Correction : Préliminaires mathématiques

Introduction

Preuve de l'identité donnée dans l'Exercice 2 : $\varepsilon_{ijm}\varepsilon_{klm} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}$.
On considère le cas général :

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}$$

Ce terme vaut $+1$ si (lmn) est une permutation paire de (ijk) et -1 si (lmn) est une permutation impaire de (ijk). Il vaut 0 si (lmn) n'est pas une permutation de (ijk). Cela signifie que chacun des indices (ijk) doit avoir un correspondant dans (lmn). On énumère toutes les possibilités :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} &= \delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl} + \delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km}\\ &\quad - \delta_{in}\delta_{jm}\delta_{kl} - \delta_{il}\delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kn}\end{aligned}$$

En remplaçant $n = k$:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} &= \delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kk} + \delta_{im}\delta_{jk}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl}\delta_{km}\\ &\quad - \delta_{ik}\delta_{jm}\delta_{kl} - \delta_{il}\delta_{jk}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kk}\\ &= 3\delta_{il}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jl} + \delta_{im}\delta_{jl}\\ &\quad - \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{il}\delta_{jm} - 3\delta_{im}\delta_{jl}\\ &= \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}\end{aligned}$$

On remplace $k \to m$, $l \to k$, $m \to l$ pour revenir à notre cas particulier :

$$\varepsilon_{ijm}\varepsilon_{klm} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}$$

Exercice 1 :

1. $B_{ii} = B_{11} + B_{22} + B_{33} = 1 + 1 + 3 = 5, B_{ij}B_{ij} = 1 + 0 + 2^2 + 0 + 1 + 2^2 + 3^2 + 0 + 3^2 = 28$, $B_{jk}B_{kj} = 1 + 0 + 2 * 3 + 0 + 1 + 0 + 3 * 2 + 0 + 3^2 = 23$, $a_m a_m = 1 + 4 + 9 = 14$, $B_{mn}a_m a_n = 59$
2. (a) $b_1 = B_{1j}a_j = B_{11}a_1 + B_{12}a_2 + B_{13}a_3 = 1 * 1 + 0 * 2 + 2 * 3 = 7$. De la même façon, on a $b_2 = 8$ et $b_3 = 12$. $\underline{b} = \boldsymbol{B}\underline{a} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 12 \end{bmatrix}$. Les résultats sont identiques.

   (a) $s = B_{ij}a_i a_j = B_{11}a_1a_1 + B_{12}a_1a_2 + B_{13}a_1a_3 + B_{21}a_2a_1 + B_{22}a_2a_2 + B_{23}a_2a_3 + B_{31}a_3a_1 + B_{32}a_3a_2 + B_{33}a_3a_3 = 1*1*1+0*1*2+2*1*3+0*2*1+1*2*2+2*2*3+3*3*1+0*3*2+3*3*3 = 59$.
   $\underline{a}^t\boldsymbol{B}\underline{a} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 12 \end{bmatrix} = 59$. Les résultats sont identiques.

Exercice 2 :

(a) $\varepsilon_{ilm}\varepsilon_{jlm} = \delta_{ij}\delta_{ll} - \delta_{il}\delta_{lj} = 3\delta_{ij} - \delta_{ij} = 2\delta_{ij}$

(b) $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = \delta_{ii}\delta_{jj} - \delta_{ij}\delta_{ji} = 3 * 3 - \delta_{ii} = 9 - 3 = 6$

(c) $\underline{a}\times(\underline{b}\times\underline{c}) = (a_j\underline{e}_j)\times((b_k\underline{e}_k)\times(c_l\underline{e}_l)) = (a_j\underline{e}_j)\times(b_kc_l\varepsilon_{klm}\underline{e}_m) = a_j(b_kc_l\varepsilon_{klm})\varepsilon_{jmi}\underline{e}_i = a_jb_kc_l\varepsilon_{ijm}\varepsilon_{klm}\underline{e}_i = (\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk})a_jb_kc_l\underline{e}_i = \delta_{ik}\delta_{jl}a_jb_kc_l\underline{e}_i - \delta_{il}\delta_{jk}a_jb_kc_l\underline{e}_i = a_kb_ic_k\underline{e}_i - a_kb_kc_i\underline{e}_i = (\underline{a}\cdot\underline{c})\underline{b} - (\underline{a}\cdot\underline{b})\underline{c}$

Exercice 3 :

les matrices de rotation en 3D s'écrivent :

$$\boldsymbol{R}_{x_1}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\theta) & -sin(\theta) \\ 0 & sin(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{R}_{x_2}(\theta) = \begin{bmatrix} cos(\theta) & 0 & sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin(\theta) & 0 & cos(\theta) \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{R}_{x_3}(\theta) = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) & 0 \\ sin(\theta) & cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. $\boldsymbol{R}$ correspondant à la rotation (positive ou directe) de 90° d'un corps rigide suivant l'axe x_3 :

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. $\boldsymbol{S}$ correspondant à la rotation (positive ou directe) de 90° d'un corps rigide suivant l'axe x_1 :

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Déterminer la matrice qui correspond à la rotation effectuée à la question (1) puis à la question (2) :

$$\boldsymbol{SR} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Déterminer la matrice qui correspond à la rotation effectuée à la question (2) puis à la question (1) :

$$\boldsymbol{RS} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

5. On prendra r comme étant le vecteur position du point P, d'où $r = OP = (1, 1, 0)$ avec le point O comme centre du repère (x_1, x_2, x_3), $r^\star$ et $r^{\star\star}$ seront respectivement les vecteurs positions du point P après que celui-ci est subit les rotations décrites à la question (3) et à la question (4).

$$\underline{r}^\star = \boldsymbol{SR}\underline{r} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{r}^{\star\star} = \boldsymbol{RS}\underline{r} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

6. Pour déterminer l'axe de rotation V définies par la matrice de rotation $\boldsymbol{SR}$ (voir question 3), on calcule les trois valeurs propres puis le vecteur propre qui sera l'axe de rotation V.

