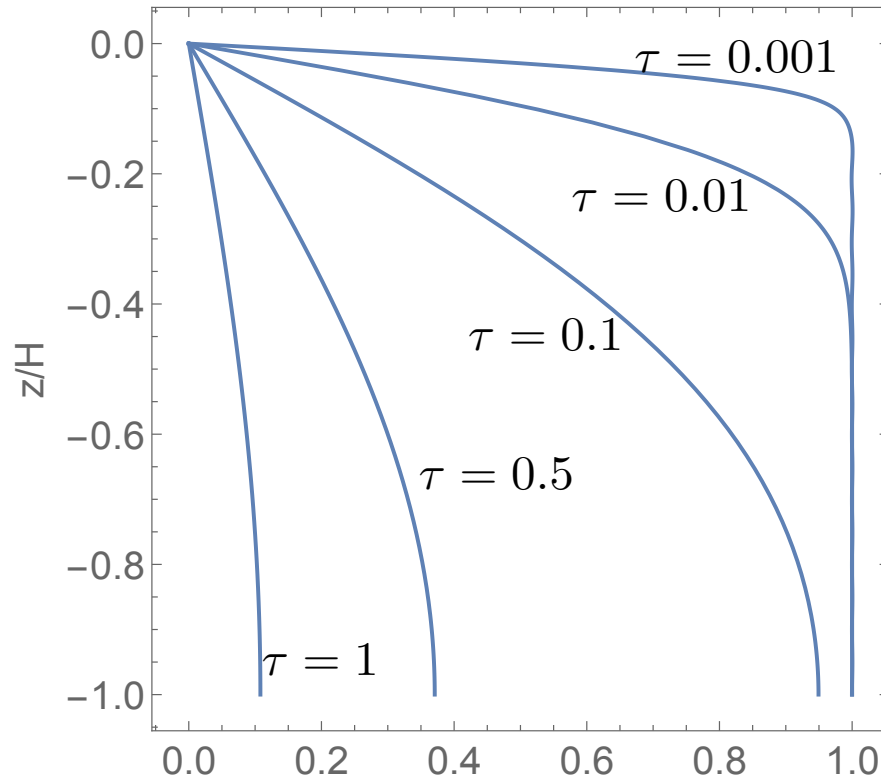
- Conditions initiales et aux limites permettent de déterminer les  $a_k$

$$\frac{u(\xi, \tau)}{u_u} = \sum_{k=1, 3, 5, \dots, \infty} \frac{4}{\pi k} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\xi\right) \exp\left(-\frac{\pi^2 k^2}{4}\tau\right)$$



# Dissipation de la pression de pore

---

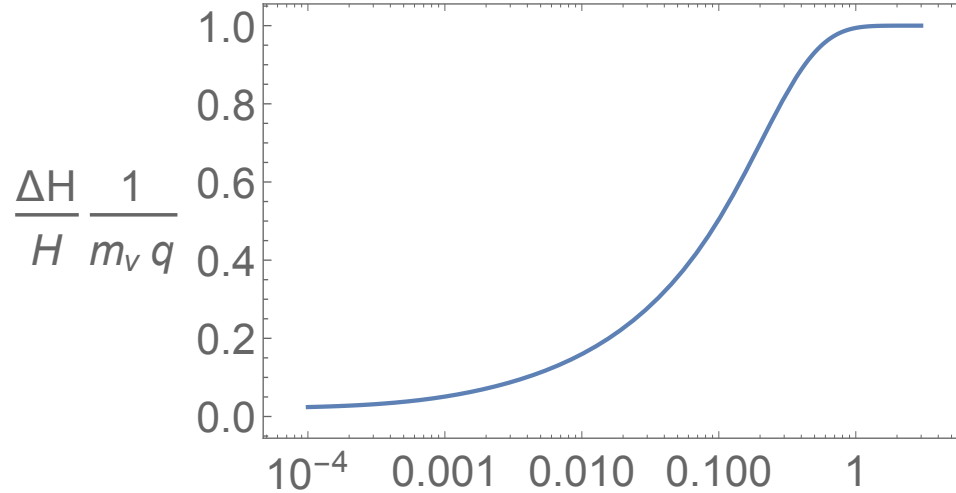


$$\xi = z/L \quad \tau = \frac{u/u_u}{c_v t / L^2} = 4c_v t / H^2$$

# Tassement associé

- On intègre la déformation sur la couche:

$$\frac{\Delta H}{H} = m_v q \left( 1 - \frac{1}{1 + n\beta_w/m_v} \sum_{k=1,3,5,\dots\infty} \frac{16}{\pi^2 k^2} \sin\left(\frac{k\pi}{4}\right)^2 \exp\left(-\frac{\pi^2 k^2}{4} \tau\right) \right)$$



