



Mécanique des fluides

Compléments mathématiques et physiques

Christophe ANCEY

C. ANCEY,
EPFL, ENAC/IIC/LHE,
Ecublens, CH-1015 Lausanne, Suisse
christophe.ancey@epfl.ch, lhe.epfl.ch



Compléments du cours de mécanique des fluides / C. ANCEY

version 2.1 du 22 janvier 2024, Lausanne



Attribution : pas d'utilisation commerciale, pas de modification, 3.0. [Licence Creative Common 3.0](#). Ce travail est soumis aux droits d'auteurs. Tous les droits sont réservés ; toute copie, partielle ou complète, doit faire l'objet d'une autorisation de l'auteur. La gestion typographique a été réalisée à l'aide du package *efrench* de Bernard GAULLE. Tous les clichés sont de Christophe Ancey sauf mention contraire.

Crédit des illustrations. Première de couverture : l'Orbe à Orbe (VD). **Table des matières :** Giovanni Battista Piranesi, arche gothique d'une prison imaginaire, 1761, musée de Stuttgart. **Chapitres 1 à 3 :** Raoul Dufy, la fée électricité, musée d'art moderne de Paris, 1937. **Bibliographie :** Pablo Picasso, déjeuner sur l'herbe, 1961, musée de Stuttgart. **Index :** Rudolf Jahns, Häuser an der Steilküste von Boulogne-sur-Mer, 1931, Städel, Francfort.



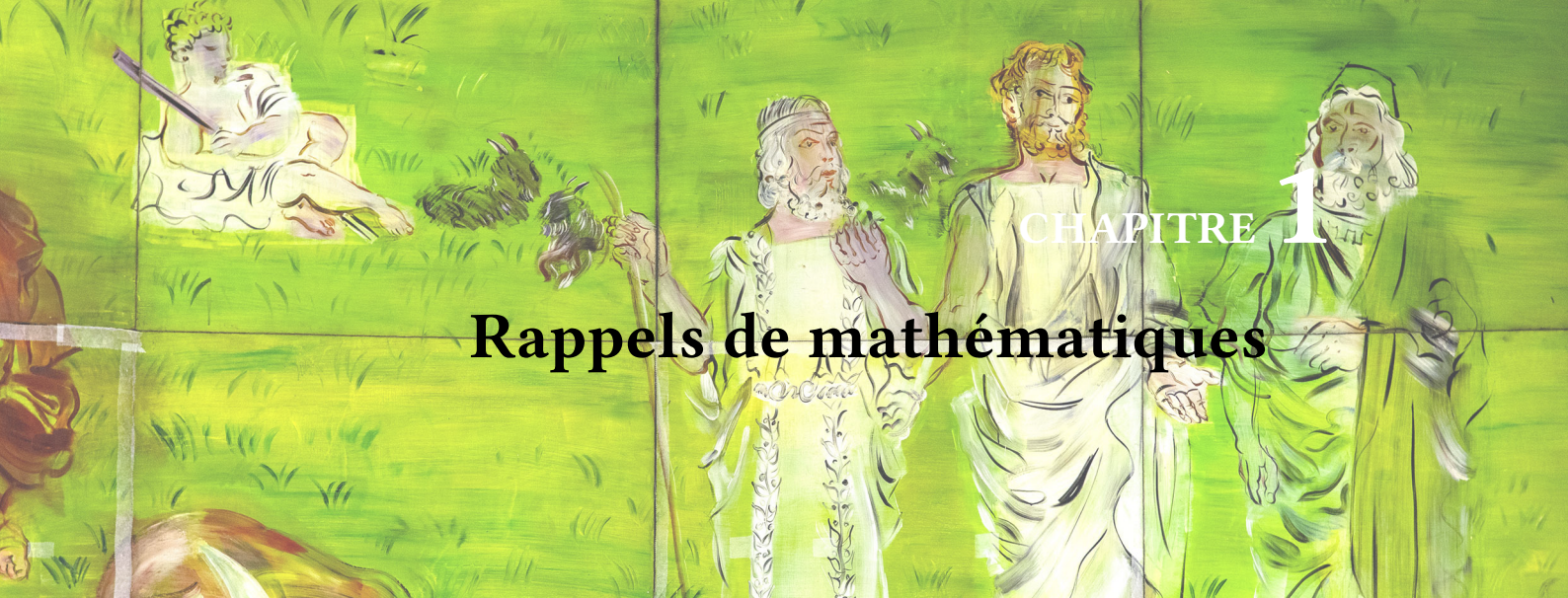
Table des matières

Table des matières

iii

1	Rappels de mathématiques	1
1.1	Scalaire, vecteurs, et tenseurs	1
1.1.1	Coordonnées cartésiennes, cylindriques, et sphériques	2
1.1.2	Produits	4
1.1.3	Surface et calcul de surface	6
1.1.4	Calcul des volumes	7
1.2	Quelques opérateurs	8
1.2.1	Opérateur gradient	8
1.2.2	Opérateur divergence	9
1.2.3	Opérateur laplacien	11
1.2.4	Dérivée totale ou dérivée matérielle ou dérivée particulaire . . .	12
1.2.5	Quelques relations sur les opérateurs	14
2	Rappels de mécanique des milieux continus	15
2.1	Quelques éléments de cinématique	15
2.1.1	Description eulérienne ou lagrangienne	15
2.2	Trajectoires et lignes de courant	17
2.2.1	Écoulement permanent	18
2.2.2	Écoulement non permanent	18
2.3	Déformation et rotation d'un volume de fluide	19
2.3.1	Principe	19
2.3.2	Écriture matricielle des tenseurs de déformation	22
2.3.3	Interprétation des taux de dilatation et de cisaillement	23
2.3.4	Interprétation de la vitesse de rotation	25
2.4	Quelques éléments de dynamique	26
2.4.1	Types de force	26
2.4.2	Tenseurs des contraintes et des extra-contraintes	27
2.4.3	Interprétation	28
2.5	Synthèse : équations de Navier–Stokes dans différents systèmes	30
2.5.1	Coordonnées cartésiennes	30
2.5.2	Coordonnées cylindriques	31
3	Propriétés thermodynamiques	33
3.1	Premier et second principes	33

3.2	Chaleurs spécifiques	34
3.3	Chaleur latente	35
3.4	Vaporisation et cavitation	37
Bibliographie		39
Bibliographie		39



CHAPITRE 1

Rappels de mathématiques

1.1 scalaire, vecteurs, et tenseurs

En mécanique, on se sert de variables appelées *tenseurs* (de différentes dimensions) pour décrire des phénomènes physiques :

- une grandeur *scalaire* est une quantité représentée par un réel. Sa dimension est 0 : on dit aussi qu'un scalaire est un tenseur d'ordre 0. La différence entre nombre réel et nombre scalaire est qu'un scalaire est indépendant de la base physique dans lequel on l'exprime. Par exemple, la vitesse a une valeur réelle, mais n'est pas un scalaire car elle varie selon le référentiel dans lequel on fait la mesure. La masse d'un objet est invariante (sa valeur ne dépend pas du repère dans lequel on fait la mesure) : c'est donc une grandeur scalaire ;
- une grandeur vectorielle ou *vecteur* est représentée dans l'espace par un segment orienté ayant pour extrémités un point de départ et un point d'arrivée. L'emplacement dans le plan ou l'espace n'a pas d'importance car seuls comptent sa longueur, sa direction, et son sens. Un vecteur est un tenseur de dimension 1 ;
- un *tenseur* est une fonction multilinéaire. Un tenseur est défini par son ordre, c'est-à-dire le nombre d'indices nécessaire pour le définir. Parmi les tenseurs les plus utiles, il y a les tenseurs d'ordre 2, dont les composantes dans une base donnée forment une *matrice* ; par exemple, un tenseur T d'ordre 2 permet de relier deux vecteurs a et b de façon linéaire : $a = T \cdot b$. Dans une base particulière, si $a = (x_a, y_a)$, $b = (x_b, y_b)$, alors

$$\begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_a = m_{11}x_b + m_{12}y_b, \\ y_a = m_{21}x_b + m_{22}y_b, \end{cases}$$

avec m_{ij} la matrice M composantes de T dans la base choisie. Rappelons que la notation m_{ij} désigne la composante occupant la ligne i et la colonne j dans la matrice M . La notion de tenseur se généralise à des formes n -linéaires pour former des tenseurs d'ordre n . Par exemple, un tenseur d'ordre 3 permet de décrire des relations multilinéaires entre des tenseurs d'ordre 2.

Un *champ tensoriel* est un tenseur, dont les composantes varient dans l'espace.

1.1.1 Coordonnées cartésiennes, cylindriques, et sphériques

Le plus souvent, on se sert de l'un des trois systèmes orthonormés suivants :

- coordonnées cartésiennes (x, y, z) : voir figure 1.1 ;
- coordonnées cylindriques $(r = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \arctan(y/x), z)$: voir figure 1.2 ;
- coordonnées sphériques $(x = r \cos \varphi \sin \theta, y = r \sin \varphi \sin \theta, z = r \cos \theta)$ avec $0 \leq \theta \leq \pi$ et $-\pi \leq \varphi \leq \pi$: voir figure 1.3.

Pour des applications particulières, on peut être amené à utiliser des repères curvilignes plus complexes.

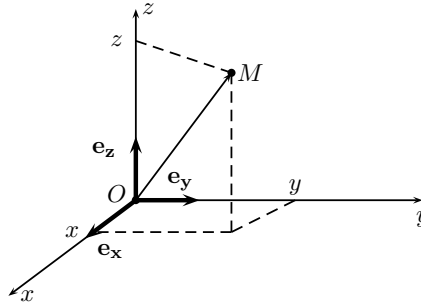


Figure 1.1 – Représentation d'un point dans un système de coordonnées cartésiennes.

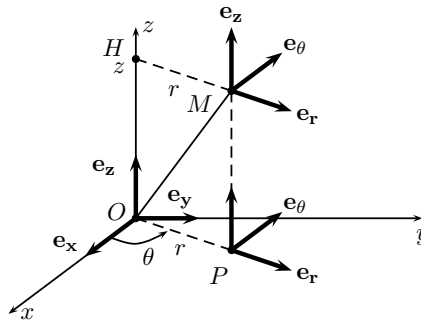


Figure 1.2 – Représentation d'un point dans un système de coordonnées cylindriques.

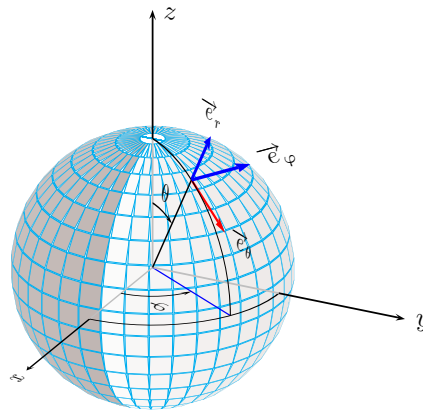


Figure 1.3 – Représentation d'un point dans un système de coordonnées sphériques.

1.1.2 Produits

À partir de deux tenseurs, on peut réaliser une multitude d'opérations. Les plus simples sont les opérations d'addition et multiplication par un scalaire. On dispose également de plusieurs produits entre grandeurs tensorielles. Si de façon générique, on note le produit entre des tenseurs $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, et $\mathbf{c}$ à l'aide du symbole $\star$, alors l'opération « produit » vérifie une ou plusieurs des règles suivantes :

- opération commutative : $\mathbf{a} \star \mathbf{b} = \mathbf{b} \star \mathbf{a}$;
- opération associative : $\mathbf{a} \star (\mathbf{b} \star \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \star \mathbf{b}) \star \mathbf{c}$;
- opération distributive : $(\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}) \star \mathbf{c} = \lambda \mathbf{a} \star \mathbf{c} + \mu \mathbf{b} \star \mathbf{c}$ pour tous scalaires λ et μ .

