

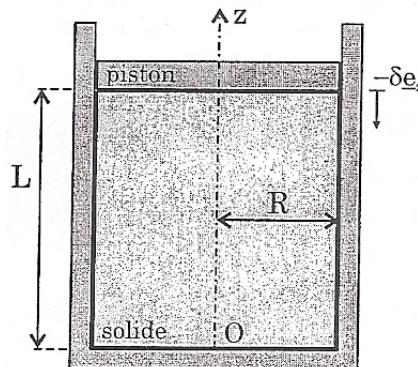
Correction

Exercice 1 : Essai oedométrique

On considère un bloc parallélépipédique d'axe Oz de section carrée, de côté $2R$ sur la surface $x - y$ et de hauteur L dans la direction z (voir figure 1). Il est placé dans un conteneur indéformable de même géométrie. Le contact entre le conteneur et le bloc est sans frottement.

Un piston indéformable, astreint à coulisser dans le conteneur, est en contact sans frottement avec la partie supérieure du bloc.

Le bloc est constitué d'un matériau thermoélastique linéaire isotrope homogène, de caractéristiques λ , μ et α . Le piston est soumis à un déplacement vertical ($-\delta e_z$). Les forces de masse sont négligées.



Essai oedométrique.

FIGURE 1 –

1. Traduire les conditions aux limites en termes de données.
2. Le but de cette question est de calculer un champ de déplacement, qui est éventuellement solution du problème. On cherche un déplacement de la forme :

$$\underline{u}(x, y, z) = f(z) \underline{e}_z \quad (1)$$

- (a) Ecrire deux conditions sur f .
 - (b) Expliciter le tenseur des petites déformations en fonction de f .
 - (c) Calculer le tenseur des contraintes. Déterminer la forme de f à partir de l'équation d'équilibre.
 - (d) Donner l'expression du déplacement en fonction de δ .
 - (e) Vérifier que le tenseur des contraintes est admissible (i.e. qu'il satisfait les conditions aux limites).
3. La solution trouvée est-elle exacte ?
 4. On donne l'expression de la force extérieure $\underline{f}_{\text{ext}}$ et du moment extérieur $\underline{m}_{\text{ext}}$ qui s'appliquent sur la face supérieure du bloc S :

$$\underline{f}_{\text{ext}} = \int_S \underline{\sigma} \underline{e}_z dS \quad (2)$$

$$\underline{m}_{\text{ext}} = \int_S \underline{OM} \wedge (\underline{\sigma} \underline{e}_z) dS \quad (3)$$

où M est un point de S . Calculer $\underline{f}_{\text{ext}}$ et $\underline{m}_{\text{ext}}$.

5. Le piston est maintenant astreint à rester fixe à la côte $z = L$. On fait subir un échauffement uniforme ΔT . Déterminer le champ de contrainte dans le bloc.

Correction

1. Conditions aux limites

Les surfaces du problème sont :

- S_0 surface du bas en $z = 0$.
- S_L surface du haut en $z = L$.
- S_{lat_x} surfaces latérales définies par $x = \pm R$.
- S_{lat_y} surfaces latérales définies par $y = \pm R$.

Sur chacune de ces surfaces, il faut donner une condition en traction ou en déplacement dans chaque direction : e_x , e_y et e_z .

Limite	e_x	e_y	e_z
S_0	$t_x = 0$	$t_y = 0$	$u_z = 0$
S_L	$t_x = 0$	$t_y = 0$	$u_z = -\delta$
S_{lat_x}	$u_x = 0$	$t_y = 0$	$t_z = 0$
S_{lat_y}	$t_x = 0$	$u_y = 0$	$t_z = 0$

\underline{u} = vecteur déplacement, $\underline{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \underline{n}$ vecteur des contraintes.

2. (a) On suppose que $\underline{u}(x, y, z) = f(z)\underline{e}_z$.

