



# **Chapitre 7 : écoulements en charge**

**Mécanique des fluides**

Christophe Ancey



# Chapitre 6 : écoulements laminaires et turbulents



- Problématique : pertes de charge dans une conduite
- Écoulement permanent uniforme lisse entre deux plans parallèles (Poiseuille plan)
  - sous-couche visqueuse
  - zone logarithmique
  - zone centrale
- Effet de la rugosité sur le profil de vitesse
- Dissipation d'énergie et pertes de charges
- Pertes de charge singulière
- Exemple traité : vidange d'un réservoir





1. Dans un écoulement en charge, peut-on négliger la pression hydrostatique ?
  - oui elle est faible par rapport à la pression cinétique.
  - cela dépend des problèmes.
2. Une conduite dont les parois sont rugueuses dissipe plus d'énergie qu'une conduite lisse ?
  - oui, la rugosité accentue toujours la dissipation d'énergie.
  - il n'y a pas d'effet de la rugosité sur l'écoulement si l'écoulement est laminaire.

En hydraulique à surface libre (chap. 5) on a montré que le théorème de Bernoulli

$$E = \rho g z + \rho \frac{u^2}{2} + p$$

(en principe valable uniquement pour des fluides non visqueux) peut se généraliser en introduisant une perte de charge linéairement répartie le long du bief. La charge est définie comme l'équivalent en hauteur d'eau de l'énergie :

$$H = \frac{E}{\rho g},$$

et la perte de charge est introduite comme la pente de la ligne de charge (on dit pente d'énergie même si c'est une charge)

$$j_f = -\frac{dH}{dx}$$

Cette perte de charge *linéaire* (c.-à-d. linéairement répartie) peut être estimée à l'aide de formules empiriques telles que l'équation de Manning-Strickler

$$j_f = \frac{\bar{u}^2}{K^2 R_h^{4/3}}.$$

On va montrer ici que pour des écoulements en charge dans des conduites, l'équation de perte de charge est

$$\frac{dH}{dx} = -f \frac{1}{D_h} \frac{\bar{u}^2}{2g},$$

avec :  $D_h$  le diamètre hydraulique de la conduite,  $\bar{u}$  la vitesse débitante,  $f$  le coefficient de frottement qui dépend du nombre de Reynolds

$$Re = \frac{D_h \bar{u}}{\nu}.$$

Comme en hydraulique à surface libre, cette équation suppose que l'écoulement est uniforme et que la conduite ne change pas de caractéristiques. Comme la vitesse est constante si le diamètre ne change pas (cela résulte de la conservation de la masse), on a pour une conduite de longueur  $L$

$$\Delta H = H_1 - H_2 = f \frac{L}{D_h} \frac{\bar{u}^2}{2g}.$$

Si la conduite change de caractéristiques, il faut introduire dans les calculs une *perte de charge singulière* qui traduit une dissipation d'énergie locale due, par exemple, à un changement brutal de direction ou de section.



Considérons un écoulement permanent de Poiseuille plan entre deux plans parallèles espacés de  $2b$ . La turbulence dépend fortement de la rugosité de la paroi. On est amené à distinguer :

- les parois lisses ;
- les parois rugueuses.

On peut faire une anatomie simplifiée de l'écoulement en considérant qu'il comporte trois couches que l'on peut distinguer en fonction de l'ordonnée adimensionnelle :

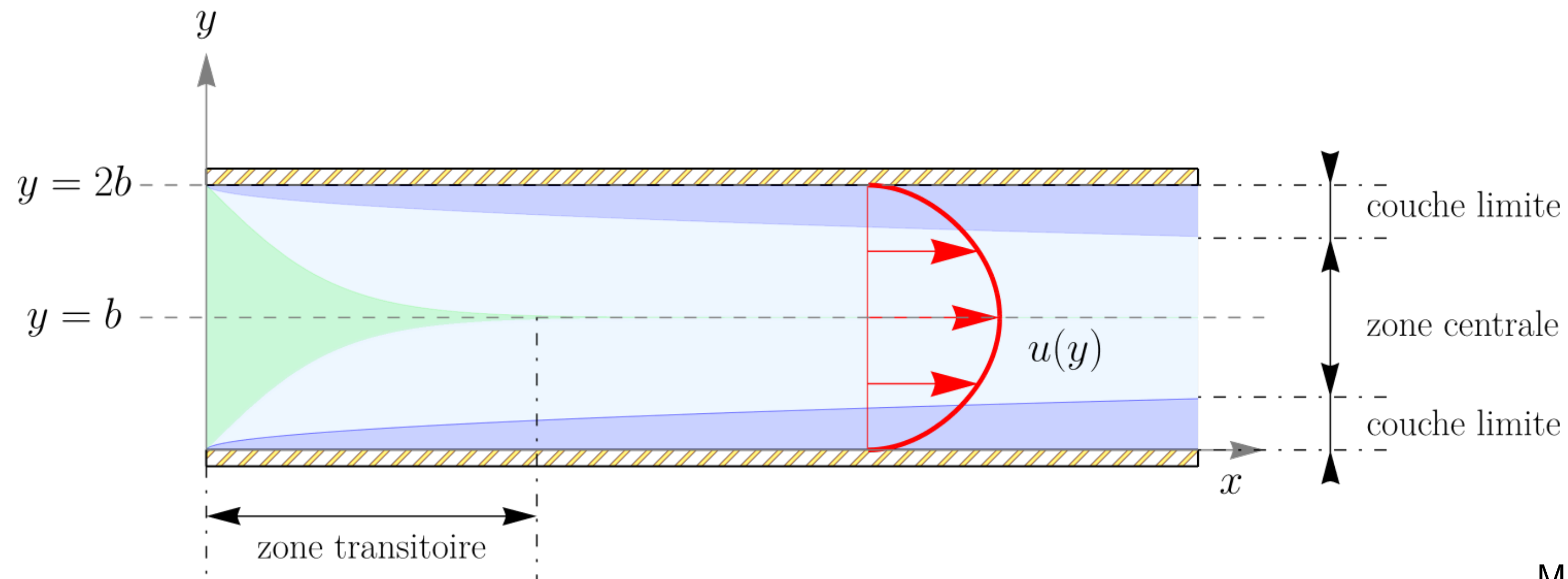
$$\xi = \frac{yu_*}{\nu},$$

où  $u_*$  est la vitesse de frottement (ou de cisaillement) :  $u_* = \sqrt{\tau_p/\varrho}$  (avec  $\tau_p$  la contrainte à la paroi).

# Écoulement permanent uniforme lisse

Les expériences montrent que les trois couches sont

- $0 \leq \xi \leq 25$  : la couche laminaire, incluant pour  $0 \leq \xi \leq 3$  la sous-couche visqueuse ;
- $25 \leq \xi \leq 500$  : la zone logarithmique ;
- $500 \leq \xi$  : la zone centrale.





La résolution des équations de Navier–Stokes dans un écoulement de Poiseuille entre deux plans (mu par un gradient de pression  $\partial_x p$ ) montre que le profil des vitesses dans la direction  $x$  est parabolique

$$u = \frac{1}{2\mu} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right) y(y - 2b),$$

donc au premier ordre en  $y$  quand  $y \rightarrow 0$ , on a :

$$u \approx \frac{1}{2\mu} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right) y(-2b) = \frac{1}{\mu} \tau_p y,$$

et sous forme adimensionnelle

$$u = u_* \xi.$$

Expérimentalement cela est valable tant que  $\xi \leq 3$ . Pour le reste de la couche laminaire ( $3 \leq \xi \leq 25$ ) il n'y a pas d'approximation analytique.