99% du tassement  
en  $\tau = 0.5$



- Réponse drainée ( long-terme):  $\frac{\Delta H}{H} = m_v q$

Terzaghi a regardé  
ce problème:  
Terzaghi consolidation

# Example

---

- 20 m d'argiles entre 2 couches de sables
  - Porosité 10%
  - Perméabilité  $10^{-10}$  m/s
  - $m_v \sim 1 \cdot 10^{-9} \text{ Pa}^{-1}$
  - $L=10\text{m}$  (attention  $L$  est la longueur du chemin de drainage)
- Temps de dissipation de la sur-pression due à la charge?

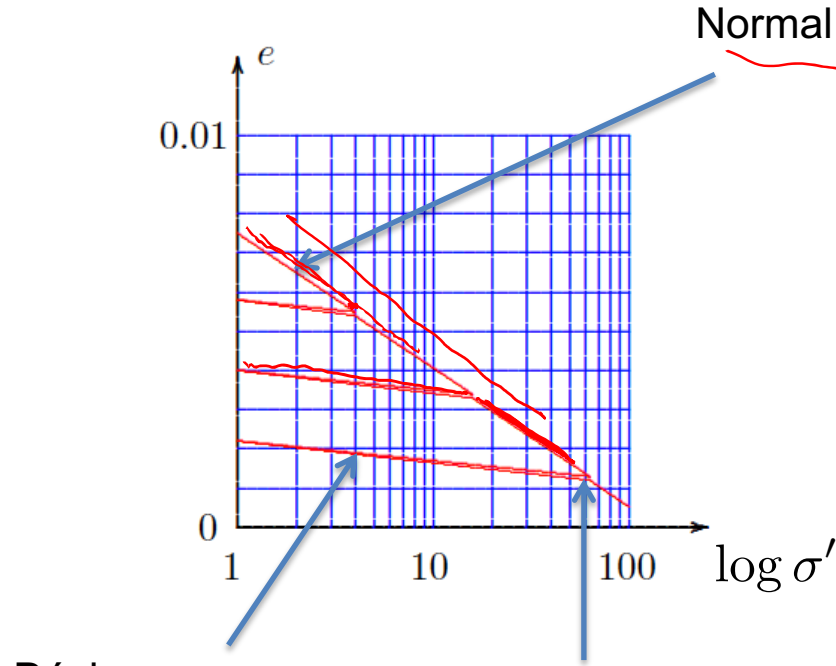
# Tassement – Phénomènes

---

1. Consolidation primaire (i.e. drainage)
  - dissipation des surpressions
2. **Non-linéarité de la réponse du sol**
  - Importance de la contrainte de préconsolidation / histoire du chargement
3. Consolidation secondaire (fluage)

# Comportement non-linéaire

- Essai oedométrique drainé



Normal consolidation line

Pour un sol normalement consolidé

$$\epsilon = -\frac{\Delta e}{1+e} = \frac{C_c}{1+e} \text{Log} \frac{\sigma'}{\sigma'_o}$$

⑤

En phase de drainage,  
la dissipation de pression est non-linéaire ;(  
On utilisera l'expression précédente  
pour estimer la réponse drainée (long-terme)!

Décharge -  
recharge

Pression de consolidation = Max contraintes  
effective "connue" du sol

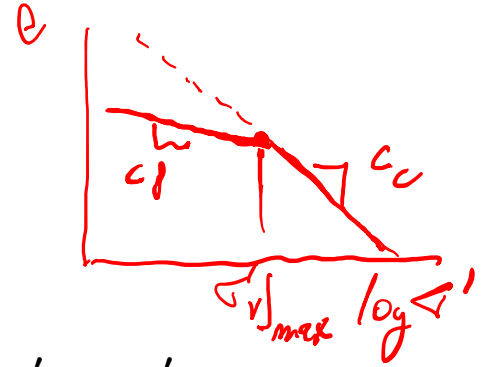
Terzaghi a regardé  
ce problème  
"Terzaghi consolidation";)