Ainsi pour l'addition de tenseurs, les trois propriétés sont vérifiées.

Produit scalaire

Le *produit scalaire* de deux vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ est noté $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$. C'est une application linéaire d'un espace $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$) vers $\mathbb{R}$. Du point de vue algébrique, si $\mathbf{a} = (x_a, y_a)$, $\mathbf{b} = (x_b, y_b)$ sont les composantes de $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ dans une base orthonormée, alors

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = x_a x_b + y_a y_b.$$

Le produit scalaire est commutatif et distributif, mais n'est pas associatif.

La norme d'un vecteur est ainsi : $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{x_a^2 + y_a^2}$. Du point de vue géométrique, le produit scalaire est relié à l'angle α entre les deux vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ de la façon suivante

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \alpha.$$

On retiendra la propriété importante : deux vecteurs orthogonaux $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ ont un produit scalaire nul $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

Le produit scalaire peut s'appliquer à des tenseurs d'ordre quelconque ; on l'appelle alors parfois *produit simplement contracté* ou *produit contracté une fois*. Le produit scalaire de deux tenseurs est un tenseur d'ordre égal à la somme des ordres des termes moins 2. Par exemple, si on introduit un tenseur $\mathbf{T}$ d'ordre 2 reliant deux vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ de façon linéaire : $\mathbf{a} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{b}$, l'opération s'apparente bien à un produit scalaire car on bien $\text{ord}(\mathbf{a}) = 1 = \text{ord}(\mathbf{T}) + \text{ord}(\mathbf{b}) - 2$.

En mécanique, le produit tensoriel est d'usage courant. Par exemple, la puissance P d'une masse ponctuelle m animée d'une vitesse $\mathbf{v}$ et soumise à une force $\mathbf{f}$ est : $P = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}$; son énergie cinétique est $E_c = \frac{1}{2} m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2} m |\mathbf{v}|^2$.

Produit vectoriel

Le *produit vectoriel* est une opération vectorielle (dans des espaces euclidiens orientés) de dimension 3. Le produit vectoriel de deux vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ est noté de différentes façons selon les milieux : $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$, ou bien $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$. Si $\mathbf{a} = (x_a, y_a, z_a)$, $\mathbf{b} = (x_b, y_b, z_b)$, alors

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} y_a z_b - z_a y_b \\ z_a x_b - x_a z_b \\ x_a y_b - y_a x_b \end{pmatrix}.$$

Géométriquement, le produit vectoriel est également relié à l'angle orienté α entre les deux vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ de la façon suivante

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \alpha.$$

Le vecteur $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ est normal au plan formé par les deux vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ sous réserve que ceux-ci ne soient pas colinéaires sinon $\mathbf{c} = 0$. Le produit vectoriel est distributif, mais n'est ni commutatif, ni associatif. Ainsi, contrairement au produit scalaire, l'ordre des termes dans le produit vectoriel a son importance : $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$. De même, on a

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}.$$

Produit tensoriel

On introduit le *produit tensoriel* (appelé encore produit dyadique) de deux vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ comme la construction d'un tenseur d'ordre $n + m$ à partir de deux tenseurs d'ordre n et m . Le produit tensoriel est noté $\mathbf{ab}$ ou bien $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$.

Lorsque $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ sont des vecteurs, c'est un opérateur linéaire qui a tout vecteur $\mathbf{n}$ lui associe un autre vecteur tel que :

$$(\mathbf{ab})\mathbf{n} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n})\mathbf{a}.$$

Cet opérateur peut donc être représenté par une matrice si l'on se place dans un repère cartésien (ou dans d'autres types de repère). Par exemple, en dimension 2, on a :

$$(\mathbf{ab}) = \begin{bmatrix} x_a x_b & x_a y_b \\ y_a x_b & y_a y_b \end{bmatrix},$$

avec $\mathbf{a} = (x_a, y_a)$ et $\mathbf{b} = (x_b, y_b)$.

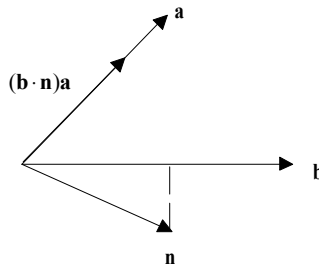


Figure 1.4 – Produit tensoriel.

Le produit tensoriel de deux vecteurs se rencontre fréquemment en mécanique ; par exemple, dans un fluide dont la vitesse locale est $\mathbf{v}$, on peut construire un tenseur d'inertie $\mathbf{vv}$, qui apparaît dans le terme de convection de l'équation de Navier-Stokes.

1.1.3 Surface et calcul de surface

Définitions

Une surface dans un espace de dimension 3 peut être représentée par des équations de différente forme :

- équation *explicite*: si la surface a une équation de la forme $z = f(x, y)$, alors on dit que l'équation est explicite car z est entièrement déterminé par la relation $f(x, y)$.
- équation *implicite*: si la surface a une équation de la forme $\phi(x, y, z) = 0$, alors on dit que l'équation est implicite car z (ou toute autre variable) n'est entièrement déterminé de façon explicite par rapport à x et y .

Notons qu'une équation explicite $z = f(x, y)$ peut être transformée en équation implicite en posant $\phi = z - f(x, y)$. La réciproque n'est pas vraie.

Le calcul d'une surface S passe par la définition de l'élément infinitésimal de surface dS :

$$S = \int_S dS.$$

Il faut distinguer les éléments infinitésimaux (voir figure 1.5):

- sur des surfaces planes; dans ce cas, on a: $\delta^2 S = dS = dx dy$ (coordonnées cartésiennes) ou bien $dS = r dr d\theta$ (coordonnées polaires). On emploie ici $\delta^2 S$ pour indiquer que la surface élémentaire est le produit de deux incréments de longueur;
- sur des surfaces de révolution, c'est-à-dire des surfaces obtenues par rotation d'une courbe autour d'un axe de symétrie: $\delta^2 S = dS = R d\theta d\ell$, avec $d\ell$ un incrément de longueur et R la longueur (rayon puisqu'il s'agit d'une rotation) séparant l'élément infinitésimal de l'axe de symétrie. Une sphère par exemple est obtenue par rotation d'un cercle autour d'un diamètre. On peut aussi utiliser les coordonnées sphériques: $dS = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$ sur une sphère de rayon r .

Une surface peut également être obtenue par translation d'un profil curviligne.

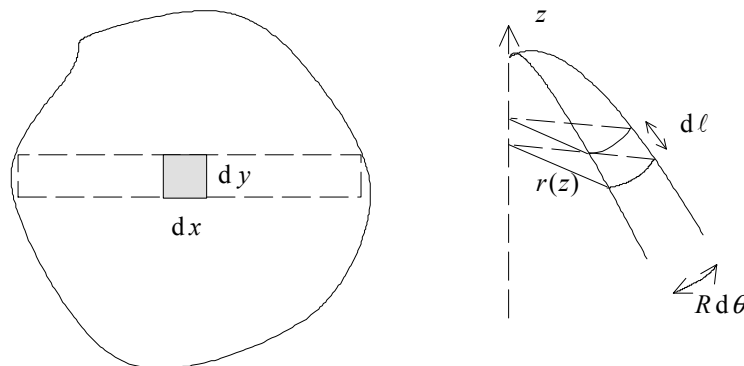


Figure 1.5 – Deux cas différents de surface infinitésimale.

Surface plane

Une méthode qui marche souvent est de décomposer la surface à mesurer en bandes-lettres. Sur la figure 1.5, cela revient à étendre la surface $\delta^2 S$ par intégration le long de l'axe x (jusqu'à atteindre les limites de la surface). L'élément d'intégration sera alors de la forme $dS = \ell(y)dy$, avec $\ell(y)$ la longueur de la bande à l'altitude y .

Surface de révolution

Pour une surface de révolution, il faut calculer la longueur incrémentale $d\ell$. On a : $d\ell^2 = dx^2 + dy^2$. Soit encore : $d\ell = dx\sqrt{1 + f'^2(x)}$. Lorsque la surface fait une révolution complète ($\theta = 2\pi$), on a intérêt à faire le calcul sur une bandelette annulaire de périmètre $2\pi r(z)$ (voir la figure 1.5). La surface d'intégration $dS = 2\pi r(z)d\ell = 2\pi r(z)dz\sqrt{1 + f'^2(z)}$.

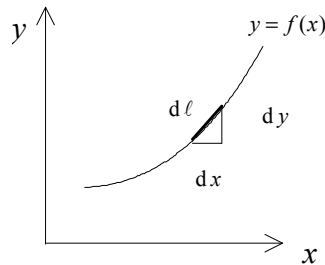


Figure 1.6 – Calcul du $d\ell$.

Le cas des surfaces orientées

Pour certains calculs, on a besoin de calculer $dS\mathbf{n}$, avec $\mathbf{n}$ la normale orientée de « l'intérieur vers l'extérieur » (la notion d'intérieur ne sera pas abordée ici). On rappelle ici juste la manière de calculer la normale $\mathbf{n}$ pour une courbe $y = f(x)$. La tangente est portée par le vecteur $\mathbf{t} = (1, f'(x))$. Un vecteur perpendiculaire est par exemple $\mathbf{p} = (f'(x), -1)$ car on a $\mathbf{p} \cdot \mathbf{t} = 0$. On définit la normale comme un vecteur perpendiculaire unitaire : $\mathbf{n} = \mathbf{p}/|\mathbf{p}| = (f'(x), -1)/\sqrt{1 + f'^2}$.

1.1.4 Calcul des volumes

Le calcul des volumes nécessite de calculer un volume infinitésimal selon le système de coordonnées choisi :

- coordonnées cartésiennes : $dV = dx dy dz$;
- coordonnées cylindriques : $dV = r dr d\theta dz$;
- coordonnées sphériques : $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$.

1.2 Quelques opérateurs

Pour se simplifier la vie, le physicien aime réduire la taille des équations. Il introduit pour cela des « opérateurs », c'est-à-dire des ensembles d'opérations différentielles groupés génériquement sous un seul terme. Ces opérateurs ont également des significations physiques.

1.2.1 Opérateur gradient

Le plus simple et le plus connu est l'opérateur *gradient* noté *grad* ou ∇ (appelé symbole *nabla*), qui à une fonction f lui associe le vecteur composé de toutes ses dérivées partielles. Par exemple si $f(x, y, z)$, alors :

$$\text{grad} f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right).$$

♣ **Exemple.** – Considérons $f(x, y; t) = xt + x^2y/t$. On trouve que le gradient de $f = xt + \frac{x^2}{t}y$ est le vecteur :

$$\text{grad} f = \left(t + 2\frac{x}{t}y, \frac{x^2}{t} \right).$$

□

Notons que :

- **Attention** dans l'exemple ci-dessus le gradient a concerné les variables d'espace x, y et non de temps t car en mécanique, l'opérateur gradient ne s'applique le plus souvent qu'aux variables spatiales ; dans ce cas :

$$\nabla f(x, y; t) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

On a mis un « ; » dans la liste des variables de la fonction pour séparer variables d'espace et de temps.

- Les expressions ci-dessus ne sont valables qu'en coordonnées cartésiennes. En coordonnées cylindriques (r, θ, z) , il faut employer :

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

- On a la relation :

$$\boxed{df(\mathbf{x}) = \text{grad} f \cdot d\mathbf{x}}$$

ce qui permet pour les plus téméraires d'introduire la dérivée selon un vecteur : $\text{grad} f = df(\mathbf{x})/d\mathbf{x}$.