Vérifions que ce \underline{u} satisfait les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} u_z(z=0) &= 0 \Leftrightarrow f(0) = 0 \\ u_z(z=L) &= -\delta \Leftrightarrow f(L) = -\delta \\ u_x(x=\pm R) &= 0 \text{ car } u_x = 0 \\ u_y(y=\pm R) &= 0 \text{ car } u_y = 0. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \frac{1}{2}(\nabla \underline{u} + \nabla \underline{u}^t) \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f'(z) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} + \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{1} \\ \boldsymbol{\sigma} &= \begin{bmatrix} \lambda f'(z) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda f'(z) & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda + 2\mu)f'(z) \end{bmatrix} \\ \text{div} \boldsymbol{\sigma} = 0 &\Leftrightarrow f''(z) = 0 \\ &\Leftrightarrow f(z) = a \cdot z + b \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} f(0) = 0 &\Rightarrow b = 0 \\ f(L) = -\delta &\Rightarrow a = \frac{-\delta}{L} \\ \underline{u} &= -\frac{\delta}{L}z \cdot \underline{e}_z \end{aligned}$$

(e)

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} -\frac{\lambda\delta}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\lambda\delta}{L} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{(\lambda+2\mu)\delta}{L} \end{bmatrix} \quad (4)$$

On vérifie que les conditions limites sont bien vérifiées. :

$$\begin{aligned}
 -S_0 : \underline{t} = \boldsymbol{\sigma}(-\underline{e}_z) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{(\lambda + 2\mu)\delta}{L} \end{bmatrix} \Leftrightarrow t_x = t_y = 0 \\
 -S_L : \underline{t} = \boldsymbol{\sigma}(\underline{e}_z) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{(\lambda + 2\mu)\delta}{L} \end{bmatrix} \Leftrightarrow t_x = t_y = 0 \\
 -S_{lat_x} : \underline{t} = \boldsymbol{\sigma}(\pm \underline{e}_x) &= \pm \begin{bmatrix} -\frac{\lambda\delta}{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow t_y = t_z = 0 \\
 -S_{lat_y} : \underline{t} = \boldsymbol{\sigma}(\pm \underline{e}_y) &= \pm \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\lambda\delta}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow t_x = t_z = 0
 \end{aligned}$$

3. La solution trouvée est exacte car :

- elle vérifie l'équation d'équilibre ;
- elle vérifie les conditions limites en contrainte et en déplacement sur chacune des faces ;
- elle est intégrable (et continue) dans tout le domaine.

4.

$$\begin{aligned}
 \underline{f}_{\text{ext}} &= \int_{S_L} \boldsymbol{\sigma} \cdot \underline{e}_z dS = \int_{S_L} -(\lambda + 2\mu) \frac{\delta}{L} \underline{e}_z dx dy \\
 &\Leftrightarrow \boxed{\underline{f}_{\text{ext}} = -(\lambda + 2\mu) \frac{\delta}{L} (2R)^2 \underline{e}_z} \\
 \underline{m}_{\text{ext}} &= \int_S \underline{OM} \wedge (\boldsymbol{\sigma} \cdot \underline{e}_z) dS = \int_S \begin{bmatrix} x \\ y \\ L \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{2\mu + \lambda}{L} \delta \end{bmatrix} dx dy \\
 \underline{m}_{\text{ext}} &= -\frac{2\mu + \lambda}{L} \delta \int_{x=-R}^R \int_{y=-R}^R \begin{bmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{bmatrix} dx dy \\
 \underline{m}_{\text{ext}} &= -\frac{2\mu + \lambda}{L} \delta \int_{x=-R}^R \begin{bmatrix} \frac{R^2}{2} - \frac{(-R)^2}{2} \\ -x(R - (-R)) \\ 0 \end{bmatrix} dx \\
 \underline{m}_{\text{ext}} &= -\frac{2\mu + \lambda}{L} \delta \begin{bmatrix} 0 \\ -2R \left(\frac{R^2}{2} - \frac{(-R)^2}{2} \right) \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &\Leftrightarrow \boxed{\underline{m}_{\text{ext}} = 0}
 \end{aligned}$$

5. $\delta = 0$ mais $\Delta T \neq 0$.

Tous les calculs précédents ne prenaient pas en compte les effets thermiques. Il faut les rajouter dans la relation de comportements.

$\delta = 0$ nous permet de supposer $\epsilon = 0$

En utilisant la loi de Hooke généralisée, on obtient $\boxed{\boldsymbol{\sigma} = -\alpha(2\mu + 3\lambda)\Delta T \mathbf{1} = -\alpha \frac{E}{1 - 2\nu} \Delta T \mathbf{1}}$ qui respecte bien les conditions aux limites de la question 1 avec $\delta = 0$, l'équilibre et la compatibilité.