# Comportement non-linéaire

- Cas d'un sol pré-consolidé:

$$\epsilon = -\frac{\Delta e}{1+e} = \frac{C_p}{1+e} \text{Log} \frac{\sigma'}{\sigma'_o} \quad \sigma' < \sigma'_{vmax}$$

$$\epsilon = \frac{C_p}{1+e} \text{Log} \frac{\sigma'_{vmax}}{\sigma'_o} + \frac{C_c}{1+e} \text{Log} \frac{\sigma'}{\sigma'_{vmax}} \quad \sigma' > \sigma'_{vmax}$$



- OCR = Over-consolidation ratio

$$OCR = \frac{\sigma'_{vmax}}{\sigma'_o}$$

contrainte effective max  
que le sol a rencontré

contrainte IN-SITU actuelle

# Valeur "typiques"

---

- Sables

$$C_c/(1 + e_o) = 0.05 - 0.005$$

⚠ à prendre avec  
précaution.

- Silt

$$C_c/(1 + e_o) = 0.1 - 0.02$$

$$\varepsilon = \frac{C_c}{1+e} \log \frac{\sigma'}{\sigma'_0}$$

- Clay

$$C_c/(1 + e_o) = \underline{0.25 - 0.025}$$

$$\frac{d\varepsilon}{d\sigma'} \sim \frac{1}{\sigma'}$$

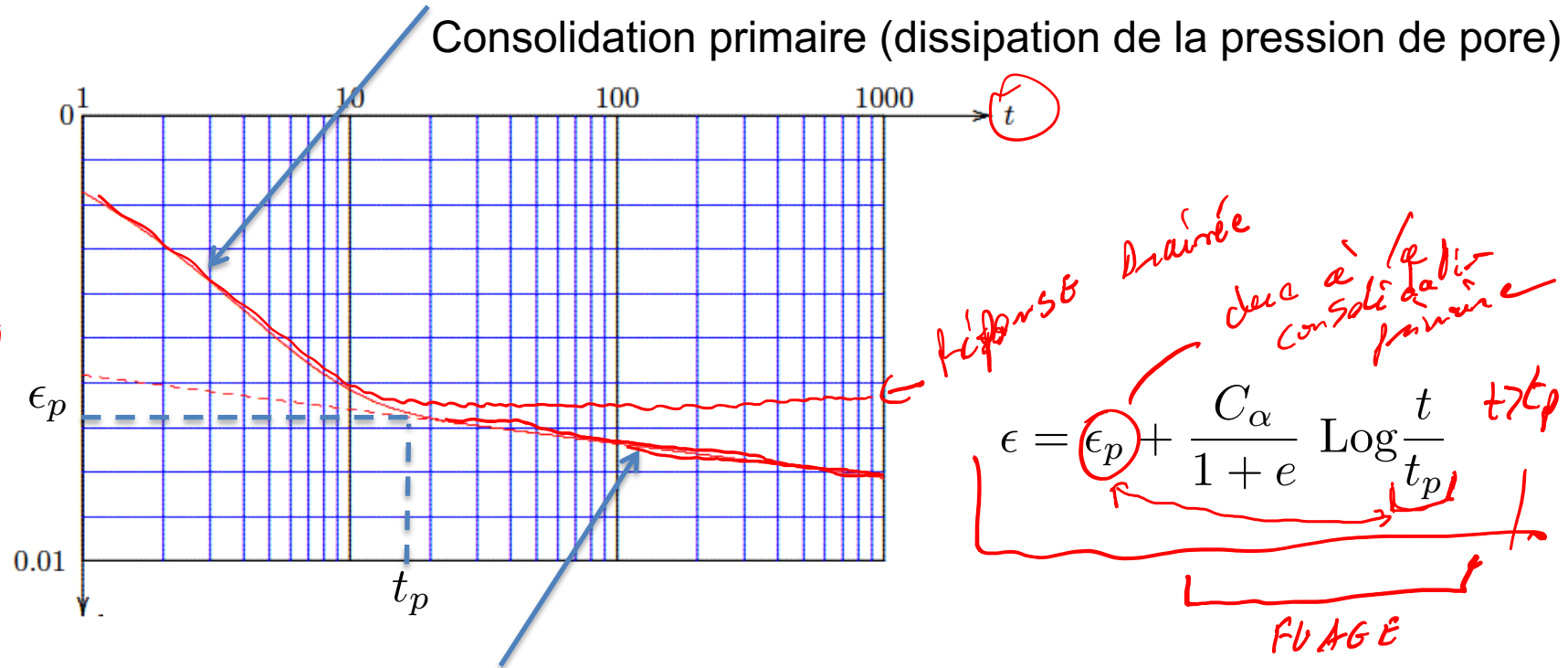


# Tassement – Phénomènes

---

1. Consolidation primaire (i.e. drainage)
    - dissipation des surpressions
  2. Non-linéarité de la réponse drainée
    - Importance de la contrainte de préconsolidation / histoire du chargement
  3. **Consolidation secondaire (fluage)**
- Handwritten notes in red:*  
} → Temps de DRAINAGE  
} → Tassement "FINAL" drainé

# Compression secondaire - fluage



Compression secondaire (fluage):  
la sur-pression est dissipée mais le tassement continue "logarithmiquement"

$$C_\alpha \approx 2 - 3 \cdot 10^{-2} C_c$$