Rappelons que les équations de Navier–Stokes

$$\varrho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = \varrho \mathbf{g} - \nabla p + \nabla \cdot \mathbf{T}.$$

peuvent se moyennner en introduisant la décomposition de Reynolds

$$\mathbf{u} = \langle \mathbf{u} \rangle + \mathbf{u}'$$

avec  $\mathbf{u}'$  la fluctuation de vitesse et  $\langle \mathbf{u} \rangle$  la vitesse moyennée (moyenne d'ensemble).

On obtient les équations suivantes :

$$\varrho \left( \frac{\partial \langle \mathbf{u} \rangle}{\partial t} + \langle \mathbf{u} \rangle \cdot \nabla \langle \mathbf{u} \rangle \right) = -\nabla \langle p_* \rangle + \nabla \cdot \langle \mathbf{T} \rangle - \varrho \nabla \cdot \langle \mathbf{u}' \mathbf{u}' \rangle.$$



Le tenseur

$$\Sigma_t = -\rho \langle \mathbf{u}' \mathbf{u}' \rangle$$

est appelé *tenseur de Reynolds*. Il reflète les contraintes turbulentes. Pour l'estimer on se sert d'équations de fermeture. Une des équations les plus simples est le modèle de longueur de mélange de Prandl :

$$\Sigma_t = 2\mu_t \langle \mathbf{D} \rangle,$$

avec  $\mu_t$  la viscosité turbulente qui varie avec le gradient moyen de vitesse

$$\mu_t = \rho (\kappa y)^2 \frac{d\langle u \rangle}{dy},$$

avec  $\kappa$  la constante de von Kármán ( $\kappa = 0,41$ ).

En négligeant les contraintes visqueux, on tire des équations de Navier–Stokes moyennées

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \mu_t \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} \right) = \frac{\partial \langle p_* \rangle}{\partial x},$$

et par intégration sur  $y$ , on déduit l'équation

$$\mu_t \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} = \frac{\partial \langle p_* \rangle}{\partial x} y + c,$$

avec  $c$  une constante d'intégration. En négligeant l'épaisseur de la sous-couche visqueuse, on exprime la condition aux limites

$$\text{en } y = 0, \mu_t \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} = \tau_p.$$



En supposant  $\tau_p = \rho u_*^2$  connu, on peut donc écrire l'équation précédente

$$\mu_t \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} = \frac{\partial \langle p_* \rangle}{\partial x} y + \tau_p,$$

et au premier ordre en  $y$  en  $y = 0$ , on déduit l'équation

$$\mu_t \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} = \tau_p + O(y).$$

En se servant du modèle de Prandtl, on doit résoudre

$$\frac{d \langle u \rangle}{dy} = \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho}} \frac{1}{\kappa y}.$$

L'intégration fournit un profil logarithmique de vitesse

$$\langle u \rangle = \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho}} \frac{1}{\kappa} \ln y + c = \frac{u_*}{\kappa} \ln y + c.$$

La constante d'intégration est déterminée en imposant un raccord avec la couche laminaire. On obtient alors

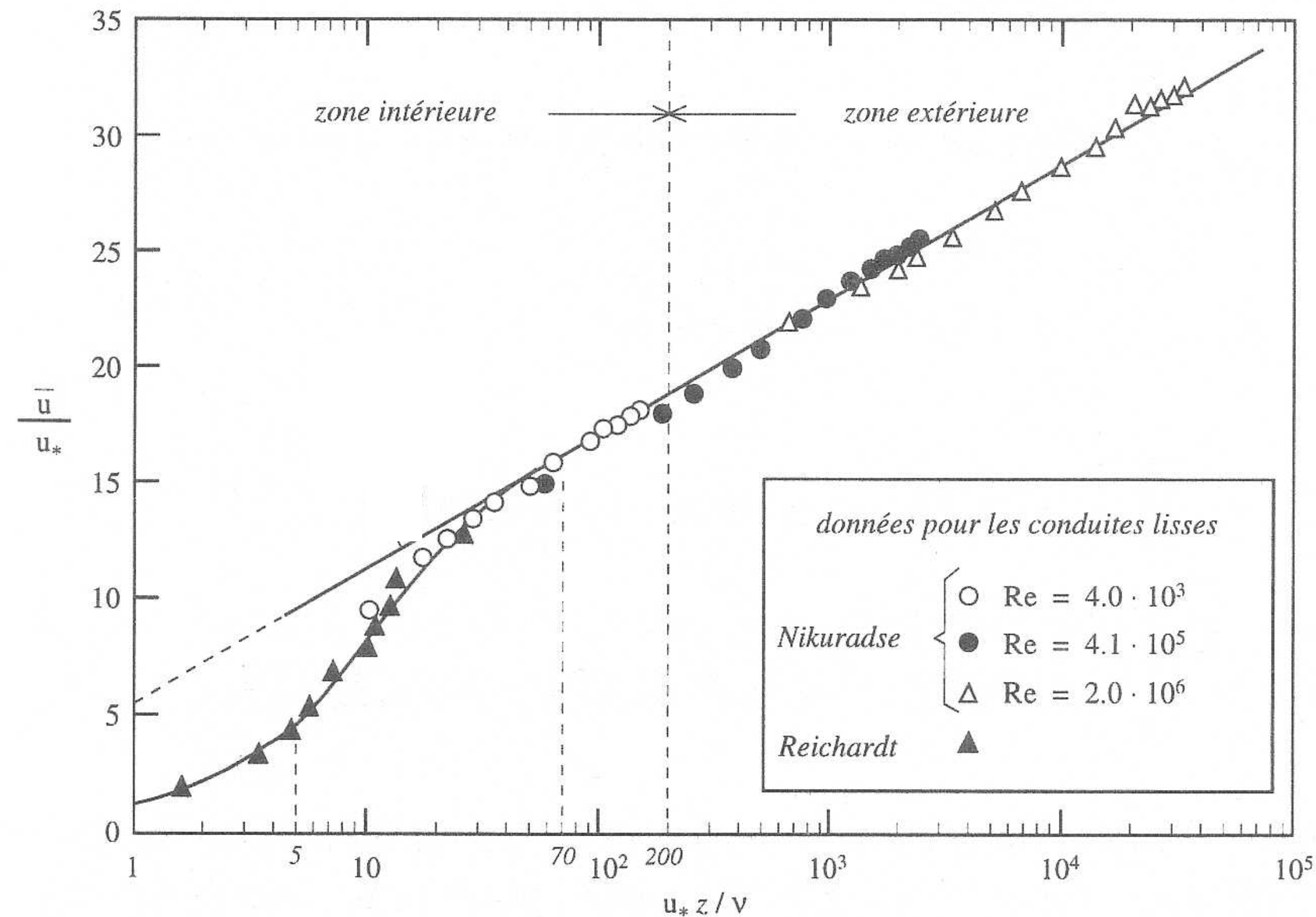
$$\frac{\langle u \rangle}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \xi + 5,5 \approx 2,5 \ln \xi + 5,5,$$

qui est valable pour  $25 \leq \xi \leq 500$ .



# Écoulement permanent uniforme lisse

Les expériences montrent que le profil de vitesse à la paroi vérifie bien la loi logarithmique



On suit les mêmes équations que précédemment, mais on prend en compte une nouvelle loi de fermeture qui reflète l'influence moindre du taux de cisaillement sur la viscosité turbulente (loi de fermeture de type Boussinesq) :

$$\nu_t = 0,080 b u_*.$$

La viscosité est indépendante du taux moyen de cisaillement, mais dépend de l'espacement entre les plans (ce qui donne la taille maximale des tourbillons) et de la vitesse de frottement. La résolution des équations de Navier–Stokes moyennées pour cette équation de fermeture nous donne un profil de vitesse parabolique comme pour le régime laminaire puisque la viscosité turbulente est constante.