Exercice 2 :

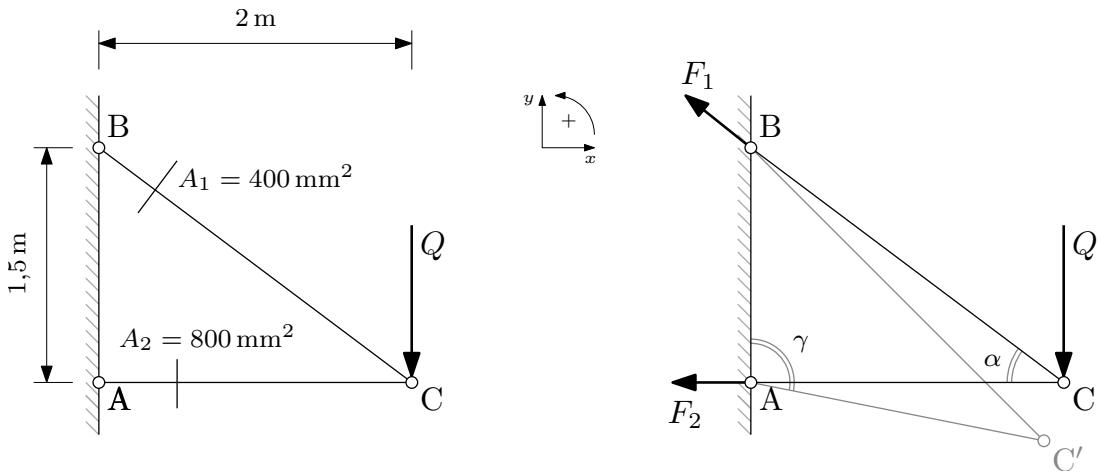


FIGURE 2 – Console triangulée.

Une console triangulée ABC (voir figure 2) est formée de deux barres en acier et est soumise à la seule charge concentrée verticale $Q = 60 \text{ kN}$ au nœud C (poids propre négligé). Déterminer pour de petits déplacements

1. la contrainte normale dans chaque barre ;
2. l'allongement ou le raccourcissement de chaque barre ;
3. les composantes horizontale et verticale du déplacement du nœud C. *Indication* : au nœud C, supprimer la liaison des barres, porter les variations de longueur calculées à la question 2 et construire la position C' du nœud en configuration déformée.

Note : il est possible d'utiliser le théorème de Pythagore généralisé à la question 3. Soient a , b et c les longueurs des côtés d'un triangle quelconque. Soit :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

où γ est l'angle entre a et b .

Correction Ces barres ne peuvent pas fléchir (grâce aux appuis rotules). On cherche à calculer la contrainte normale dans chaque barre. On exprime, comme sur le schéma joint les forces de réactions en A et B comme F_2 et F_1 respectivement. Calculons tout d'abord les réactions. Pour ce faire on exprime l'équilibre des moments au point B :

$$\sum M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad -Q \cdot 2 \text{ m} - F_2 \cdot 1.5 \text{ m} = 0 \quad (5)$$

$$\Rightarrow \quad F_2 = \frac{-Q \cdot 2 \text{ m}}{1.5 \text{ m}} = -80 \text{ kN} \quad (6)$$

On exprime aussi l'équilibre des forces s'appliquant à notre objet :

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad -F_2 - F_1 \cdot \cos \alpha = 0 \quad (7)$$

$$\Rightarrow \quad F_1 = -\frac{F_2}{\cos \alpha} = -\frac{-80 \text{ kN}}{\cos(\arctan(1.5/2))} = 100 \text{ kN} \quad (8)$$

On en déduit, les contraintes normales dans les barres :

$$\sigma_{BC} = \frac{F_1}{A_1} = 250 \text{ MPa} \quad (9)$$

$$\sigma_{AC} = \frac{F_2}{A_2} = -100 \text{ MPa} \quad (10)$$

Par la loi de Hooke on obtient simplement les déformations des barres :

$$\varepsilon_{BC} = \frac{\sigma_1}{E} = \frac{250 \text{ MPa}}{205 \text{ GPa}} \simeq 0,00122 \quad (11)$$

$$\varepsilon_{AC} = \frac{\sigma_2}{E} = \frac{-100 \text{ MPa}}{205 \text{ GPa}} \simeq -0,000488 \quad (12)$$

Et finalement l'élongation est :

$$\Delta_{BC} = \varepsilon_{BC} \cdot \|BC\| \simeq 0,00122 \cdot \sqrt{2000^2 + 1500^2} = 3.05 \text{ mm} \quad (13)$$

$$\Delta_{AC} = \varepsilon_{AC} \cdot \|AC\| \simeq -0,000488 \cdot 2000 = -0.976 \text{ mm} \quad (14)$$