- L'effet de l'opérateur gradient sur un objet de dimension n est d'obtenir un objet de dimension $n + 1$.
- On peut étendre la définition à un *champ vectoriel* ; par exemple si $\mathbf{u} = (a(x, y), b(x, y))$, alors

$$\text{grad} \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial a}{\partial x} & \frac{\partial a}{\partial y} \\ \frac{\partial b}{\partial x} & \frac{\partial b}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Physiquement, l'opérateur gradient sert dès lors qu'on a besoin de généraliser la notion de dérivée à des problèmes à plusieurs variables d'espace. Par exemple, dans un problème scalaire, le gradient de température T est noté $\partial T / \partial x$. Pour un problème dans l'espace, le gradient sera ∇T . C'est ainsi que la loi de Fourier qui lie le *flux de chaleur* au gradient s'écrit

$$j_Q = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x},$$

pour un problème unidirectionnel (transmission de chaleur dans un tube par exemple), mais dans le cas général s'écrit

$$\mathbf{j}_Q = -\kappa \nabla T,$$

avec κ la conductibilité thermique. Notons au passage que le flux de chaleur dans un problème tridimensionnel est un vecteur.

Quelques développements avec l'opérateur gradient :

- gradient d'un produit de 2 fonctions (cela donne un vecteur)

$$\text{grad}(fg) = g \text{ grad } f + f \text{ grad } g.$$

- gradient d'un produit d'une fonction et d'un vecteur (cela donne une matrice)

$$\text{grad}(f\mathbf{u}) = \mathbf{u} \text{ grad } f + f \text{ grad } \mathbf{u}.$$

- gradient d'un produit scalaire (cela donne un vecteur)

$$\text{grad}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \text{ grad } \mathbf{v} + \mathbf{v} \text{ grad } \mathbf{u} + \mathbf{u} \times (\text{rot } \mathbf{v}) + \mathbf{v} \times (\text{rot } \mathbf{u}),$$

où $\times$ représente le produit vectoriel et rot l'opérateur rotationnel.

1.2.2 Opérateur divergence

Un autre opérateur est la *divergence*, notée div ou $\nabla \cdot$ (faire bien attention au point en position centrale après le symbole), qui à un vecteur $\mathbf{u}$ lui associe la fonction résultant de la somme des dérivées partielles de ses composantes. Par exemple si on écrit

$$\mathbf{u} = (a(x, y, z), b(x, y, z), c(x, y, z)),$$

alors :

$$\text{div} \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z}.$$

♣ **Exemple.** – Reprenant l'exemple précédent, on trouve que la divergence du gradient de $f(x, y; t) = xt + \frac{x^2}{t}y$ est la fonction :

$$\text{div}(\text{grad } f) = \frac{\partial}{\partial x} \left(t + 2\frac{x}{t}y \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x^2}{t} \right) = \frac{2y}{t}.$$

□

Physiquement, l'opérateur divergence apparaît fréquemment dans les problèmes de flux d'une quantité à travers une surface ou un volume. Considérons en effet le flux d'une

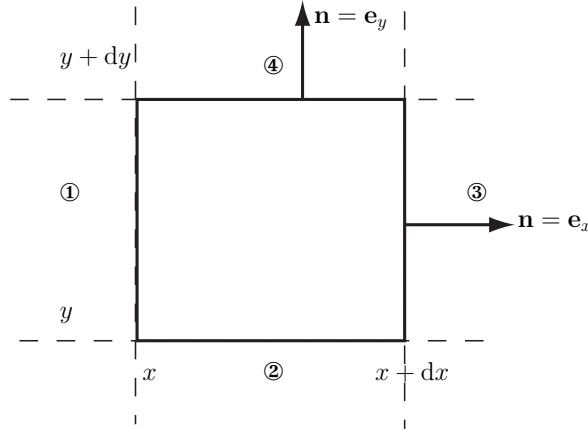


Figure 1.7 – flux à travers une surface de contrôle.

quantité $\mathbf{f}$ de composantes $(a(x, y), b(x, y))$ à travers la surface S entourant un petit volume infinitésimal $dx dy$ (voir figure 1.7). Ce flux se définit comme

$$\Phi = \int_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dS,$$

avec $\mathbf{n}$ la normale à la surface. Ici, cette définition peut donner lieu à une décomposition sur chacune des facettes. On a ainsi

$$\Phi = - \int_1 \mathbf{f} \cdot \mathbf{e}_x dS + \int_3 \mathbf{f} \cdot \mathbf{e}_x dS - \int_2 \mathbf{f} \cdot \mathbf{e}_y dS + \int_4 \mathbf{f} \cdot \mathbf{e}_y dS.$$

Prenons les deux premiers termes du membre de droite, on a

$$- \int_1 \mathbf{f} \cdot \mathbf{e}_x dS + \int_3 \mathbf{f} \cdot \mathbf{e}_x dS = \int_y^{y+dy} (a(x+dx, y) - a(x, y)) dy = \frac{\partial a}{\partial x} dx dy + o(dx dy).$$

On fait de même avec les deux derniers termes et on additionne les quatre termes pour obtenir l'approximation

$$\Phi = \left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} \right) dx dy + o(dx dy) \approx \nabla \cdot \mathbf{f} dx dy.$$

On voit donc que le flux de $\mathbf{f}$ équivaut au terme de divergence multiplié par le volume (ici une surface) du volume de contrôle $dx dy$. Le résultat important à retenir est la relation entre flux et opérateur divergence. On peut démontrer un théorème dit de *Green-Ostrogradski* qui généralise ce résultat. Le théorème de Green-Ostrogradski (appelé encore théorème de la divergence) énonce le résultat suivant

$$\boxed{\int_V \operatorname{div} \mathbf{u} dV = \int_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS.}$$

Un corollaire du théorème de Green-Ostrogradski est le suivant

$$\int_V \operatorname{grad} f dV = \int_S f \mathbf{n} dS.$$

Quelques relations utiles de composition avec l'opérateur divergence :

- divergence du produit d'un champ scalaire et d'un champ vectoriel (cela donne un scalaire)

$$\operatorname{div}(f\mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} f + f \operatorname{div} \mathbf{u}.$$

- divergence du produit d'un champ vectoriel et d'un tenseur d'ordre 2 (matrice) (cela donne un scalaire)

$$\operatorname{div}(\mathbf{A}\mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \operatorname{div} \mathbf{A} + \mathbf{A} : \operatorname{grad} \mathbf{u},$$

où le symbole ':' représente le double produit contracté :

$$\mathbf{A} : \operatorname{grad} \mathbf{u} = \operatorname{trace}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}).$$

1.2.3 Opérateur laplacien

Le dernier opérateur est le *laplacien*, noté¹ Δ , soit encore

$$\Delta f(x, y, z) = \nabla \cdot \nabla f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$$

en coordonnées cartésiennes.

Physiquement, cet opérateur se rencontre chaque fois que l'on fait un calcul de flux avec une quantité qui dérive d'une gradient. Par exemple, on a vu plus haut que le flux de température était relié au gradient *via* la loi de Fourier. Un simple bilan d'énergie permet d'écrire que l'accroissement de chaleur (énergie) par unité de temps doit correspondre à la variation de ce qui entre et de ce qui sort d'un certain volume (c'est-à-dire le flux de chaleur) s'il n'y a pas de création de chaleur.

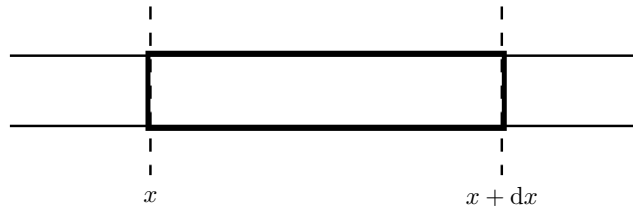


Figure 1.8 – Transmission de chaleur dans un barreau.

En dimension 1 (problème scalaire), cela s'énonce

$$\varrho c \frac{\partial T}{\partial t} dx = - \frac{\partial j_Q}{\partial x} dx,$$

accroissement de chaleur par unité de temps = flux de chaleur,

avec c la chaleur massique, ϱ la masse volumique ; le bilan est fait pour un barreau de largeur unitaire dans la direction x et de longueur infinitésimale dx . On aboutit finalement à l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2},$$

avec $\alpha = \kappa / (\varrho c)$. La généralisation à un espace à deux ou trois dimensions ne pose pas de problème ; on a

$$\varrho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{j}_Q = \kappa \nabla \cdot \nabla T = \kappa \Delta T.$$

1. noté également ∇^2 car $\Delta f = \nabla \cdot \nabla f$

1.2.4 Dérivée totale ou dérivée matérielle ou dérivée particulière

Jusqu'à présent, il n'y a pas eu de difficultés particulières puisque le calcul différentiel considère tour à tour chacune des variables en prenant toutes les autres constantes, puis on différentie par rapport à cette variable, ainsi de suite. Plus difficile est le cas où les variables ne sont plus indépendantes, mais dépendantes. C'est ce cas qui sera le plus fréquent en mécanique des fluides.

On appelle *dérivée matérielle* (appelée encore *dérivée particulière* ou *dérivée totale* par rapport au temps ou *dérivée de Lagrange*) d'une fonction $f(x, y, z, t)$ la quantité suivante (dans le cas de coordonnées cartésiennes)

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z} = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial t}}_{\text{dérivée locale}} + \underbrace{\mathbf{u} \cdot \nabla f}_{\text{terme d'advection}},$$

avec (u, v, w) les coordonnées de la vitesse locale. Notons que certains auteurs emploient parfois le signe $D()/Dt$ pour $d()/dt$ pour mettre l'accent sur le fait qu'il s'agit d'une dérivée matérielle, mais l'emploi de $d()/dt$ est tout aussi logique car, en fin de compte, si x et y sont des fonctions de t , alors f n'est qu'une fonction de t et cela a un sens de parler de df/dt .

♣ **Exemple.** – Considérons le cas :

$$f(x, y, z) = xz + \frac{x^2}{z}y$$

Si les variables sont indépendantes, on a :

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = z + 2\frac{x}{z}y,$$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = 0 + \frac{x^2}{z},$$

$$f_z = \frac{\partial f}{\partial z} = x - \frac{x^2}{z^2}y,$$

et la différentielle totale s'écrit :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = \left(z + 2\frac{x}{z}y\right)dx + \frac{x^2}{z}dy + \left(x - \frac{x^2}{z^2}y\right)dz.$$

Admettons maintenant qu'il y ait une dépendance de x, y, z en fonction de t . On peut définir une nouvelle dérivée par rapport au temps sous la forme :

$$\frac{df}{dt},$$

qui n'est généralement pas égale à $\partial f/\partial t$. Pour preuve, divisons l'expression donnant df par dt :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \left(z + 2\frac{x}{z}y\right) \frac{dx}{dt} + \frac{x^2}{z} \frac{dy}{dt} + \left(x - \frac{x^2}{z^2}y\right) \frac{dz}{dt}.$$

Cette relation vaut $\partial f / \partial t$ uniquement lorsque $dx/dt = 0$, $dy/dt = 0$, et $dz/dt = 0$ c'est-à-dire lorsque les variables x , y , et z sont indépendantes de t . Considérons maintenant un exemple où il y a une dépendance de la forme :

$$x(t) = t, y(t) = t^2 \text{ et } z(t) = t.$$

On a donc :

$$\frac{dx}{dt} = 1 \text{ et } \frac{dy}{dt} = 2t.$$

On tire :

$$\frac{df}{dt} = \left(t + 2\frac{t}{t}t^2 \right) + \frac{t^2}{t}2t + \left(t - \frac{t^2}{t^2}t^2 \right) = 2t + 3t^2.$$

Notons que si on remplace x , y , et z par leur expression dans $f(x, y, z) = xz + \frac{x^2}{z}y$, on a : $f(t) = t^2 + t^3$, dont la dérivée donne bien : $f'(t) = 2t + 3t^2$. $\square$

Physiquement, l'opérateur de dérivée matérielle joue un très grand rôle en mécanique des fluides puisqu'on ne suit pas individuellement toutes les particules du fluide, mais qu'on regarde ce qui se passe localement (description dite eulérienne du mouvement). Considérons ainsi la composante u du champ de vitesse $\mathbf{u} = (u, v, w)$. On se place à un endroit repéré par le point $M(x, y, z)$. Dans un voisinage infinitésimal autour de ce point passent des particules. Ainsi une particule en M à l'instant t sera en M' ($x + u\delta t$, $y + v\delta t$, $z + w\delta t$) à l'instant $t + \delta t$ et elle aura la vitesse $(u + \delta u, v + \delta v, w + \delta w)$. L'accélération selon la direction x au point M est donc

$$a_x = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta u}{\delta t} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla u.$$

On fait de même avec les autres composantes. L'accélération locale au point M est donc la somme de l'accélération locale des particules et d'un terme non linéaire $+\mathbf{u} \cdot \nabla u$ qui est le taux de convection de u , c'est-à-dire le taux de variation de u dans l'espace. On parle également d'advection pour qualifier ce terme. Transport par convection ou advection signifie ici la même chose.