Profil de vitesse :

$$\frac{u_m - \langle u \rangle(y)}{u_*} = 6,3 \left(1 - \frac{y}{b}\right)^2,$$

pour  $0,2b < y < 1,8b$ , et où  $u_m$  est la vitesse maximale atteinte en  $y = b$

$$\frac{u_m}{u_*} = 2,5 \ln \xi_r + 5,5,$$

avec  $\xi_r = 0,2bu_*/\nu$  l'ordonnée de la transition zone centrale/logarithmique.

# Débit dans un écoulement de Poiseuille plan



La contribution de la sous-couche visqueuse est négligeable. Le débit s'obtient par intégration du champ de vitesse :

$$q = 2\ell b u_* \left( 2,5 \ln \frac{b u_*}{\nu} + 3,21 \right) ,$$

tandis que la vitesse de frottement est

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_p}{\varrho}} = \left( -\frac{b \partial p}{\varrho \partial x} \right)^{1/2} .$$

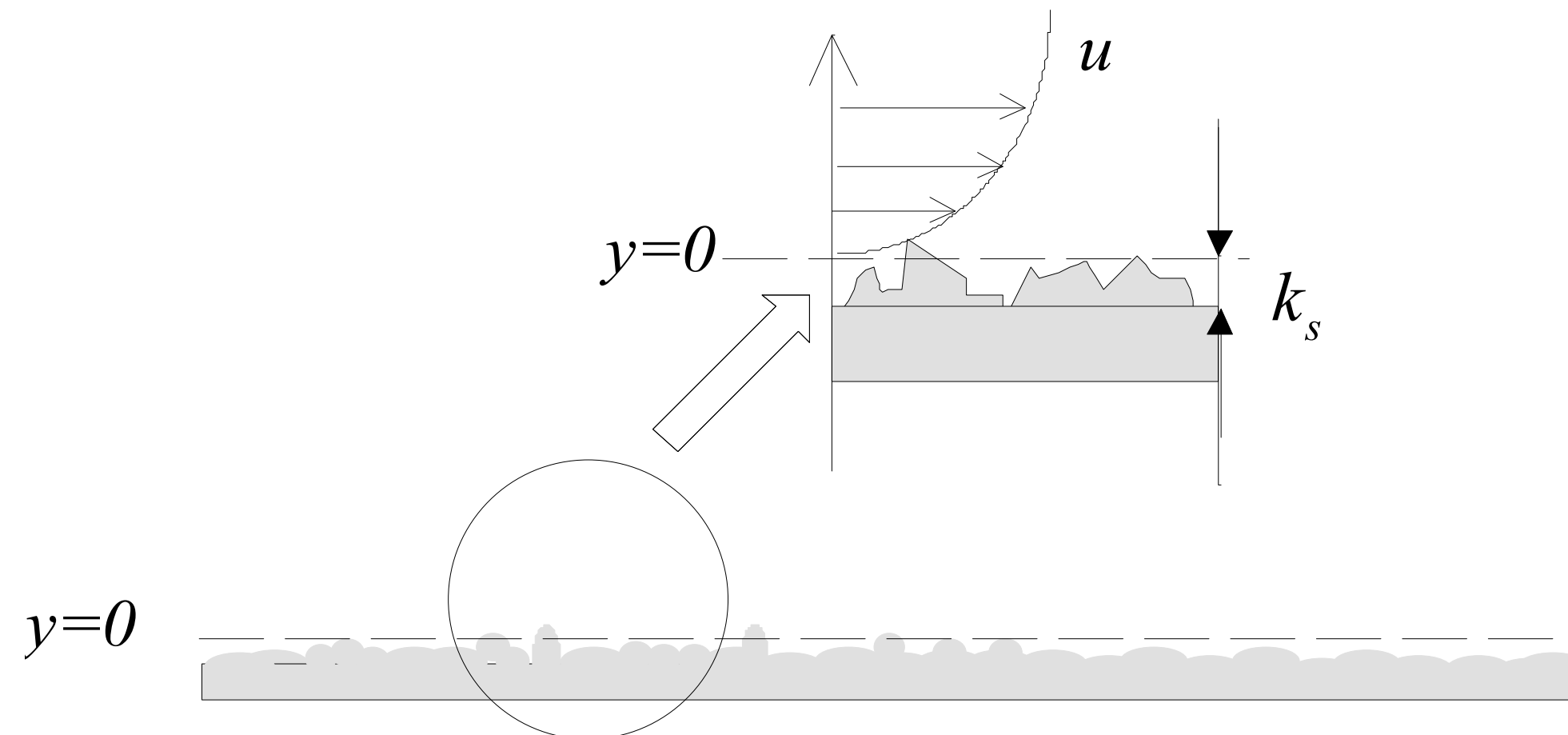
Pour montrer cela, on se sert de l'équation de conservation de la quantité de mouvement en  $y = b$ . Comme le profil de vitesse  $y$  atteint son maximum, on a  $d\langle u \rangle / dy = 0$ . La dissipation d'énergie est

$$\Phi = \tau_p \bar{u} = b \frac{\partial p}{\partial x} u_* \left( 2,5 \ln \frac{b u_*}{\nu} + 3,21 \right) = \varrho u_*^3 \left( 2,5 \ln \frac{b u_*}{\nu} + 3,21 \right) .$$

Lorsque la rugosité adimensionnalisée (construite comme le nombre de Reynolds)

$$k_s^+ = \frac{k_s u_*}{\nu} > 3,1,$$

on dit que la paroi est *rugueuse*. Les équations de fermeture sont modifiées. Pour une paroi rugueuse se pose le problème de la définition du plan moyen  $y = 0$ . Les formules sont imprécises lorsque  $k_s^+ \leq 70$ .





La rugosité augmente la turbulence de paroi, ce qui change la vitesse dans la zone logarithmique :