Enfin, pour déterminer le déplacement du noeud C, le plus simple est de trouver la position du point C' via le théorème de Pythagore généralisé :

$$\begin{aligned} \gamma &= \arccos \left(\frac{\|AB\|^2 + \|AC'\|^2 - \|BC'\|^2}{2\|AB\| \cdot \|AC'\|} \right) = \arccos \left(\frac{1500^2 + 1999,024^2 - 2503,05^2}{2 \cdot 1500 \cdot 1999,024} \right) \\ &\simeq 90,18^\circ \end{aligned} \quad (15)$$

La position de C' est donc maintenant :

$$C'_x = 1999,024 \text{ mm} \cdot \cos(90^\circ - \gamma) \quad (16)$$

$$C'_y = 1999,024 \text{ mm} \cdot \sin(90^\circ - \gamma) \quad (17)$$

Le déplacement est donc finalement :

$$u_C = 2000 \text{ mm} - C'_x \simeq 1 \text{ mm} \quad (18)$$

$$v_C = C'_y \simeq 6.33 \text{ mm} \quad (19)$$

Exercice 3 : Étude d'une poutre soumise à une charge uniforme

Note : Cet exercice est inspiré du cours de mécanique des structures CIVIL-238.

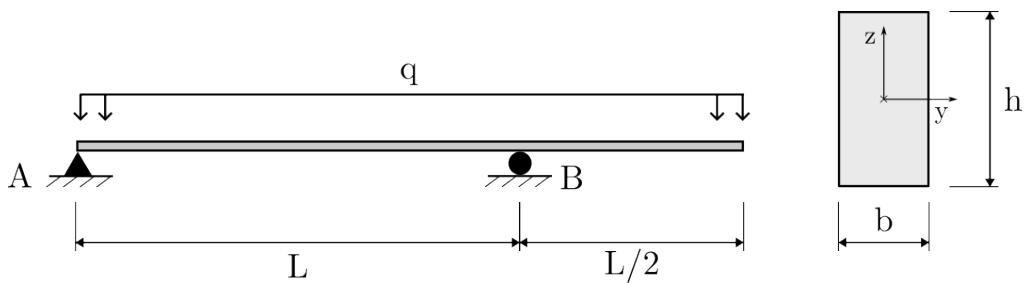


FIGURE 3 – Poutre soumise à une charge uniformément répartie et section rectangulaire de la poutre.

Une poutre est supportée par un appui fixe en A et un appui mobile en B, avec un porte-à-faux à partir de B. La longueur de la portée est de $L = 3.0 \text{ m}$ et celle du porte-à-faux $L/2 = 1.5 \text{ m}$ ($L_{\text{tot}} = 4.5 \text{ m}$). Elle est soumise à une charge uniformément répartie $q = 3 \text{ kN/m}$ sur toute sa longueur. La section transversale de la poutre est rectangulaire avec une largeur $b = 100 \text{ mm}$ et une hauteur h .

1. *Rappel* : Pour une coupe de longueur infinitésimale dx de la poutre soumise à une charge uniforme q (voir Fig.4), donner l'équation générale de l'effort tranchant $V(x)$ et du moment $M(x)$.

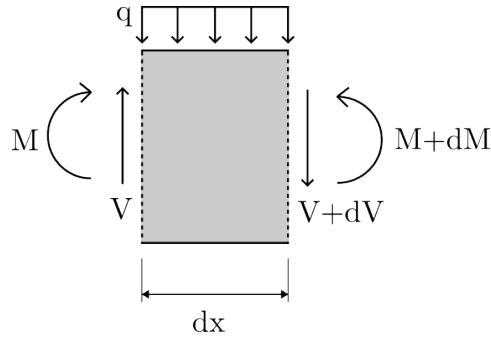


FIGURE 4 – Coupe de longueur dx de la poutre.

2. Calculer les réactions d'appuis R_A et R_B , en A et B respectivement.
3. Calculer et dessiner les diagrammes de l'effort tranchant $V(x)$ et du moment fléchissant $M(x)$. Indiquer où le moment est maximal ainsi que sa valeur.
4. Calculer le moment d'inertie I_y de la section rectangulaire.
5. La poutre est mince, on considère donc que l'effet de l'effort tranchant est négligeable par rapport à celui du moment pour l'étude de l'intégrité structurale.
 - (a) Pour la section déterminante de la poutre, $M(x) = M_{\max}$, donner le tenseur des contraintes σ en fonction de z .
 - (b) Déterminez la hauteur h de la section pour laquelle le critère de Tresca $\tau_{\max} \leq \tau_0 = 117.5$ MPa est respecté.