La dérivée matérielle s'exprime différemment dans chaque système de coordonnées

– coordonnées cartésiennes (x, y, z) , on a

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}, \\ a_y &= \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z}, \\ a_z &= \frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned}$$

– coordonnées cylindriques (r, θ, z) , on a

$$\begin{aligned} a_r &= \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v^2}{r} + w \frac{\partial u}{\partial z}, \\ a_\theta &= \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{uv}{r} + w \frac{\partial v}{\partial z}, \\ a_z &= \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + w \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned}$$

1.2.5 Quelques relations sur les opérateurs

Les relations suivantes peuvent être utiles :

$$\begin{aligned}
 \nabla(fg) &= g\nabla f + f\nabla g, \\
 \nabla \cdot (f\mathbf{a}) &= \mathbf{a} \cdot \nabla f + f\nabla \cdot \mathbf{a}, \\
 \nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \mathbf{b} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b}), \\
 \nabla \cdot \nabla \mathbf{a} &= \frac{1}{2} \nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) - \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{a}), \\
 \nabla \cdot \mathbf{ab} &= \nabla \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \nabla \mathbf{b} \\
 \mathbf{1} : \nabla \mathbf{a} &= \nabla \cdot \mathbf{a}, \\
 \nabla \cdot (f\mathbf{1}) &= \nabla f,
 \end{aligned}$$

On a également :

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} &= \mathbf{a} \cdot (\nabla \mathbf{b})^\dagger, \\
 \frac{\partial f(x)}{\partial \mathbf{x}} &= \frac{\mathbf{x}}{x} \frac{\partial f(x)}{\partial x}, \\
 \mathbf{ab} : (\nabla \mathbf{c}) &= \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \nabla) \mathbf{c},
 \end{aligned}$$

avec $x = |\mathbf{x}|$.



CHAPITRE 2

Rappels de mécanique des milieux continus

2.1 Quelques éléments de cinématique

2.1.1 Description eulérienne ou lagrangienne

Pour décrire les forces exercées par un fluide sur une structure ou bien connaître les propriétés de transport au sein du fluide, il est essentiel de décrire mathématiquement le mouvement du fluide lui-même. Cette description est appelée *cinématique*. Elle est complémentaire de la description des efforts, appelée *dynamique* (voir § 2.4).

Pour un corps solide, les relations cinématiques sont les relations qui lient déplacements (translation et rotation), vitesses, et accélération. Pour un corps déformable, les choses se compliquent un peu car le matériau est une collection de points (en fait des volumes infinitésimaux), avec chacun sa propre histoire plus ou moins dépendante de celle des autres points. La description du mouvement au sein d'un milieu continu déformable peut se faire d'une multitude de façons que l'on va essayer ici d'expliquer simplement.

Commençons par une image. Vous souhaitez connaître la vitesse des véhicules sur un tronçon d'autoroute. Vous avez deux façons de faire :

- prendre vous-même un véhicule et chronométrer le temps mis pour aller d'un point à un autre ;
- être observateur en se plaçant sur le bord de l'autoroute et compter le nombre de voitures qui passent dans un laps de temps donné ou bien mesurer le temps qu'elles mettent à parcourir un tronçon donné.

De même, si vous êtes en charge des contrôles radars sur une autoroute, vous avez le choix entre placer un radar à un endroit fixe et à flasher les voitures, dont la vitesse dépasse la vitesse autorisée, ou bien vous immiscer dans la circulation avec un radar embarqué. Dans le second cas, la mesure est un peu plus délicate car la vitesse calculée par le radar est une vitesse relative par rapport au véhicule de police ; outre la mesure faite au radar, il faut donc disposer de la vitesse du véhicule de police.

En mécanique, on fait de même. Quand on souhaite décrire un flux, on peut :

- suivre le mouvement des particules (une par une) : c'est la description *lagrangienne* ;

- se placer à un endroit fixe et regarder ce qui passe (c'est-à-dire ce qui entre ou sort) : c'est la description *eulérienne*.

La description lagrangienne offre quelques facilités dans le calcul des vitesses et des accélérations puisque si l'on suit un volume infinitésimal de fluide, dont la position est repérée par $\mathbf{r}(t)$, alors la vitesse et l'accélération sont simplement la dérivée d'ordre 1 et 2 par rapport au temps de la position : $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}$ et $\mathbf{a}(t) = \ddot{\mathbf{r}}$. L'inconvénient est que pour décrire le fluide, il faut décrire un très grand nombre de points en fonction du temps. Mesurer une grandeur caractéristique de l'écoulement peut s'avérer également difficile à réaliser et à interpréter car le plus souvent en pratique, on fait de la mesure en un point fixe de l'espace ; à quelques exceptions près, il n'est pas commode de faire de la mesure en suivant les particules.

La description eulérienne permet de s'affranchir de ces problèmes d'interprétation expérimentale. Elle est toutefois un peu plus délicate à appréhender conceptuellement et conduit à des formulations mathématiques des équations du mouvement, qui sont un peu plus complexes que les équations lagrangiennes.

Pour décrire le mouvement, on décompose celui-ci en un mouvement de translation et une déformation. En effet, un petit volume de fluide subit au cours de son déplacement un déplacement (translation) et des déformations (rotation, étirement). Pour s'en convaincre, repartons de l'expérience de Newton vue au chapitre 1 du cours : dans cette expérience, le fluide était simplement cisailé entre deux plaques ; le profil de vitesse était linéaire $u(y) = ay$ avec $a = U/h$ et U la vitesse de la plaque supérieure. Si l'on marquait des particules à l'instant $t = 0$ en traçant un cercle, on pourrait examiner comment une forme simple est transportée et déformée. Comme le profil de vitesse est linéaire, on peut calculer comment le cercle a évolué après un temps t . Comme le montre la figure 2.7, le cercle se déplace et se déforme progressivement en ellipse.

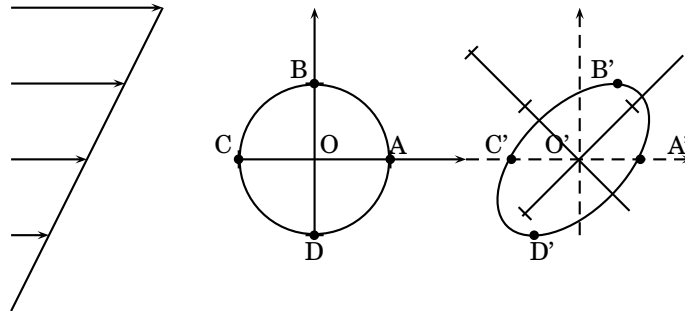


Figure 2.1 – Déformation d'un disque dans un écoulement simplement cisailé.

Cela est assez facilement prévisible ici puisque si l'on part de l'équation paramétrique d'un cercle

$$\begin{aligned}x &= x_0 + r \cos \theta, \\y &= y_0 + r \sin \theta,\end{aligned}$$

avec (x_0, y_0) les coordonnées de O et r le rayon du cercle. Au temps, t chaque point M (x ,

y) a atteint une position M'

$$\begin{aligned}x' &= x + u(y)t, \\ y' &= y.\end{aligned}$$

Les points A ($\theta = 0$), B ($\theta = \pi/2$), C ($\theta = \pi$), et D ($\theta = 3\pi/2$) sont transformés en A' , B' , C' , et D' par simple translation $u(y)t$. Le cercle est transformé en ellipse et on note que les distances entre le centre O' et les points repères A' , B' , C' , et D' ont été modifiées : il y a eu *étirement* des longueurs. En regardant les axes principaux (les axes de symétrie) de l'ellipse, on observe que ceux-ci tournent au cours du temps du fait du cisaillement : le mouvement s'accompagne donc également d'une *rotation*.

En résumé, le mouvement d'une particule de fluide se traduit par un déplacement en bloc, d'une rotation, et d'une déformation. C'est ce que l'on va voir de façon plus précise maintenant en examinant tout d'abord le champ de déplacement (voir § 2.2), puis celui de déformation (voir § 2.3)

2.2 Trajectoires et lignes de courant

On va tout d'abord décrire le mouvement par translation. Traditionnellement, on fait appel à trois courbes pour caractériser le champ de déplacement d'une série de particules :

- la *trajectoire* d'une particule : c'est la courbe décrite par une particule au cours de son mouvement. Si l'on trace dans l'espace la courbe $\mathcal{T}$ d'équation $\mathbf{x} = \mathbf{r}(t)$ en fonction de t , on obtient la trajectoire. En tout point M le long de $\mathcal{T}$, la tangente à cette courbe $\mathcal{T}$ donne la vitesse de la particule à l'instant où elle occupait le point M ;
- la *ligne d'émission* : c'est le lieu, à un instant donné, des points occupés par des particules de fluide qui sont toutes passées ou ont été émises à partir d'un même point P fixe dans l'espace ;
- la *ligne de courant* : c'est une courbe pour laquelle la tangente en chaque point est parallèle au champ (instantané) de vitesse des particules. Voir exercice n° 1 pour son équation.

La première courbe fournit une représentation du mouvement au cours du temps d'une seule particule, tandis que les autres renseignent sur ce qui se passe à un instant donné pour une multitude de particules. Une série de trajectoires montre comment des particules isolées bougent au cours du temps alors que les lignes de courant visualisent le champ de déplacement de toutes les particules à un instant donné.

Ces courbes ont une importance théorique car elles permettent d'expliquer ou de visualiser ce qui se passe au sein du fluide de façon élémentaire. Sur le plan expérimental, elles sont également très intéressantes car depuis longtemps, on connaît plusieurs techniques qui permettent de visualiser le mouvement au sein du fluide. Une méthode courante consiste à ensemencer le fluide de petites particules réfléchissantes (poudre d'aluminium par exemple), puis de les éclairer fortement (avec un faisceau laser par exemple) pour rendre visible le mouvement local au sein du fluide. On peut substituer ces marqueurs par des bulles de gaz ; cette technique a de multiples avantages car on peut émettre – par catalyse ou injection d'air – des bulles le long de formes prédéfinies (un point, une ligne droite, etc.) et pendant des temps variables (émission continue ou discontinue).