   Les valeurs propres sont calculées à partir du déterminant de la matrice $(\boldsymbol{SR} - \lambda)$. On obtient ainsi la valeur propre réelle $\lambda_1 = 1$. λ_2 et λ_3 sont des valeurs complexes.

Le vecteur propre $\underline{V}_1$ est calculé à partir de l'équation suivante :

$$\boldsymbol{SR}\ \underline{V}_1 = \lambda_1\ \underline{V}_1$$

Et on trouve ainsi le vecteur unitaire $\underline{V} = \underline{V}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Pour calculer l'angle de rotation ψ (voir figure 1), on déterminera à l'aide d'un produit vectoriel un vecteur unitaire $\underline{U}$ perpendiculaire au vecteur $\underline{V}$. En sachant que le vecteur $\underline{U}$ est un vecteur unitaire perpendiculaire au vecteur $\underline{V}$ parmi une infinité de vecteurs unitaires. Puis on déterminera un vecteur unitaire $\underline{U}' = \boldsymbol{SR}\ \underline{U}$ qui est la transformation du vecteur unitaire $\underline{U}$ par la matrice de rotation $\boldsymbol{SR}$.

Donc : $\underline{U}_1 = \underline{V} \times \underline{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

et le vecteur normalisé $\underline{U}$ est donné par $\underline{U} = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{U}_1$. Ensuite le vecteur $\underline{U}'_1$ peut être calculé

$\underline{U}'_1 = \boldsymbol{SR}\ \underline{U} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

et après normalisation on obtient le vecteur unitaire $\underline{U}'$: $\underline{U}' = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{U}'_1$

Finalement si on fait le produit scalaire : $\underline{U} \cdot \underline{U}' = || \underline{U} ||\ || \underline{U}' ||\ cos(\psi)$ on trouve $\psi = \frac{2\pi}{3}$.

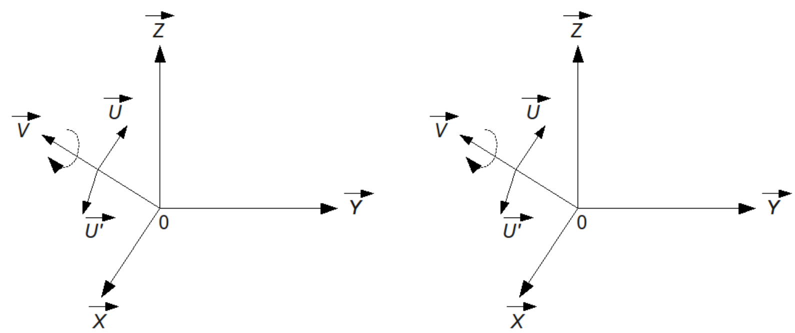

Figure 1 – Schéma descriptif

Exercice 4 :

Soit $\boldsymbol{R}$ la matrice de rotation d'angle θ (sens trigonométrique) et d'axe de rotation x_3.

1. Exprimer $\boldsymbol{R}^2$

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}^2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2 & -2\sin(\theta)\cos(\theta) & 0 \\ 2\sin(\theta)\cos(\theta) & \cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Montrer que $\boldsymbol{R}^2$ correspond à une rotation d'angle 2θ autour du même axe.

   Sachant que : $\cos a \ \cos b - \sin a \ \sin b = \cos(a+b)$ et $\sin a \ \cos b + \sin b \ \cos a = \sin(a+b)$ on peut écrire $\boldsymbol{R}^2$

$$\boldsymbol{R}^2 = \begin{bmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) & 0 \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   Cette matrice représente la rotation d'angle 2θ autour de l'axe $\underline{x_3}$.

3. Exprimer $\boldsymbol{R}^n$ pour tout entier n.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{R}^{n-1} &= \begin{bmatrix} \cos((n-1)\theta) & -\sin((n-1)\theta) & 0 \\ \sin((n-1)\theta) & \cos((n-1)\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{R}^{n-1}\boldsymbol{R} &= \begin{bmatrix} \cos((n-1)\theta)\cos(\theta) - \sin((n-1)\theta)\sin(\theta) & -\cos((n-1)\theta)\sin(\theta) - \sin((n-1)\theta)\cos(\theta) & 0 \\ \sin((n-1)\theta)\cos(\theta) + \cos((n-1)\theta)\sin(\theta) & -\sin((n-1)\theta)\sin(\theta) + \cos((n-1)\theta)\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) & 0 \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

   par récurrence, on obtient donc $\boldsymbol{R}^n$ qui est la matrice de rotation d'angle $n\theta$