Note : La correction est faite pour la convention de signe donnée en Figure 4. D'autres conventions peuvent être utilisées.

Correction

1. En faisant l'équilibre des forces en y :

$$\begin{aligned} \sum F_y = 0 &\Leftrightarrow V - (V + dV) - q \cdot dx = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{dV}{dx} = -q \\ &\Leftrightarrow V(x) = - \int_x q dx = -qx \end{aligned}$$

En faisant l'équilibre des moments sur la coupe à gauche :

$$\begin{aligned} \sum M = 0 &\Leftrightarrow -M + (M + dM) - qdx \left(\frac{dx}{2} \right) - (V + dV)dx = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{dM}{dx} = V \quad (\text{en supprimant les termes d'ordre 2}) \\ &\Leftrightarrow M(x) = \int_x V(x) dx = -\frac{qx^2}{2} \end{aligned}$$

2. En faisant l'équilibre des forces en y , et l'équilibre des moments en A :

$$\sum F_y = 0 \Leftrightarrow R_{A,y} + R_{B,y} - \frac{3qL}{2} = 0 \quad (20)$$

$$\sum M_A = 0 \Leftrightarrow R_{B,y}L - \frac{3qL}{2} \frac{3L}{4} = 0 \quad (21)$$

On obtient donc $R_{B,y} = \frac{9qL}{8}$ et $R_{A,y} = \frac{3qL}{8}$.

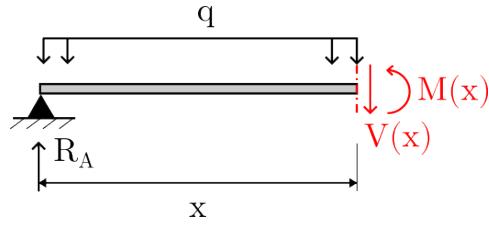


FIGURE 5 – Coupe $0 \leq x \leq L$

3. Pour déterminer $V(x)$ et $M(x)$, il est nécessaire d'effectuer deux coupes dû à la discontinuité induite par les appuis.

Entre A et B, $0 \leq x \leq L$ (voir Fig. 5) :

$$\begin{aligned}\sum F_y = 0 &\Leftrightarrow R_A - V(x) - qx = 0 \\ &\Leftrightarrow V(x) = -qx + \frac{3qL}{8}.\end{aligned}$$

Pour $M(x)$, il est possible soit d'effectuer l'équilibre autour du point A , $\sum M_A = 0$, soit d'utiliser $M = \int_x V(x)dx$. En choisissant la deuxième option, on trouve :

$$\begin{aligned}\sum M_A = 0 &\Leftrightarrow M(x) + q\frac{x^2}{2} - R_A x = 0 \\ &\Leftrightarrow M(x) = -q\frac{x^2}{2} + \frac{3qL}{8}x\end{aligned}$$

À partir de B, $L \leq x \leq \frac{3L}{2}$ (voir Fig. 5) :

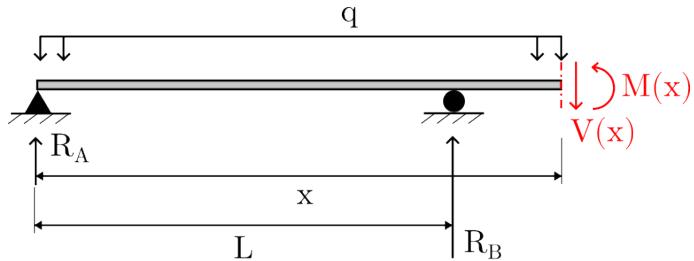


FIGURE 6 – Coupe $L < x \leq \frac{3L}{2}$

L'effort tranchant $V(x)$ est donné par :

$$\begin{aligned}\sum F_y = 0 &\Leftrightarrow R_A + R_B - V(x) - qx = 0 \\ &\Leftrightarrow V(x) = -qx + \frac{3qL}{2}\end{aligned}$$