$$\frac{\langle u \rangle}{u_*} = 2,5 \ln \frac{y}{k_s} + 8,34,$$

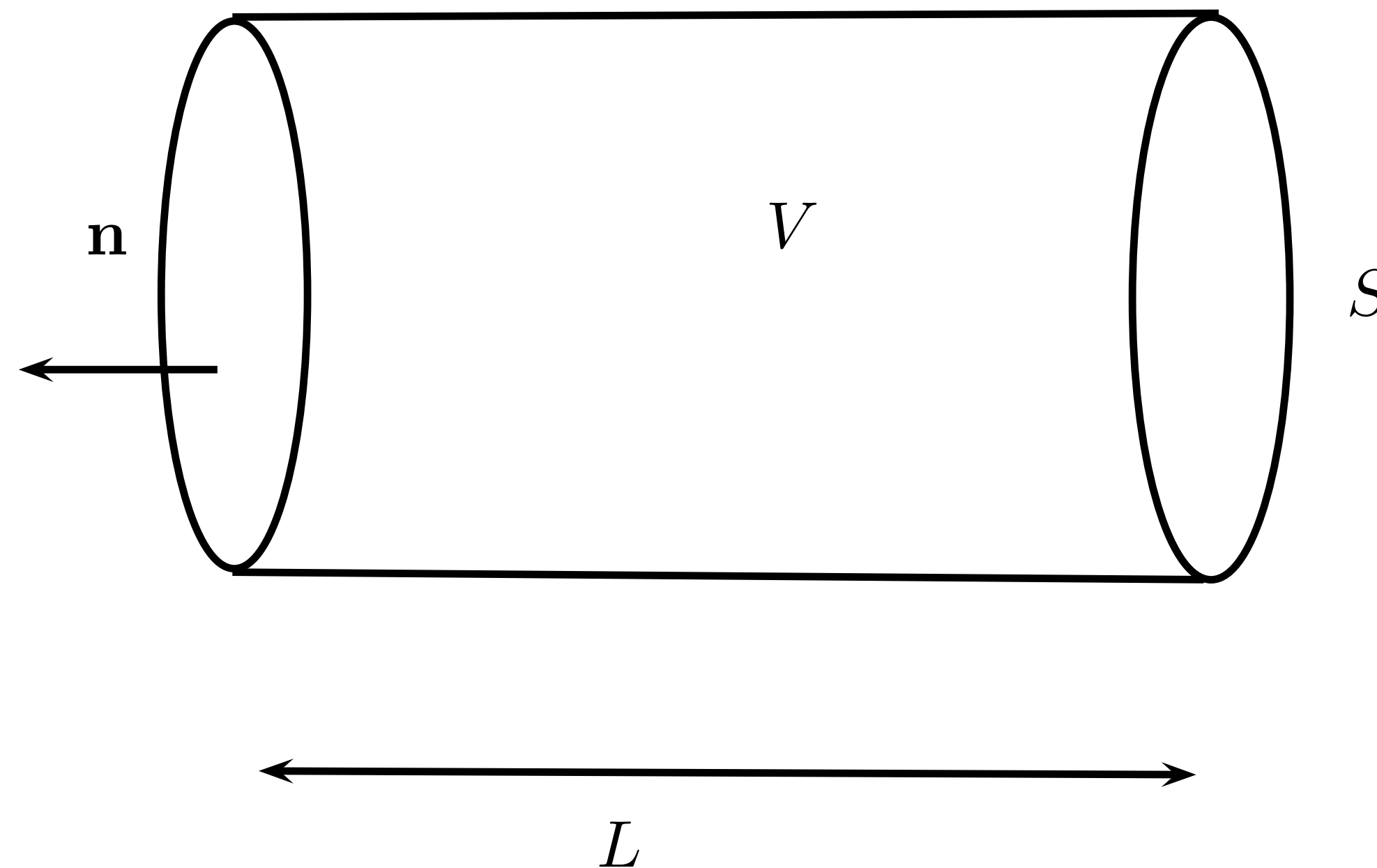
mais pas dans la zone centrale. Le débit s'écrit alors pour une canalisation plane rectangulaire (Poiseuille plan) :

$$q = 2\ell b u_* \left( 2,5 \ln \frac{b}{k_s} + 6,04 \right),$$

et pour un écoulement dans un conduit circulaire (Poiseuille cylindrique) :

$$q = \pi R^2 u_* \left( 2,5 \ln \frac{R}{k_s} + 4,87 \right).$$

On va maintenant capitaliser nos connaissances sur le comportement de l'écoulement turbulent pour étendre le théorème de Bernoulli à des écoulements réels



Rappelons que théorème de l'énergie cinétique s'obtient en prenant le produit scalaire de l'équation de conservation de la quantité de mouvement et de la vitesse  $\mathbf{u}$  :

$$\rho \mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{g} - \mathbf{u} \cdot \nabla p + \mathbf{u} \cdot \nabla \cdot \mathbf{T}.$$

En se servant de Green-Ostrogradski et en supposant l'établissement d'un régime permanent, on simplifie cette équation (voir chap. 4)

$$\underbrace{\int_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \left( \frac{\rho |\mathbf{u}|^2}{2} + p_* \right) dS}_{\text{flux d'énergie}} = \underbrace{\int_S \mathbf{n} \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{T}) dS}_{\text{puissance dissipée à la frontière}} - \underbrace{\int_V \mathbf{T} : \mathbf{D} dV}_{\Phi, \text{ puissance dissipée dans le volume}},$$

avec  $p_*$  la pression généralisée,  $V$  le volume de contrôle et  $S$  sa surface enveloppe.



On suppose également :

- les effets de bord (à l'entrée  $S_1$  et sortie  $S_2$  de la conduite) sont négligés ;
- la section ne change pas avec  $x$  ;
- l'écoulement est établi :  $\partial \mathbf{u} / \partial x = 0$  ;
- la composante selon  $y$  ( $r$  en coordonnées cylindriques) de la vitesse est nulle :  $\mathbf{u} = (u, 0, 0)$ . La pression généralisée  $p$  (on supprime l'indice  $*$ ) est considérée comme constante dans une section droite.

Cela permet de simplifier encore l'équation de conservation de l'énergie

$$- \int_{S_1} \left( \frac{\rho u^2}{2} + p \right) u \, dS + \int_{S_2} \left( \frac{\rho u^2}{2} + p \right) u \, dS = - \int_V \mathbf{T} : \mathbf{D} \, dV.$$

On note  $q = S_1 \bar{u}_1 = S_2 \bar{u}_2$  le débit volumique,  $p_1$  et  $p_2$  la pression (qui est uniformément répartie) sur  $S_1$  et  $S_2$  et  $\Phi = \mathbf{T} : \mathbf{D}$  la fonction de *dissipation interne*. En divisant l'énergie par  $q$ , on aboutit à l'équation de conservation de la charge (attention, il s'agit de la charge selon le sens employé en génie industriel)

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2q} \underbrace{\left( \int_{S_2} u^3 dS - \int_{S_1} u^3 dS \right)}_{0 \text{ si } S_1=S_2} + \frac{1}{q} \int_V \Phi dV.$$

Dans une conduite de section constante en régime permanent et uniforme, la différence de pression motrice équivaut à la dissipation d'énergie (aux pertes de charge). Dit autrement, pour mouvoir le fluide, il faut exercer un gradient de pression qui contrebalance exactement la dissipation d'énergie.

En hydraulique, on définit la charge comme un équivalent en hauteur d'eau, donc on va diviser l'équation de la charge par  $\rho g$ . La charge en  $S$  s'écrit

$$H = \frac{p}{\rho g} + \frac{1}{2\rho g} \int_S u^2 dS,$$

et donc compte tenu de la conservation du débit dans des conduites de même section ( $S_1 = S_2 = S$ ),  $p_1 - p_2 = H_1 - H_2$ , on a finalement

$$H_1 - H_2 = \Delta H = \frac{1}{\rho g} \int_V \Phi dV.$$

La différence de charge est égale à la perte de charge totale  $\Delta H$ , qui représente l'énergie dissipée dans  $V$ .

Comment estimer cette dissipation d'énergie ?

Pour estimer la dissipation d'énergie  $\Phi$ , on peut écrire que

$$\Phi = \tau_p \bar{u} S_c,$$

où  $\bar{u}$  est la vitesse moyenne,  $\tau_p$  est la contrainte exercée par le fluide sur la paroi de la conduite  $S_c$  entre les deux sections  $S_1$  et  $S_2$ . Si  $P$  est le périmètre de la conduite (pas nécessairement circulaire) et  $L$  sa longueur, alors

$$S_c = PL.$$

On note  $C_f$  le coefficient de frottement (dit coefficient de Fanning). On peut exprimer la contrainte pariétale comme une fraction de l'énergie cinétique

$$\tau_p = \frac{1}{2} C_f \rho \bar{u}^2.$$



De façon équivalente, on peut employer la loi de Darcy–Weisbach (voir chap. 5)

$$\tau_p = \frac{1}{8} f \rho u^2,$$

où  $f = 4C_f$  est le coefficient de Darcy–Weisbach. On introduit le diamètre hydraulique (pendant du rayon hydraulique pour les écoulements à surface libre)

$$D_h = 4 \frac{S}{P}.$$

On vérifie que  $D_h = 2R$  pour une conduite circulaire de rayon  $R$  tandis que pour une conduite prismatique à section rectangulaire  $S = b \times \ell$

$$D_h = 4 \frac{S}{P} = 2 \frac{b \times \ell}{b + \ell}.$$

Attention : en règle générale, le nombre de Reynolds est défini à partir de  $D_h$  :

$$Re = \bar{u} D_h / \nu.$$

En résumé on a

$$\Phi = \tau_p \bar{u} S_c = \frac{1}{8} f \rho u^2 \times \bar{u} \times PL,$$

et si on exprime cela en termes de perte de charge (voir chap. 5)

$$\Delta H = \frac{\Phi}{\rho g q}.$$

Soit finalement

$$\Delta H = \frac{\Phi}{\rho g q} = \frac{1}{8g} f u^2 \frac{P}{S} L = f \frac{u^2}{2g} \frac{L}{D_h}.$$

Comme en hydraulique à surface libre, la perte de charge  $\Delta H$  est exprimée en m (équivalent mètre colonne d'eau).