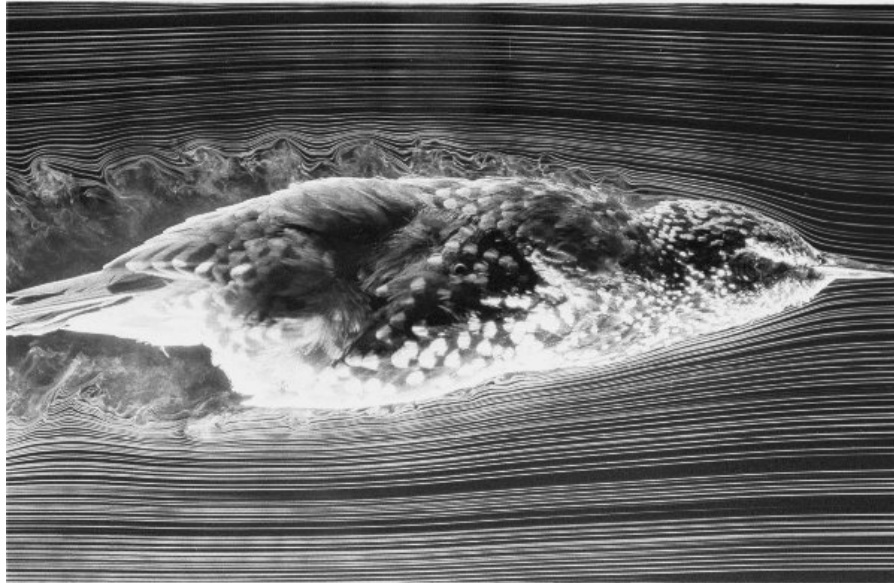


Figure 2.2 – Lignes de courant visualisées autour d'un oiseau (maquette) [DR].

On s'intéresse également à d'autres quantités comme le profil de vitesse ou de vorticité, qui permettent de décrire la déformation au sein du milieu, et plus spécifiquement les déplacements.

2.2.1 *Écoulement permanent*

Intéressons maintenant à un écoulement dans une rivière à l'approche d'un seuil. On suppose que le régime est permanent. Si l'on place un tube à une certaine profondeur et que l'on injecte pendant un certain laps de temps des bulles, on forme une ligne d'émission dont le point de départ est l'embouchure du tube [voir figure 2.3(a)]. Si maintenant on émet une seule bulle, qu'on prend une multitude de clichés au cours du temps et qu'on les superpose, on obtient la trajectoire d'une particule [voir figure 2.3(b)]. Naturellement en régime permanent, lignes d'émission et trajectoires se superposent puisqu'une particule passant par un point fixe suit toujours le même chemin. La ligne de courant est également identique à la ligne d'émission. Si l'on émet des bulles selon la verticale et que l'on suit la colonne de bulles au cours du temps, on constate que celle-ci se déplace et se déforme. La variation relative de longueur permet de visualiser le profil de vitesse selon la hauteur [voir 2.3(c)].

2.2.2 *Écoulement non permanent*

Pour le mouvement en régime permanent, les choses sont donc plutôt simples, mais elles se corsent dès qu'on s'intéresse à des écoulements non permanents. Par exemple, examinons le mouvement des particules autour d'un batteur, qui oscille autour de son axe. Il est assez vite évident que les lignes d'émission ne correspondent plus à une seule trajectoire.

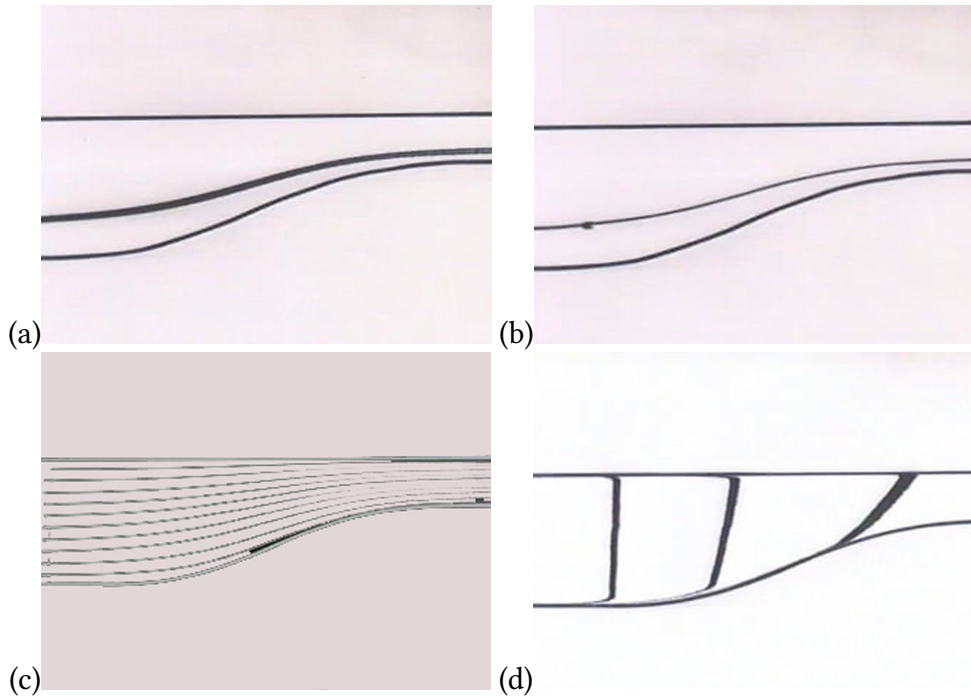


Figure 2.3 – Écoulement permanent d'un fluide dans une rivière à l'approche d'un seuil : (a) ligne d'émission ; (b) trajectoire d'une particule ; (c) champ de vitesse et lignes de courant ; (d) profils de vitesse selon la hauteur.

La figure 2.4 montre trois trajectoires différentes issues d'un même point d'émission. Selon la position du batteur, la particule passera par-dessus ou par-dessous. Cela peut se comprendre assez aisément en examinant les lignes d'émission pour une position donnée du batteur [voir figure 2.5(a)], qui en général sont déviées par le batteur. Notons que si au lieu d'émettre les bulles en continu, on les émet de façon intermittente, on obtient des lignes d'émission discontinues [voir figure 2.5(b)] : chaque incrément donne une direction de la ligne d'émission en un endroit donné. Si l'on prend une image une fraction de seconde après, chaque petit incrément se sera déplacé. La superposition des deux images donne le champ de vitesse [voir figure 2.6(b)]. En reliant les vecteurs vitesses, on peut tracer approximativement les lignes de courant [voir figure 2.6(c)]. Dans l'exemple du batteur, on note qu'à chaque instant, les lignes de courant et d'émission s'ajustent à la position du batteur et ne coïncident jamais.

2.3 Déformation et rotation d'un volume de fluide

2.3.1 Principe

On peut montrer qu'en dehors de la translation, tout mouvement se traduit par une rotation et une déformation des particules de fluide. Considérons un incrément de longueur AB . La longueur de cet incrément est petite (on la note dX). Un élément de fluide situé en A à l'instant t se trouve à l'instant $t + dt$ en A' et on a $\overrightarrow{AA'} = \mathbf{u}dt$. De même pour le point

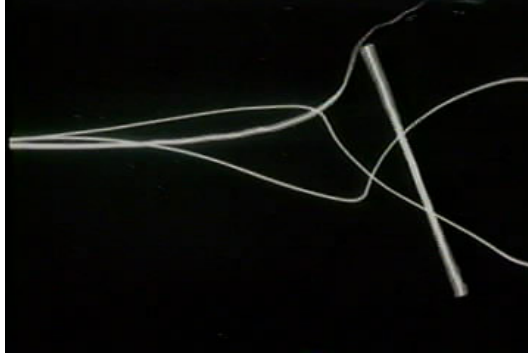


Figure 2.4 – Trois trajectoires différentes issues du même point pour trois temps différents.

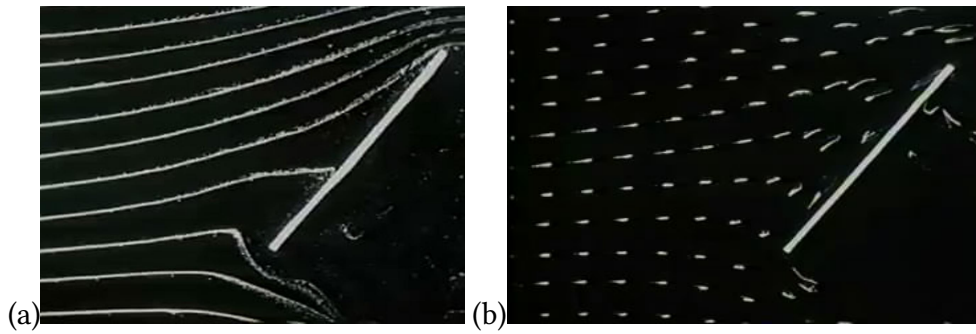


Figure 2.5 – Lignes d'émission selon deux techniques (a) émission en continu des bulles, (b) émission par intermittence.

B, on a $BB' = (\mathbf{u} + d\mathbf{u})dt$. On tire

$$\mathbf{A'B'} = \mathbf{A'A} + \mathbf{AB} + \mathbf{BB'},$$

soit encore

$$d\mathbf{x} = \mathbf{A'B'} = -\mathbf{u}dt + \mathbf{AB} + (\mathbf{u} + d\mathbf{u})dt,$$

En se servant de la définition de la différentielle totale : $d\mathbf{u} = \nabla\mathbf{u} \cdot d\mathbf{X}$ (la dérivée aussi bien dans le terme de gradient que le terme $d\mathbf{X}$ se construisent dans le système de coordonnées d'origine, donc ici $d\mathbf{X}$). On en déduit que :

$$d\mathbf{x} = d\mathbf{X} + (\nabla\mathbf{u} \cdot d\mathbf{X})dt.$$

Cela peut se mettre sous la forme

$$\frac{d\mathbf{x} - d\mathbf{X}}{dt} = \nabla\mathbf{u} \cdot d\mathbf{X},$$

où le membre de gauche peut s'interpréter comme une vitesse de déplacement. La grandeur ainsi introduite $\nabla\mathbf{u}$ est un tenseur d'ordre 2 (c'est-à-dire une matrice dans un repère fixé), qui peut se décomposer de la façon suivante :

$$\nabla\mathbf{u} = \frac{\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^\dagger}{2} + \frac{\nabla\mathbf{u} - (\nabla\mathbf{u})^\dagger}{2},$$

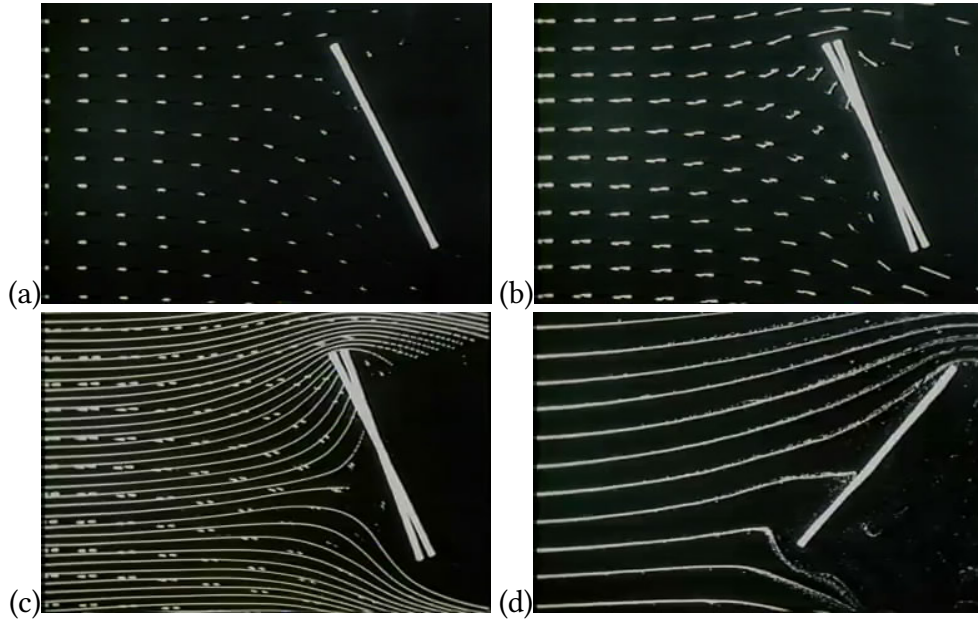


Figure 2.6 – Construction des lignes de courant : avec un stroboscope on éclaire pendant un petit laps de temps δt les bulles émises d'une série de points et on filme pendant ce temps-là le petit filet lumineux reflété par les bulles (b). Ce filet donne une idée du déplacement élémentaire et si on le divise par la durée δt , on obtient une série de vecteurs vitesse en différents points (c). Enfin, on se sert de ce champ de vecteurs pour esquisser la forme des lignes de courant (c et d). Des images prises à des instants différents montrent que les lignes de courant varient fortement selon la position du batteur.