# Tassement total

---

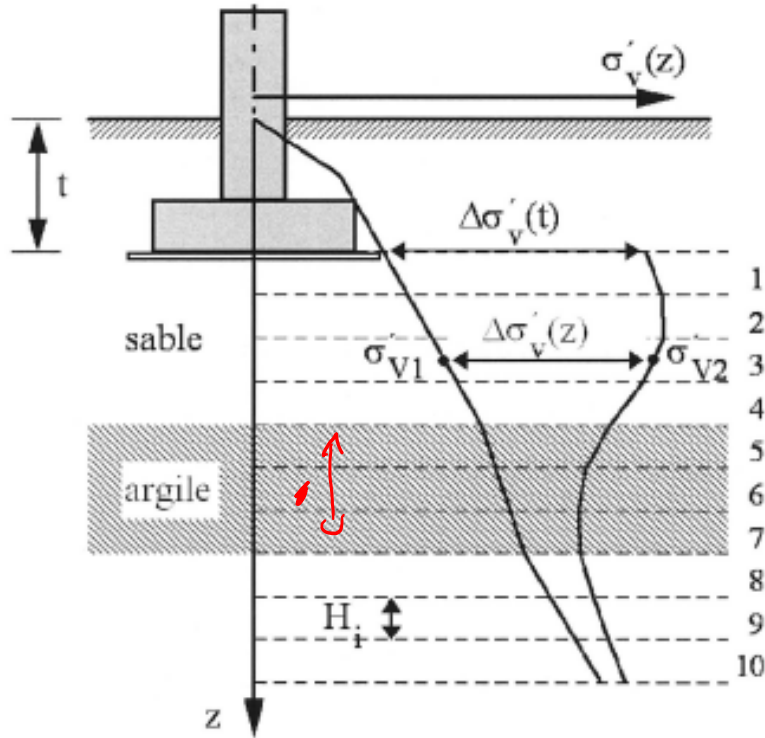
- Somme des tassements instantanés + Consolidation primaire + compression secondaire

$$w_{tot} = w_I + w_C + w_S$$

Handwritten annotations:

- CONSOLIDATION PRIMAIRE* (above  $w_C$ )
- Tassements instantanés* (below  $w_I$ )
- FLUAGE* (next to  $w_S$ )

# Tassement – multi-couches



$$w_{tot} = \sum_i \Delta H_i \approx \sum_i \epsilon_{zz}(z_i) H_i$$

$z_i$  : milieu de la couche  $i$

# Estimation du tassement final

---

- Calcul drainé / long-terme (cas sans fluage)
- Le sol est multi-couches !
- Approximation classique:
  1. On calcule les contraintes induites en utilisant les solutions élastiques
  2. A l'aplomb de la fondation, on prend la moyenne de la contrainte verticale calculée et on utilise l'équation de compression logarithmique (Terzaghi ;))  
(ou un module élastique tangent) pour estimer le tassement de la couche correspondante
  3. On somme le tassement de chaque couches pour estimer le tassement final (drainée) total
- Si besoin, on raffine:
  - Calculs vraiment multi-couches:
    - via FEM, solution semi-analytique (FFT) etc.
- ATTENTION:
  - Faux si il y a de très **fort** contrastes de modules (stiff / soft / stiff)
  - Faux (mais pas trop) car sous la fondation en profondeur les déformations ne sont pas nulles (-> 3D FEM)
    - Pas trop faux si la fondation est “large”

## Example - cf exercise 6

---