En régime laminaire, on montre en résolvant les équations de Navier–Stokes que

$$f = \frac{64}{Re}.$$

Pour ce régime,  $f$  est indépendant de la taille des rugosités.

Pour un écoulement turbulent,  $f$  dépend de l'échelle de rugosité  $k_s$  et du nombre de Reynolds  $Re = \bar{u}D_h/\nu$ . La séparation entre régime lisse et rugueux se fait à l'aide du nombre sans dimension  $k_s^+ = k_s u_* / \nu$  :

- si  $k_s^+ < 5$ , le régime est *lisse* ;
- si  $k_s^+ > 70$ , il est (pleinement) *rugueux*. La viscosité n'est plus importante, et  $f$  devient indépendant du nombre de Reynolds ;
- lorsque  $5 \leq k_s^+ \leq 70$  on parle de *régime rugueux transitionnel*.

- Il existe trois stratégies classiques pour calculer  $f$  pour des conduites industrielles :
- on utilise une formule de type Nikuradse en supposant que le régime est turbulent lisse ou turbulent rugueux, puis on vérifie l'hypothèse de départ ;
  - on utilise une formule de type Colebrook, qui est valable pour une large gamme d'écoulements (lisses et rugueux) ;
  - on se sert de l'abaque de Moody.



# Formule de Nikuradse (1933)



L'expression du coefficient de frottement dépend du régime d'écoulement et de la géométrie de la conduite. Ce sont des équations implicites :

	<i>rectangulaire</i>	<i>circulaire</i>
lisse	$\frac{1}{\sqrt{f/8}} = 2,5 \ln \left( \text{Re} \sqrt{f/8} \right) - 0,25$	$\frac{1}{\sqrt{f/8}} = 2,5 \ln \left( \text{Re} \sqrt{f/8} \right) + 0,31$
rugueux	$\frac{1}{\sqrt{f/8}} = 2,5 \ln \frac{b}{k_s} + 6,04$	$\frac{1}{\sqrt{f/8}} = 2,5 \ln \frac{R}{k_s} + 4,87$

La *formule de McKeon* (2005) permet de calculer le coefficient de frottement avec une erreur relative inférieure à 1,25 %

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 0,83 \ln(\text{Re} \sqrt{f}) - 0,537,$$

# Formule de Colebrook (1939)



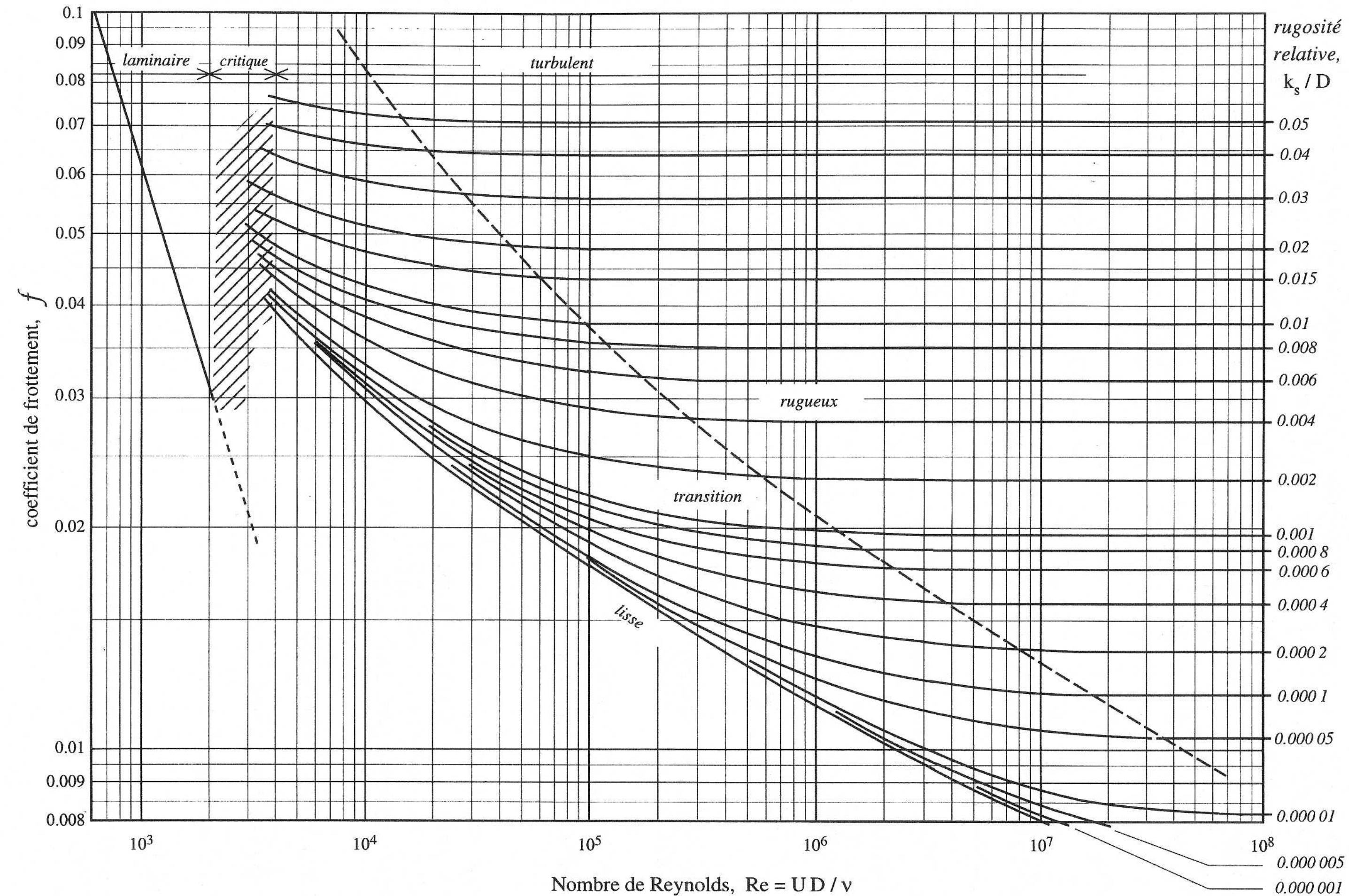
Pour les conduites circulaires et pour  $Re > 2300$ , on peut utiliser la *formule de Colebrook* valable quelle que soit la rugosité :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -0,91 \ln \left( 0,27 \frac{k_s}{2R} + \frac{2,51}{\sqrt{f} Re} \right).$$

Cette formule a l'avantage de donner un résultat relativement précis sans se soucier de la nature du régime turbulent (lisse/rugueux), mais la précision peut être faible pour le régime transitionnel  $5 < k_s^+ < 70$ .



# Abaque de Moody--Stanton (1944)





Tout changement dans la conduite (direction, section, grille, etc.) se traduit par une dissipation d'énergie supplémentaire localisée à l'endroit du changement. On parle donc de *pertes de charge singulières* pour souligner la différence avec la dissipation d'énergie uniformément répartie dans le volume de la conduite. Ces pertes de charge sont le plus souvent exprimées comme des fractions perdues d'énergie cinétique. Les pertes de charge singulières sont introduites sous la forme :

$$\Delta H_s = \zeta \frac{\bar{u}^2}{2g},$$

avec  $\zeta$  le coefficient de perte de charge singulière.