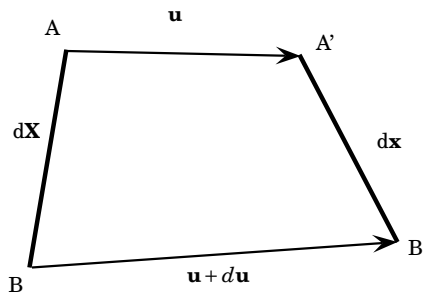


Figure 2.7 – Déformation d'un incrément de longueur AB.

c'est-à-dire une partie symétrique

$$D = \frac{\nabla u + \nabla u^\dagger}{2},$$

et une partie anti-symétrique

$$W = \frac{\nabla u - \nabla u^\dagger}{2}.$$

On peut montrer que :

- le *tenseur des taux de déformation* D représente la dilatation et la déformation angulaire subies par l'incrément de longueur AB au cours du mouvement ;

- le tenseur $\mathbf{W}$ représente la vitesse de rotation subie par l'incrément de longueur AB au cours du mouvement. En effet, si on note $\mathbf{\Omega} = \frac{1}{2}\nabla \times \mathbf{u}$ le taux de rotation instantané, alors pour tout vecteur $\mathbf{n}$ on a : $\mathbf{W} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{n}$ (voir problème n° 2). Le vecteur tourbillon ou *vorticité* est le vecteur rotationnel du champ de vitesse $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$; on a la relation $\mathbf{\Omega} = \boldsymbol{\omega}/2$.

Seule la déformation pure ($\mathbf{D}$) nous intéresse pour caractériser la déformation d'un fluide car la rotation d'un élément fluide n'amène aucune contrainte effective¹.

2.3.2 Écriture matricielle des tenseurs de déformation

Considérons un problème bidimensionnel. Le champ de vitesse s'écrit alors

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u(x, y, t) \\ v(x, y, t) \end{bmatrix}.$$

Le gradient de vitesse est donc un tenseur, dont la représentation matricielle s'écrit

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}.$$

On en déduit la matrice des taux de déformation

$$\mathbf{D} = \frac{\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^\dagger}{2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix},$$

tandis que la matrice des taux de rotation est

$$\mathbf{W} = \frac{\nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{u}^\dagger}{2} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 0 \end{bmatrix}.$$

Lorsqu'un fluide est incompressible ou l'écoulement est isochore, la masse volumique du fluide est constante; la conservation de la masse entraîne $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. On montre qu'il existe une fonction appelée *fonction de courant* $\psi(x, y; t)$ telle que

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \text{ et } v = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

de telle sorte que $\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = 0$. Le nom « fonction de courant » a été choisi car les lignes isovaleurs $\psi = \text{cte}$ sont les lignes de courant. En effet, si on différentie l'équation $\psi(x, y) = \text{cte}$, on a :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0,$$

1. En effet, on verra que le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\Sigma}$ apparaît dans les équations du mouvement sous la forme d'une divergence $\nabla \cdot \boldsymbol{\Sigma}$, or la divergence d'un terme rotationnel est nul : $\nabla \cdot \mathbf{W} = 0$, donc sans effet sur l'équation du mouvement car tout terme fonction linéaire de $\mathbf{W}$ s'annulerait.

soit encore

$$-vdx + udy = 0 \Leftrightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{v}{u},$$

qui est l'équation différentielle d'une ligne de courant (voir exercice 3.1).

Un écoulement pour lequel $\Omega \neq 0$ est dit rotationnel. Le cas opposé $\Omega = 0$ correspond aux écoulements dit *irrotationnels*. Ces écoulements sont très importants sur le plan théorique car de nombreux écoulements d'intérêt pratique peuvent être décrits comme des écoulements irrotationnels ; dans ce cas là, la description de l'écoulement s'en trouve considérablement simplifiée car si $\Omega = \frac{1}{2}\nabla \times \mathbf{u} = 0$, alors il existe une fonction scalaire $\phi(x, y, z; t)$ telle que

$$\mathbf{u} = \nabla \phi.$$

On dit alors que le champ de vitesse dérive du potentiel ϕ , appelé *potentiel des vitesses*. Au lieu de travailler avec un champ vectoriel, on se ramène à un problème scalaire. De plus, lorsque l'écoulement est isochore ou le matériau est incompressible, on a $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, donc

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot \nabla \phi = \Delta \phi = 0.$$

Le potentiel des vitesses vérifie alors l'équation dite de Laplace. Les lignes isopotentielles $\phi = \text{cte}$ forment une famille de courbes orthogonales au réseau des lignes de courant. De plus, lorsque l'écoulement est irrotationnel et plan, on a :

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0,$$

donc la fonction de courant vérifie également l'équation de Laplace. Cette propriété remarquable fait que le potentiel complexe $w = \phi + i\psi$ est une fonction holomorphe, ce qui ouvre des possibilités théoriques très intéressantes dans le calcul analytique des caractéristiques d'écoulement bidimensionnel. Des problèmes entiers tels que le mouvement d'un fluide autour d'une géométrie complexe telle qu'une aile d'avion ont pu être traités ainsi bien avant l'avènement des calculs numériques (Rhyming, 2004, voir pp. 101–192).

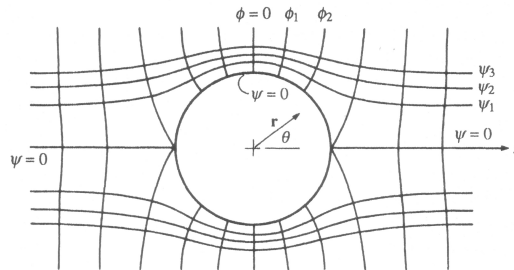


Figure 2.8 – Lignes de courant et isopotentielles pour un écoulement non visqueux ($\mu = 0$) autour d'une sphère au repos. Les courbes sont obtenues en résolvant l'équation de Laplace (Batchelor, 1967, voir § 2.9, 6.8).

2.3.3 Interprétation des taux de dilatation et de cisaillement

Examinons le tenseur des taux de déformation $\mathbf{D}$. Dans un repère cartésien en dimension 2, on peut décomposer $\mathbf{D}$ une matrice diagonale et une matrice où les termes

diagonaux sont nuls :

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \dot{\gamma} \\ \dot{\gamma} & 0 \end{bmatrix},$$

avec $\dot{\gamma} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)$ le *taux de cisaillement*.

Les termes diagonaux représentent une dilatation du fluide dans ses directions normales, tandis que les termes non diagonaux représentent une déformation angulaire. Pour s'en convaincre, considérons tout d'abord le mouvement d'un petit carré infinitésimal (voir figure 2.9 et 2.10). Après un temps Δt , le point B animé de la vitesse $u + \partial u / \partial x$ s'éloigne du point A bougeant à la vitesse u et initialement distant de dx . La variation de longueur $\Delta \ell_{AB}$ du segment AB est au bout du petit temps Δt : $\partial u / \partial x \Delta t$ et la vitesse à laquelle cette variation intervient est donc

$$\epsilon_x = \frac{\Delta \ell_{AB}}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

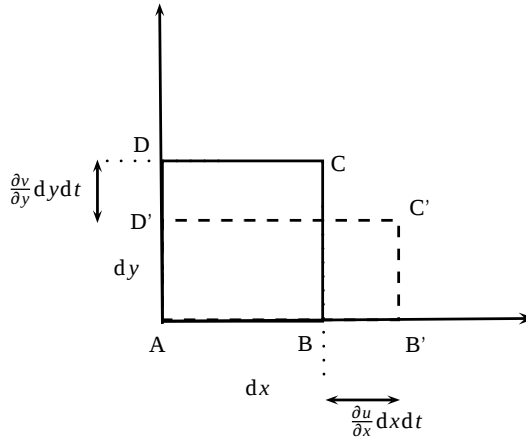


Figure 2.9 – Dilatation sans cisaillement d'un carré (en dimension 2).

De même dans la direction y , le déplacement de D sera

$$\Delta \ell_{AD} = \frac{\partial v}{\partial y} dt \text{ réalisé à la vitesse } \epsilon_y = \frac{\Delta \ell_{AD}}{\Delta t} = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Il s'ensuit que ϵ_x et ϵ_y sont les taux de dilatation du fluide dans les directions normales. Un cas particulier important concerne les fluides incompressibles et les écoulement isochores. On a alors

$$\text{tr} \mathbf{D} = \epsilon_x + \epsilon_y = \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

ce qui montre que les taux de dilatation sont opposés : $\epsilon_x = -\epsilon_y$.

Considérons maintenant les termes hors diagonale. Examinons l'angle $\widehat{DAB}$. Après un temps dt , le point D aura bougé d'un angle d'environ $\partial u / \partial y dt$ tandis que le point B aura bougé d'un angle d'environ $\partial v / \partial x dt$. La variation moyenne de l'angle $\widehat{DAB}$ est

donc $(\partial u/\partial y dt + \partial v/\partial x dt)/2$ et la vitesse moyenne de cet angle est appelée le *taux de cisaillement* :

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

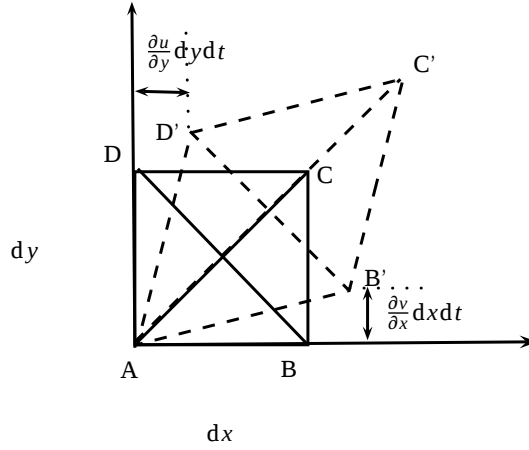


Figure 2.10 – Cisaillement d'un carré (en dimension 2) sans rotation ni dilatation.

2.3.4 Interprétation de la vitesse de rotation

Considérons un petit élément infinitésimal de forme carrée (voir figure 2.11). Ce petit carré subit une rotation d'un angle θ autour de l'axe vertical passant par A. Cela se produit par exemple si la vitesse selon y en A diffère de celle en B. En effet, si la vitesse en A est (u, v) , alors la vitesse en B (séparé de A d'une distance dx) est $(u + \partial u/\partial x dx, v + \partial v/\partial x dx)$.