En choisissant la deuxième option, le moment $M(x)$ est donné par :

$$M(x) = \int_x V(x)dx = -q\frac{x^2}{2} + \frac{3qL}{2}x + C$$

Pour trouver C , il est possible d'égaliser $M_{0 \leq x \leq L}(L) = M_{L \leq x \leq 3L/2}(L)$:

$$\begin{aligned} -q \frac{L^2}{2} + \frac{3qL^2}{8} &= -q \frac{L^2}{2} + \frac{3qL^2}{2} + C \\ C &= -\frac{9qL^2}{8} \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} V(x) &= \begin{cases} -qx + \frac{3qL}{8} & , \forall x \in [0, L] \\ -qx + \frac{3qL}{2} & , \forall x \in [L, 3L/2] \end{cases} \\ M(x) &= \begin{cases} -q \frac{x^2}{2} + \frac{3qL}{8}x & , \forall x \in [0, L] \\ -q \frac{x^2}{2} + \frac{3qL}{2}x - \frac{9qL^2}{8} & , \forall x \in [L, 3L/2] \end{cases} \end{aligned}$$

En dessinant les diagrammes correspondants, on trouve $M_{\max} = -\frac{qL^2}{8}$, situé à l'appui mobile $x = L$.

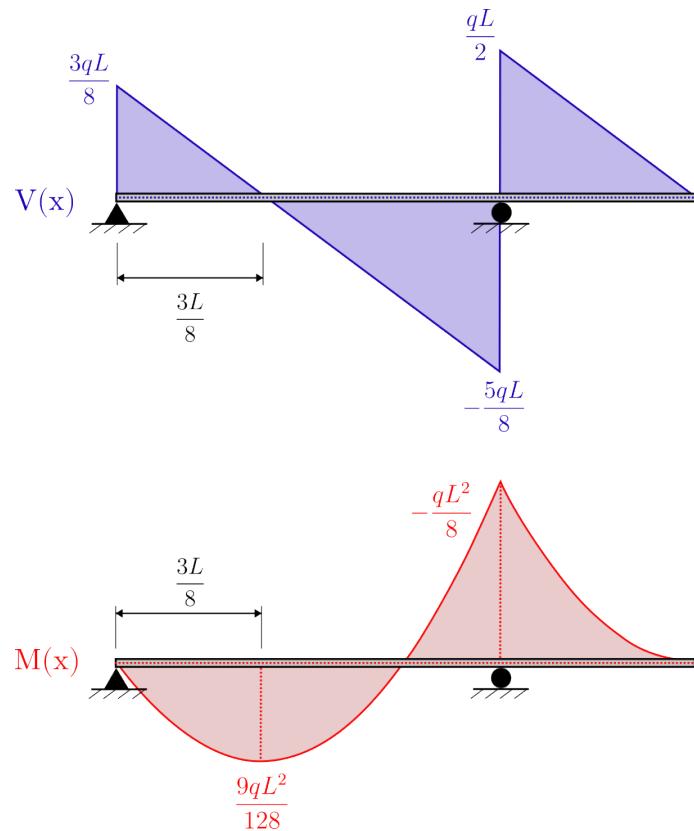


FIGURE 7 – Diagrammes de $V(x)$ et $M(x)$

4. Pour calculer le moment d'inertie de la section, on utilise la formule suivante :

$$\begin{aligned} I_y &= \int_A z^2 dA \\ &= b \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz \\ &= \frac{bh^3}{12} \end{aligned}$$

5. La poutre étant mince, on considère l'effort tranchant négligeable $\tau_{xy} = 0$.

(a) Pour un moment M , la contrainte uniaxiale $\sigma_{xx}(z) = \frac{M}{I_y}z$. En $x = L$, on a donc $\sigma_{xx}(z) = -\frac{3qL^2}{2bh^3}z$

En supposant que l'effort tranchant soit négligeable, les autres composantes sont nulles : $\tau_{xz} = \tau_{zx} = \sigma_{zz} = 0$

(b) La contrainte maximale σ_{xx} se situe en $z = \pm\frac{h}{2}$. On a donc $\sigma_{xx,\max} = \pm\frac{3qL^2}{4bh^2}$. Le cisaillement maximal doit respecter le critère de rupture de Tresca.

$$\begin{aligned}
 \tau_{\max} &= \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} < \tau_0 \\
 \Leftrightarrow \frac{\sigma_{xx,\max}}{2} &< \tau_0 \\
 \Leftrightarrow \frac{3qL^2}{8bh^2} &< \tau_0 \\
 \Leftrightarrow h &> \sqrt{\frac{3qL^2}{8b\tau_0}} \\
 \stackrel{\text{A.N.}}{\Leftrightarrow} h &> \sqrt{\frac{3 \cdot 3000 \cdot 3^2}{8 \cdot 0.02 \cdot 117.5 \cdot 10^6}} = 0.066\text{m}
 \end{aligned}$$