On se référera au livre d'Idel'cik *Mémento des pertes de charges* (Eyrolles, Paris, 1986) pour les cas pratiques.



On ne donne ici que les formules pour des tubes cylindriques :

- *élargissement brutal* :

$$\Delta H_s = \zeta \frac{\bar{u}_1^2}{2g},$$

avec  $\zeta = 2 - \frac{8S_1}{3S_2} + \frac{2S_1^2}{3S_2^2}$  si l'écoulement est laminaire et  $\zeta = \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2$  pour un écoulement turbulent (profil de vitesse uniforme). On emploie  $S_1$  pour la section amont et  $S_2$  pour l'aval. L'entrée d'un réservoir se déduit en prenant  $S_2 \rightarrow \infty$ .

- *rétrécissement brutal* :

$$\Delta H_s = \zeta \frac{\bar{u}_2^2}{2g},$$

avec

$$\zeta = \left(1 - \frac{1}{0,59 + 0,41(S_2/S_1)^3}\right)^2$$

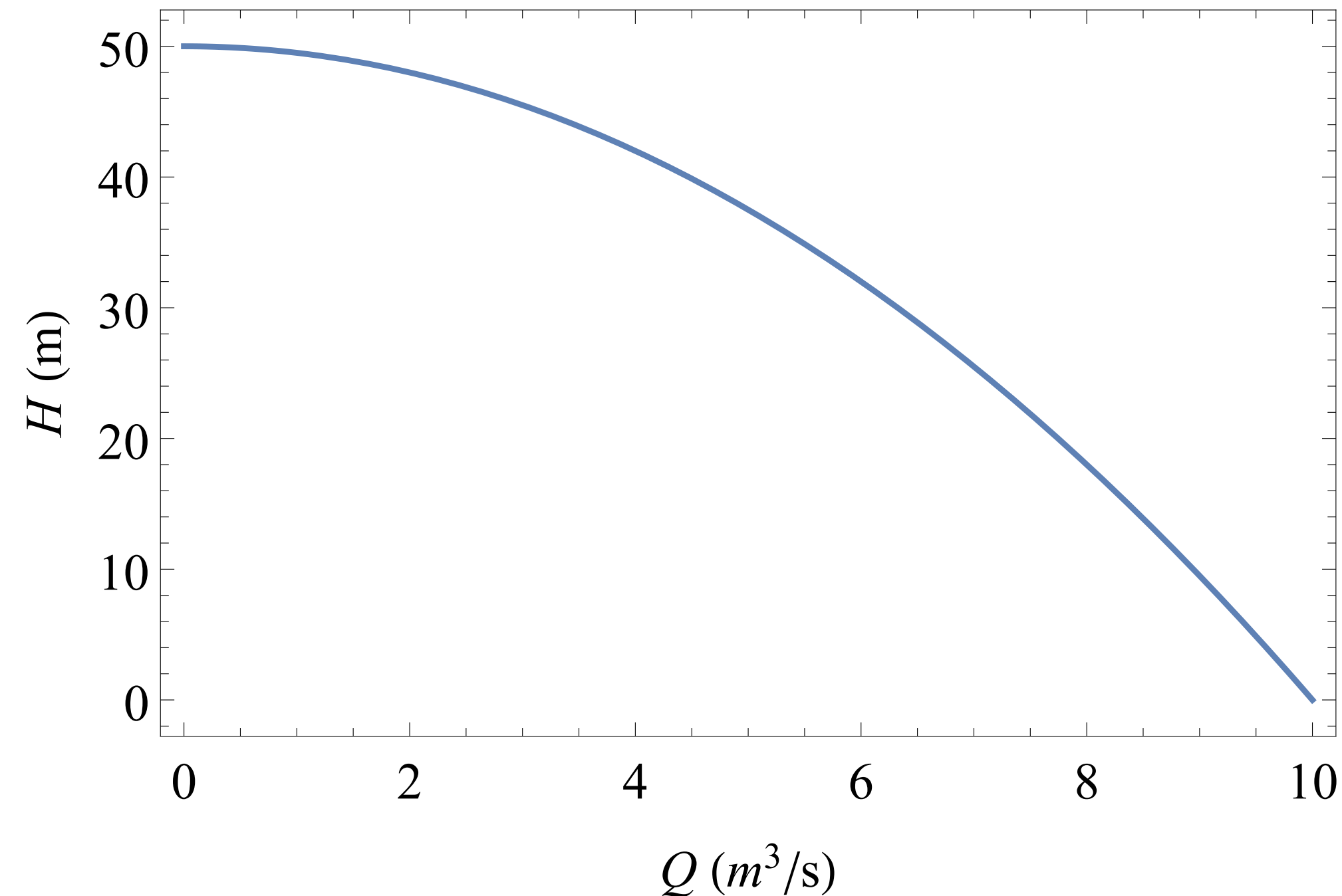
Au niveau d'un coude (changement de direction  $\theta$  exprimé en degrés, avec un rayon de courbure  $R_c$ ), il y a une perte de charge donnée par la *formule de Weisbach* :

$$\zeta = \frac{\theta}{90} \left( 0,13 + 1,85 \left( \frac{R}{R_c} \right)^{7/2} \right),$$

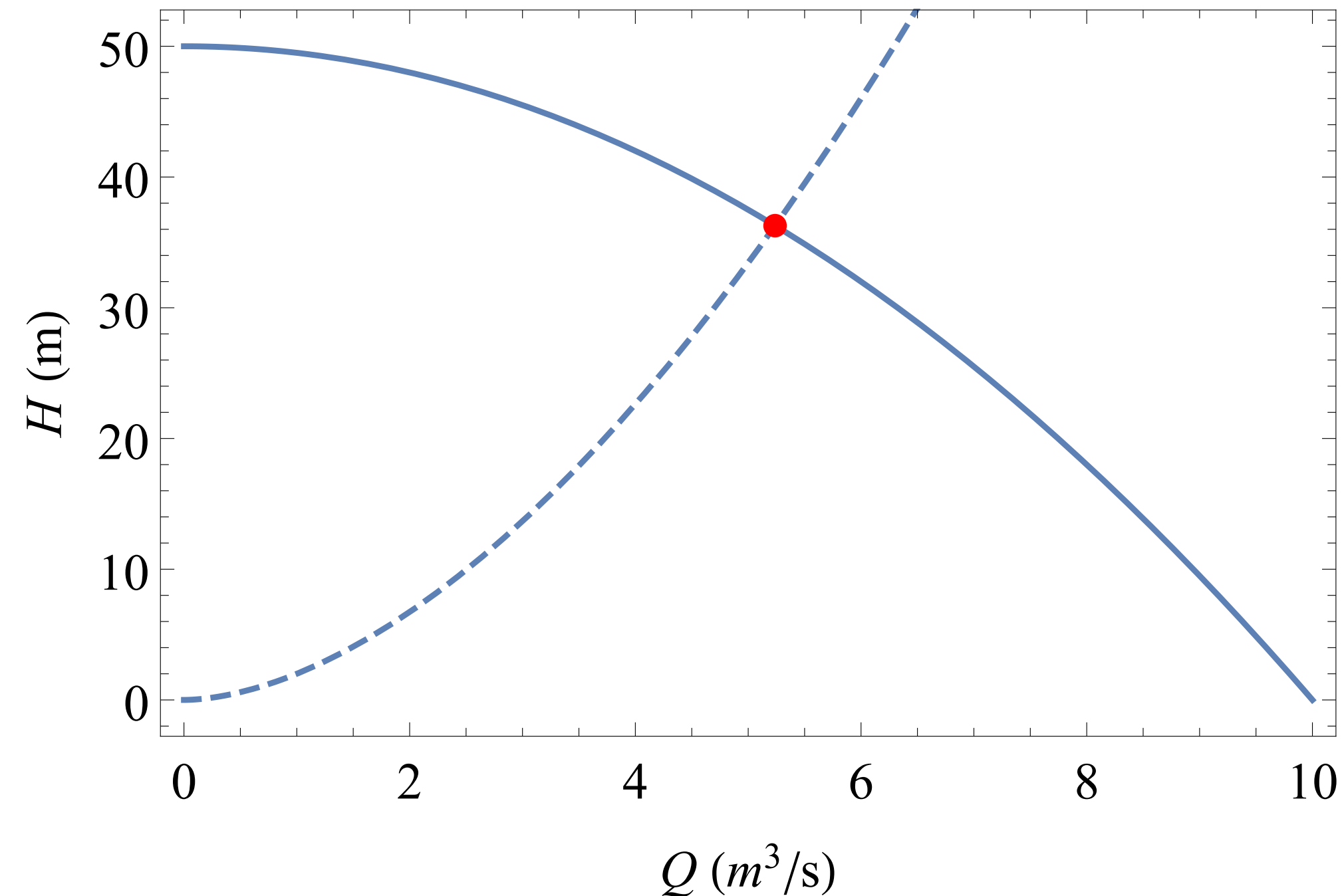
avec  $R$  le rayon de la conduite. Pour un coude sans rayon de courbure, on peut employer la variante suivante :