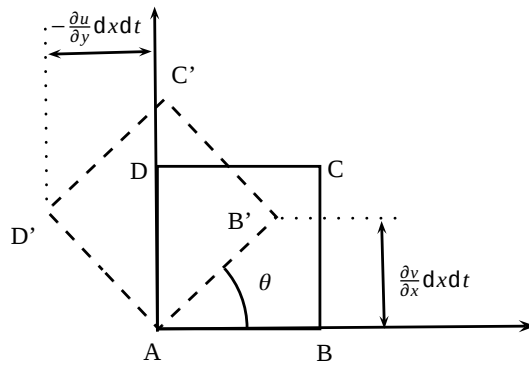


Figure 2.11 – Rotation sans cisaillement d'un carré (en dimension 2) d'un angle θ autour de Az .

Dans le repère attaché au point A, les nouvelles coordonnées de B seront après un temps dt : $(\partial u/\partial x dx dt, \partial v/\partial x dx dt)$, c'est-à-dire que le point B subit une rotation d'angle θ (qui est petit)

$$\theta_B \approx \tan \theta_B \approx \frac{\partial v}{\partial x} dt.$$

Cette rotation s'est faite à une vitesse de rotation

$$\dot{\theta}_B = \frac{\theta_B}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

On peut reproduire ce raisonnement avec D distante de dy du point A au temps t . Au temps $t + dt$, le point D aura subi une rotation d'un angle

$$\theta_D \approx \tan \theta_D \approx -\frac{\partial u}{\partial y} dt \text{ à la vitesse angulaire } \dot{\theta}_D = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Les axes x et y du carré ont donc subi une rotation à la vitesse moyenne

$$\dot{\theta} = \frac{1}{2} (\dot{\theta}_B + \dot{\theta}_D) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right),$$

qui est la composante selon z du vecteur taux de rotation instantanée

$$\Omega = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix}.$$

2.4 Quelques éléments de dynamique

2.4.1 Types de force

Considérons un volume de contrôle $\mathcal{V}$ et faisons un bilan des forces. Parmi les forces appliquées au volume de contrôle, il faut distinguer les forces :

- qui s'appliquent au sein du volume (force volumique). Dans le présent contexte, la seule force volumique considérée est la gravité $\mathbf{F}_v = m\mathbf{g}$, m étant la masse de fluide contenu dans le volume de contrôle ;
- qui s'appliquent à la surface du volume de contrôle ; on parle de force surfacique (on a vu un exemple avec la pression d'un fluide au repos). On peut écrire de façon générique ces forces agissant à la surface du volume de contrôle sous la forme :

$$\mathbf{F}_s = \int_S d\mathbf{f},$$

avec $d\mathbf{f}$ la force infinitésimale agissant sur un élément infinitésimal dS . Comme il s'agit d'une force de surface, on peut écrire différemment l'intégrale pour faire apparaître explicitement l'élément d'intégration dS

$$\mathbf{F}_s = \int_S \frac{d\mathbf{f}}{dS} dS.$$

Ce faisant on fait apparaître le rapport $d\mathbf{f}/dS$, que l'on va appeler une *contrainte* et qu'on notera $\boldsymbol{\sigma}$. On va montrer par la suite qu'il existe une relation simple entre la contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ et la normale $\mathbf{n}$ à la facette dS : $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n}$, avec $\boldsymbol{\Sigma}$ le *tenseur des contraintes*.

Finalement, la somme des forces appliquées au volume de contrôle s'écrit

$$\boxed{\mathbf{F} = \mathbf{F}_s + \mathbf{F}_v = \int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{g} dV + \int_S \boldsymbol{\sigma} dS,} \quad (2.1)$$

avec $\boldsymbol{\sigma}$ la contrainte appliquée sur la facette dS .

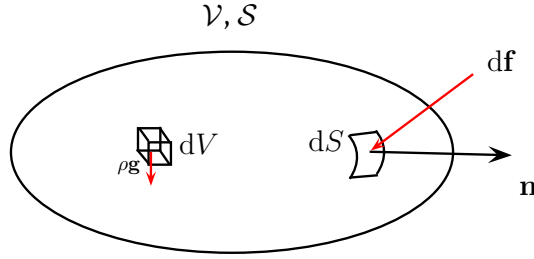


Figure 2.12 – Volume de contrôle et forces appliquées : force de volume, force de surface.

2.4.2 Tenseurs des contraintes et des extra-contraintes

Il faut définir un objet appelé *tenseur des contraintes* qui sert à calculer les contraintes qui s'exercent sur une surface orientée par le vecteur unitaire $\mathbf{n}$. On définit la contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ s'exerçant sur un élément de surface δS comme étant la limite des forces $\delta \mathbf{f}$ par unité de surface quand δS devient petit :

$$\boldsymbol{\sigma} = \lim_{\delta S \rightarrow 0} \frac{\delta \mathbf{f}}{\delta S}.$$

En considérant l'équilibre d'un petit tétraèdre², Cauchy³ a montré qu'il existe un objet $\boldsymbol{\Sigma}$, le *tenseur des contraintes*, tel que :

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n}}, \quad (2.2)$$

c'est-à-dire que la contrainte varie linéairement avec la normale $\mathbf{n}$.

Par construction, ce tenseur est symétrique : $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}^\dagger$. Dans un repère cartésien, le tenseur des contraintes est donc représenté par une matrice symétrique. Physiquement, la symétrie du tenseur des contraintes traduit l'absence (supposée) de couple de contraintes à l'échelle infinitésimale⁴. Quand on connaît le tenseur des contraintes, on peut calculer l'état des contraintes en tout point de l'espace fluide.

La contrainte exercée par le fluide sur une paroi (orientée par la normale extérieure $\mathbf{n}$) est $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n}$. Dans le cas d'un fluide au repos, le tenseur des contraintes coïncide avec la pression :

$$\boldsymbol{\Sigma} = -p\mathbf{1},$$

où $\mathbf{1}$ est le tenseur unité. On parle de tenseur *sphérique* ou *isotrope* car quelle que soit la direction considérée de l'espace, la contrainte est identique et égale à $-p$.

Lorsque le fluide est perturbé, il quitte sa position d'équilibre, ce qui modifie son état de contraintes. Le tenseur des contraintes est alors écrit sous la forme :

$$\boldsymbol{\Sigma} = -p\mathbf{1} + \mathbf{T},$$

2. Pour une démonstration, se reporter à (Botsis & Deville, 2006, pp. 111–114).

3. Augustin Louis Cauchy (1789–1857) était un mathématicien français. Ses travaux ont également concerné la mécanique des fluides, notamment son mémoire sur la propagation des ondes à la surface d'un liquide a constitué une étape importante du calcul avec des fonctions à variable complexe pour la mécanique des fluides. Professeur de mathématiques à la prestigieuse École Polytechnique, Cauchy a également beaucoup travaillé pour enseigner l'analyse de façon plus rigoureuse. Il a redéfini les concepts de fonction, de limite, de continuité, de dérivée, et d'intégrale.

4. Il existe des théories plus élaborées où la description dynamique repose sur le postulat inverse : l'existence de couples de contrainte pour tout volume infinitésimal. Ces théories sont appelées théorie des milieux de Cosserat, du second gradient, des fluides micro-polaires, etc.

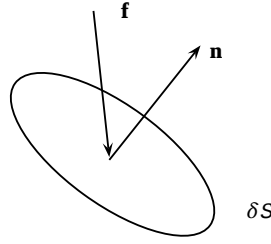


Figure 2.13 – Facette infinitésimale et force appliquée.

où $\mathbf{T}$ est le *tenseur des extra-contraintes*; $\mathbf{T}$ traduit l'écart à l'équilibre. Ce tenseur est nécessairement une fonction des déformations subies par le fluide et plus exactement des vitesses (ou taux) de déformation. On verra au chapitre ?? qu'une relation linéaire $\mathbf{T}$ et $\mathbf{D}$ sous la forme $\mathbf{T} = 2\mu\mathbf{D}$ (μ étant la viscosité) est la relation la plus simple que l'on puisse concevoir et caractérise ce qu'on va appeler le comportement newtonien.

2.4.3 Interprétation

Considérons un petit carré de taille infinitésimale et on veut calculer les contraintes sur une facette 1 (resp. 2) regardant la direction x . Par définition, l'état de contraintes est donné par

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n} = \begin{bmatrix} \Sigma_{xx} & \Sigma_{xy} \\ \Sigma_{xy} & \Sigma_{yy} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_{xx} \\ \Sigma_{xy} \end{bmatrix}.$$

La contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ a donc pour composantes $(\Sigma_{xx}, \Sigma_{xy})$:

- Σ_{xx} est appelée la *contrainte normale* (dans la direction x). Quand $\Sigma_{xx} > 0$, on parle de *traction* et inversement quand $\Sigma_{xx} < 0$, on parle de *compression*;
- Σ_{xy} est appelée la *contrainte de cisaillement*.

La contrainte normale Σ_{xx} sur la facette 1 est en général différente de la contrainte normale Σ_{yy} sur la facette 2. Quand ces deux contraintes sont égales et que les contraintes de cisaillement sont nulles, on dit que l'état de contrainte est *isotrope*. Une fluide au repos connaît un état de contraintes *isotrope* en tout point car $\boldsymbol{\Sigma} = -p\mathbf{1}$, avec p la pression hydrostatique.

En revanche, la contrainte de cisaillement Σ_{xy} est identique sur la facette 1 ou 2. C'est une propriété directement liée à la symétrie du tenseur des contraintes.

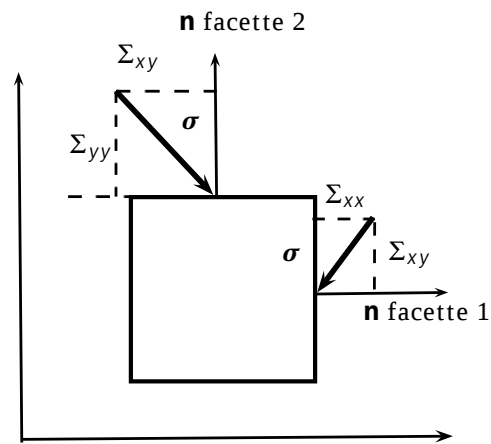


Figure 2.14 – Contraintes sur un carré de taille infinitésimale.

2.5 Synthèse : équations de Navier–Stokes dans différents systèmes

Rappelons l'équation de Navier–Stokes sous forme tensorielle :

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p_* + \nabla \cdot \mathbf{T},$$

avec p_* la pression généralisée ($p_* = p + \psi$, avec ψ le potentiel gravitaire choisi tel que $\rho \mathbf{g} = -\nabla \psi$, ce qui implique donc que $-\nabla p_* = \rho \mathbf{g} - \nabla p$) et $\mathbf{T}$ le tenseur des extra-contraintes qui prend la forme linéaire $\mathbf{T} = 2\mu \mathbf{D}$, $\mathbf{D}$ le tenseur des taux de déformation, μ la viscosité dynamique.

Cette équation est à compléter par l'équation de continuité qui, pour un fluide incompressible, prend la forme :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0.$$

Remarque importante : rappelons que les équations d'Euler sont un cas particulier des équations de Navier–Stokes lorsque la viscosité $\mu = 0$ (c'est-à-dire $\mathbf{T} = 0$).