$$\zeta = \sin^2 \frac{\theta}{2} + 2 \sin^4 \frac{\theta}{2}.$$

Pour un coude à angle vif ( $R_c \rightarrow 0$ ) d'angle  $90^\circ$ , on peut prendre  $\zeta = 1,3$ .



- Une pompe sert à injecter de l'énergie à un écoulement en charge. Elle se caractérise par
1. la courbe caractéristique  $H(Q)$  qui représente l'énergie exprimée en mètre colonne d'eau en fonction du débit. On appelle  $H(0)$  la hauteur de fermeture ;
  2. la puissance utile  $P_u = \rho g Q H(Q)$  la puissance délivrée au fluide par la pompe ;
  3. le rendement global  $\eta = P_u / P$  avec la puissance (électrique ou thermique) qu'il faut fournir à la pompe.



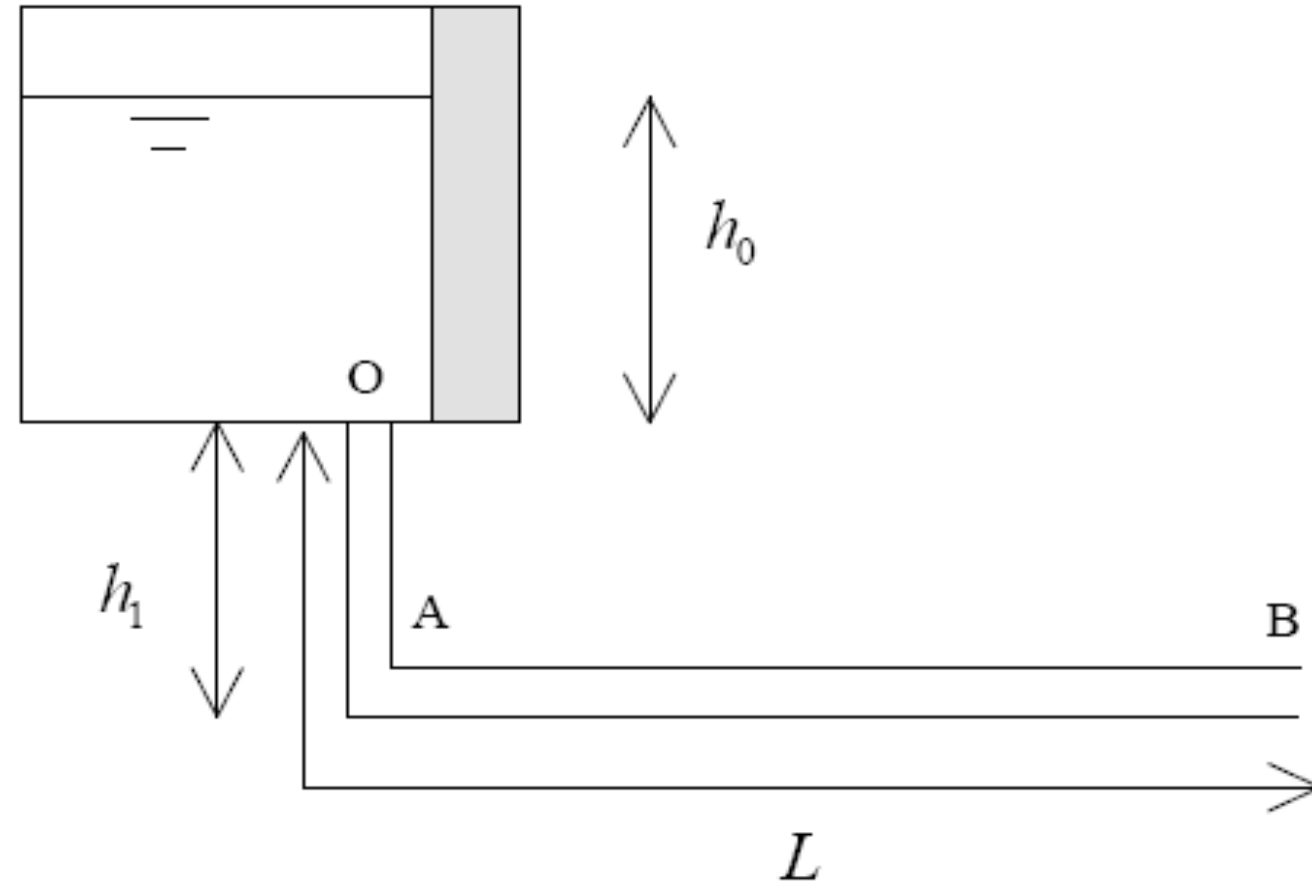
Le point de fonctionnement d'une pompe s'obtient en cherchant le point d'intersection de la courbe de perte de charge d'une conduite (singulière + régulière)

$$\Delta H = \sum_{i=1}^I f \frac{L_i \bar{u}_i^2}{D_i 2g} + \sum_{j=1}^J \zeta_j \frac{\bar{u}_j^2}{2g}$$

et la courbe caractéristique  $H(Q)$ .



# Exemple traité : vidange d'un réservoir



On considère une conduite de vidange d'un barrage de hauteur (d'eau)  $h_0$ . La conduite est lisse et de diamètre  $D$ . Sa longueur totale est  $L$ . La chute de dénivellation est notée  $h_1$ . On cherche à calculer le débit à la sortie de la conduite. On prend  $D = 1$  m,  $L = 1000$  m,  $k_s/D = 10^{-5}$ ,  $h_0 = 10$  m, et  $h_1 = 10$  m.

Si on appliquait Bernoulli (formule de Torricelli), on aurait  $Q = \pi D^2 \sqrt{2g(h_0 + h_1)}/4 = 15,6 \text{ m}^3/\text{s}$ .

# Exemple traité : vidange d'un réservoir



On applique le théorème de Bernoulli généralisé entre la surface libre et la sortie (point B) :

$$H_0 = H_B + \Delta H,$$

où la perte de charge  $\Delta H$  comprend à la fois :

- les pertes de charge réparties

$$\Delta H_r = \frac{\bar{u}^2}{2g} \frac{f}{D} L,$$

- les pertes de charge singulières dues à l'entrée dans la canalisation en O et le coude en A :

$$\Delta H_s = (\zeta_A + \zeta_O) \frac{\bar{u}^2}{2g}.$$

# Exemple traité : vidange d'un réservoir



En détaillant, on a à la surface libre (point O') :

$$H_O = z_O + \frac{\bar{u}^2}{2g} + \frac{p_0}{\rho g} = h_1 + h_0,$$

tandis qu'à la sortie (point B) on a :

$$H_B = z_B + \frac{\bar{u}^2}{2g} + \frac{p_B}{\rho g} = \frac{\bar{u}^2}{2g}.$$

On en déduit que la vitesse moyenne est solution de l'équation :

$$h_1 + h_0 = \frac{\bar{u}^2}{2g} + \frac{\bar{u}^2}{2g} \left( \frac{f}{D} L + \zeta_A + \zeta_O \right).$$

On déduit facilement que :

$$\bar{u} = \left( \frac{2g(h_0 + h_1)}{1 + \frac{f}{D} L + \zeta_A + \zeta_O} \right)^{1/2}.$$

# Exemple traité : vidange d'un réservoir



L'équation est implicite car  $f$  dépend du nombre de Reynolds

$$\bar{u} = \left( \frac{2g(h_0 + h_1)}{1 + \frac{f}{D}L + \zeta_A + \zeta_O} \right)^{1/2}.$$

On prend  $D = 1$  m,  $L = 1000$  m,  $k_s/D = 10^{-5}$ ,  $h_0 = 10$  m, et  $h_1 = 10$  m. On emploie la formule de Colebrook

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -0,91 \ln \left( 0,27 \frac{k_s}{2R} + \frac{2,51}{\sqrt{f}Re} \right).$$

On a vu par ailleurs :  $\zeta_O = 0,5$  et  $\zeta_A = 1,3$ . En résolvant numériquement, on trouve que la vitesse vaut 5,85 m/s, soit un débit de 4,6 m<sup>3</sup>/s. Une grande différence avec le calcul à la Torricelli !

# Exemple traité : remplissage d'un réservoir



Supposons maintenant que l'on veuille pomper de l'eau dans le réservoir. En B, on place une pompe qui aspire l'eau et la remonte dans le réservoir. Quelle est la puissance fournie par la pompe et quel est le débit si sa courbe caractéristique est  $H_p = 70 - Q^2/2$  ?

Si on néglige la perte de charge singulière de la pompe, alors la perte de charge de la conduite que doit compenser la pompe est

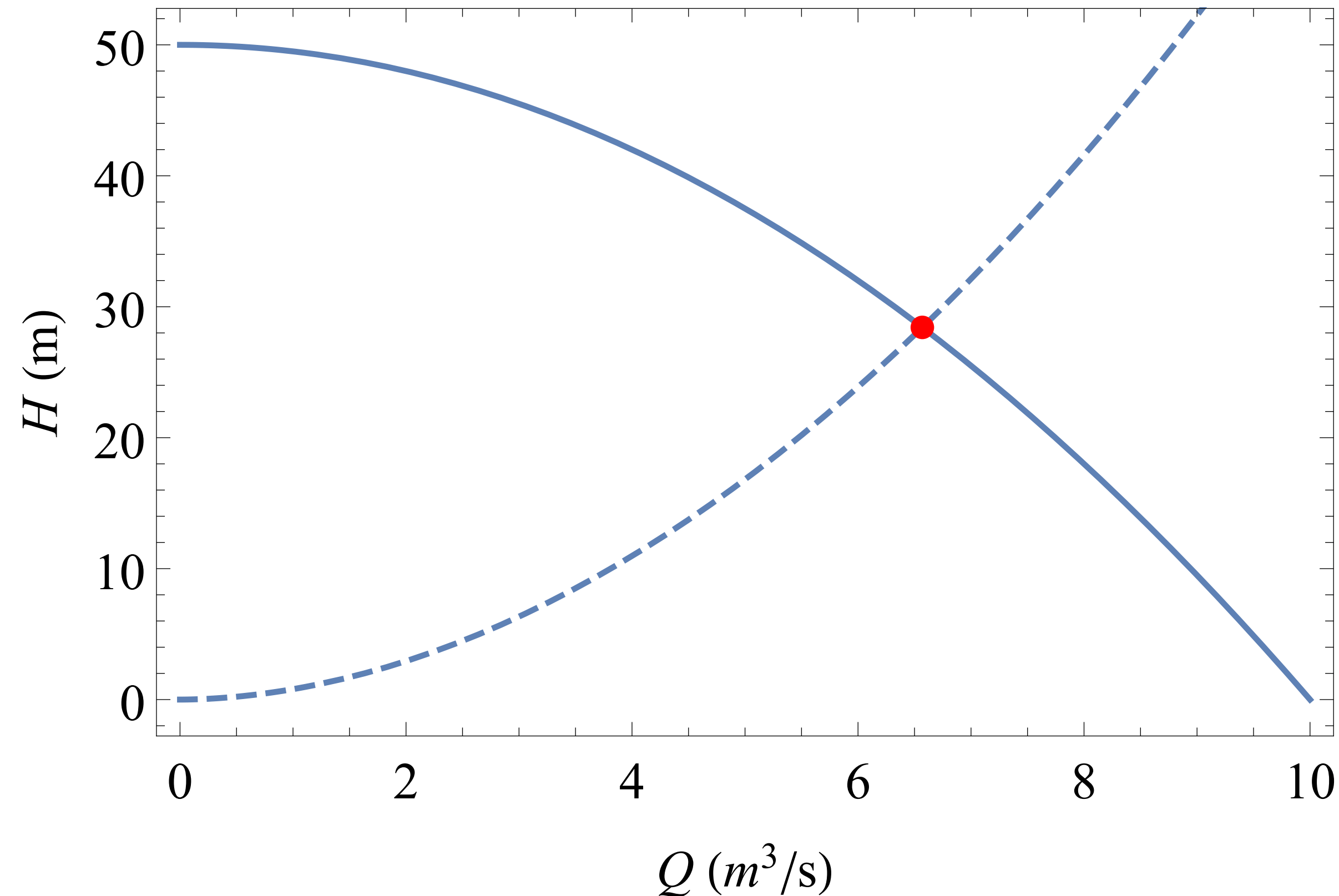
$$\Delta H(Q) = \left( \frac{f}{D} L + \zeta_A + \zeta_O \right) \frac{4Q^2}{2g\pi D^2}.$$

La seule difficulté ici est que le coefficient de frottement  $f$  est une fonction implicite de  $Q$ . Le point de fonctionnement est obtenu en recherchant le point d'intersection :

$$H_p(Q) = \Delta H(Q) + H_O - H_A.$$



# Exemple traité : remplissage du réservoir



Si on prend la même vitesse en O et A, et une pression atmosphérique en A, alors  $H_O - H_A = 20$  m.

On trouve :  $Q_{\text{fonc}} = 6,6 \text{ m}^3/\text{s}$  et  $H_p(Q_{\text{fonc}}) = 28,4$  m. La puissance fournie par la pompe est

$$P_u = \rho Q_{\text{fonc}} g H_p(Q_{\text{fonc}}), \text{ soit}$$

$$P_u = 1,83 \text{ MW}.$$



1. Dans un écoulement en charge, peut-on négliger la pression hydrostatique ?
  - oui elle est faible par rapport à la pression cinétique.
  - cela dépend des problèmes.
2. Une conduite dont les parois sont rugueuses dissipe plus d'énergie qu'une conduite lisse ?
  - oui, la rugosité accentue toujours la dissipation d'énergie.
  - il n'y a pas d'effet de la rugosité sur l'écoulement si l'écoulement est laminaire.