2.5.1 Coordonnées cartésiennes

Conservation de la quantité de mouvement

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p_*}{\partial x} + \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z}, \\ \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p_*}{\partial y} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial z}, \\ \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p_*}{\partial z} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z}, \end{aligned}$$

Conservation de la masse (équation de continuité)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Les composantes de $\mathbf{T}$ sont facilement établies à partir de la définition du tenseur des extra-contraintes pour un fluide newtonien : $\mathbf{T} = 2\mu \mathbf{D}$ avec $\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^\dagger)$:

$$\mathbf{T} = 2\mu \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}.$$

On montre que les équations de Navier–Stokes s'écrivent également sous la forme suivante (après substitution des composantes de $\mathbf{T}$ dans les équations de conservation du mouvement ci-dessus) :

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p_*}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right),$$

$$\varrho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p_*}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right),$$

$$\varrho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p_*}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right).$$

2.5.2 Coordonnées cylindriques

Conservation de la quantité de mouvement Se reporter à la figure 1.2 pour la représentation des coordonnées cylindriques.

$$\varrho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + v \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r} \right) + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p_*}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial r T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z} - \frac{T_{\theta\theta}}{r},$$

$$\varrho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + v \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} \right) + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p_*}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 T_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z}$$

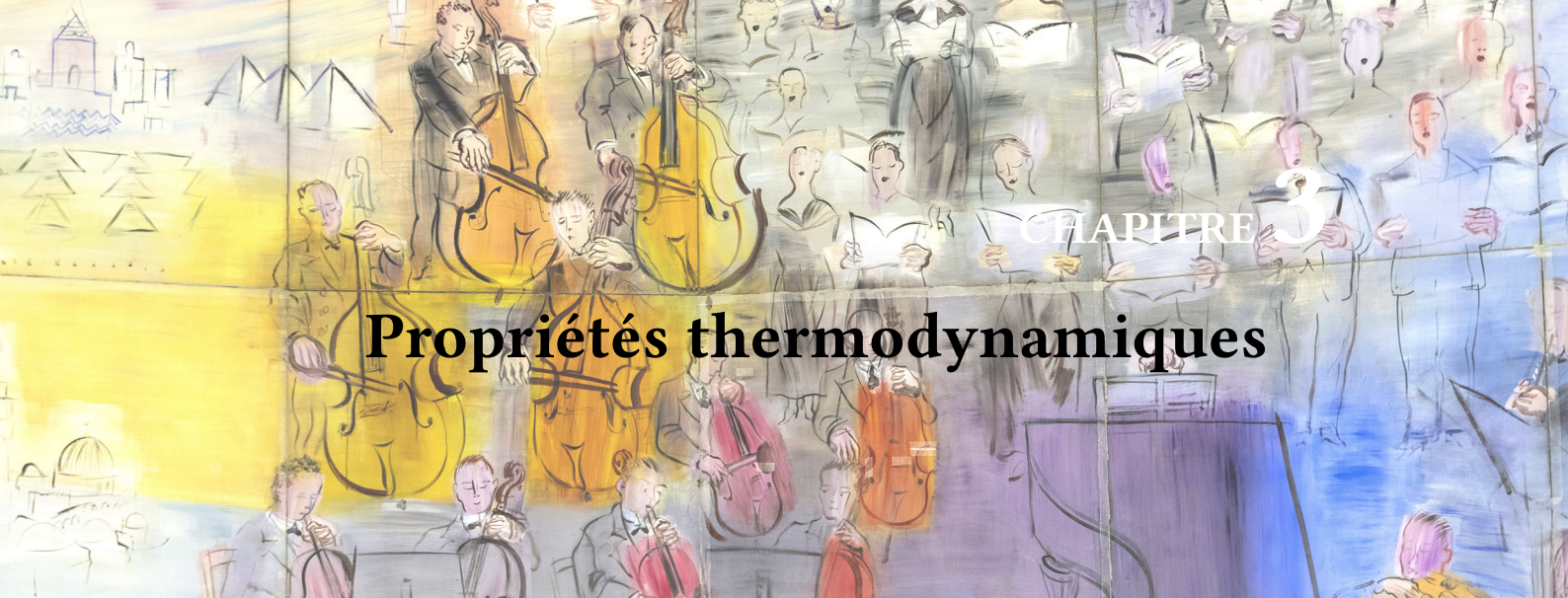
$$\varrho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p_*}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial r T_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z},$$

Conservation de la masse (équation de continuité)

$$\frac{1}{r} \frac{\partial r u}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Le tenseur des extra-contraintes s'écrit :

$$\mathbf{T} = 2\mu \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) & \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}.$$



Propriétés thermodynamiques

3.1 Premier et second principes

Une révolution majeure du XIX^e siècle a été de relier et d'unifier les concepts autour de force, travail, énergie, et chaleur. Les thermodynamiciens ont ainsi introduit l'*énergie interne* du fluide U . La première loi de la thermodynamique nous enseigne que chaleur δQ et travail δW échangés avec l'extérieur au cours d'un processus sont reliés par

$$dU = \delta Q + \delta W.$$

L'énergie interne d'un système peut changer sous l'effet d'un flux de chaleur ou bien d'un travail. On notera que la somme « chaleur + travail » (dU) est une différentielle exacte tandis qu'en général, δQ et δW ne le sont pas. Physiquement cela veut dire que la variation d'énergie interne entre deux états du processus ne dépend pas du chemin suivi, mais uniquement des états initial et final (voir figure 3.1), mais cette propriété n'est pas vérifiée pour les contributions élémentaires δQ ou δW . Le chemin suivi s'appelle une *transformation*; il existe plusieurs transformations :

- transformation *réversible*: une transformation est réversible quand on peut faire retourner le système à son état antérieur sans perte d'énergie. En pratique, cela signifie que les pertes d'énergie liées au frottement, à la plasticité des matériaux, etc., sont négligeables ;
- transformation *adiabatique*: la variation de chaleur avec l'extérieur est nulle $\delta Q = 0$;
- transformation *isotherme*: la transformation se fait à température constante $T = cst$;
- transformation *isobare*: la transformation se fait à pression constante $p = cst$;
- transformation *isochore*: la transformation se fait à volume constant $V = cst$;
- transformation *isentropique*: la variation d'entropie est nulle $dS = 0$.

♣ **Exemple.** – Pour donner une image: si vous partez de Lausanne pour monter au mont Pèlerin, vous avez une multitude de chemins et de moyens de locomotion pour y arriver mais quelle que soit votre route, la différence d'altitudes entre le point de départ et celui d'arrivée est la même; en revanche, les quantités de travail et de chaleur varient considérablement selon la route et le mode de transport. □

L'entropie est un concept introduit pour différencier les chemins que peut emprunter un système et donc prédire le sens d'évolution de ce système. Il existe une multitude de fa-

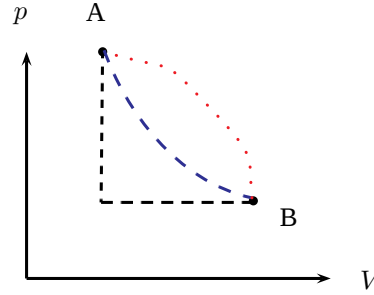


Figure 3.1 – La variation d'énergie interne entre deux états A et B ne dépend pas du chemin choisi.

çons de l'introduire et d'énoncer le second principe de la thermodynamique. L'entropie est notée S . Physiquement, elle décrit l'état de désorganisation de la matière (désordre moléculaire). La seconde loi de la thermodynamique énonce qu'au cours d'une transformation lente et réversible d'un fluide à l'équilibre, l'entropie est proportionnelle à la quantité de chaleur échangée avec l'extérieur δQ et inversement proportionnelle à la température T (qui mesure l'agitation moléculaire)

$$dS = \frac{\delta Q}{T}.$$

Comme U , c'est une différentielle exacte. Pour un système isolé (donc à énergie interne constante), l'entropie ne peut que croître ou se conserver.

3.2 Chaleurs spécifiques

Pour un gaz, le travail est le plus souvent lié à un changement de volume (on pensera par exemple au piston d'une machine à vapeur qui comprime ou détend un gaz) et on écrit le travail élémentaire $\delta W = -pdV$ (le travail est toujours défini comme le produit d'une force et d'un déplacement). Au contraire du travail, il existe une multitude de façons de définir la chaleur échangée en fonction du type de processus; de cette multitude de définition, la notion de chaleur spécifique est la plus importante dans ce cours et pour les applications qui nous intéressent. La *chaleur spécifique* (appelée encore *capacité calorimétrique*) relie variations de chaleur et de température

$$c = \frac{\delta Q}{\delta T}.$$

En pratique, il faut aller un peu plus loin et définir deux coefficients de chaleur spécifique: la chaleur spécifique à pression constante ou à volume constant. En effet considérons un élément de fluide à l'équilibre et subissant un changement lent et réversible de son état. Admettons par exemple que l'on parte d'un état (p, V) et que l'on arrive à un état $(p+dp, V+dV)$. Au cours de cette transformation, la température et la chaleur vont varier d'une quantité dT et δQ , respectivement. Pour la température, on se sert de la définition mathématique de la différentielle pour relier dT aux deux variables d'état dV et dp

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_V dp + \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_p dV,$$

tandis que la première loi de la thermodynamique nous dit que

$$\delta Q = \left(\frac{\partial U}{\partial p} \right)_V dp + \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_p dV + p dV.$$

Si la transformation se fait à pression constante ($dp = 0$), alors $dT = \partial_V T dV$, d'où l'on déduit que la chaleur spécifique (à pression constante) vaut

$$c_p = \left(\frac{\delta Q}{dT} \right)_{p=cst} = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_p + p \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p,$$

et de même, si le processus est à volume constant, on déduit la chaleur spécifique (à volume constant) :

$$c_v = \left(\frac{\delta Q}{dT} \right)_{V=cst} = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V.$$

Pour les gaz parfaits, l'énergie interne ne dépend que de la température ; c'est la première loi de Joule. On peut donc écrire

$$dU = c_v dT.$$

On montre alors que pour les gaz parfaits, la relation de Mayer est vérifiée

$$c_p - c_v = xR,$$

avec x le nombre de moles et R la constante des gaz parfaits. En introduisant le rapport $\gamma = c_p/c_v$, on tire les relations suivantes¹

$$c_v = \frac{xR}{\gamma - 1},$$

$$c_p = \frac{\gamma xR}{\gamma - 1}.$$

Le tableau 3.1 fournit les valeurs des chaleurs spécifiques de gaz usuels et de l'eau. À titre de comparaison, on a $c_p = 880$ J/kg/K pour du béton, $c_p = 420$ J/kg/K pour du bois, $c_p = 444$ J/kg/K pour du fer, et $c_p = 120$ J/kg/K pour de l'or.

3.3 Chaleur latente

Des variations importantes de chaleur se produisent également au cours d'un changement d'état. Considérons le diagramme de la figure 3.2. Il y a trois courbes :

- courbe de fusion : solide $\rightleftharpoons$ liquide ;
- courbe de vaporisation : liquide $\rightleftharpoons$ gaz ;
- courbe de sublimation : solide $\rightleftharpoons$ gaz.

Les trois courbes se rencontrent au *point triple* T (les trois phases coexistent). Il existe un *point critique* C, qui marque la fin de la courbe de vaporisation. Lorsque l'état (p, T) d'un

1. On prendra soin de noter les unités employées car selon les contextes, on emploie des chaleurs spécifiques molaires ou bien massiques.

Tableau 3.1 – Valeurs des chaleurs spécifiques pour des gaz courants et l’eau. Les masses molaires sont en kg/mol, les chaleurs spécifiques sont en J/kg/K. Les valeurs sont données pour des pressions et températures ordinaires.

Gaz	masse molaire	c_v	c_p	γ
Air	$29,0 \times 10^{-3}$	710	1005	1,41
Azote	$28,0 \times 10^{-3}$	730	1042	1,42
Hélium	$4,0 \times 10^{-3}$	3160	5190	1,64
Hydrogène	$2,0 \times 10^{-3}$	10140	14300	1,41
Oxygène	$312,0 \times 10^{-3}$	650	920	1,41
Eau gazeuse	$18,0 \times 10^{-3}$	1410	1850	1,31
Eau liquide			4186	
Eau solide			2060	

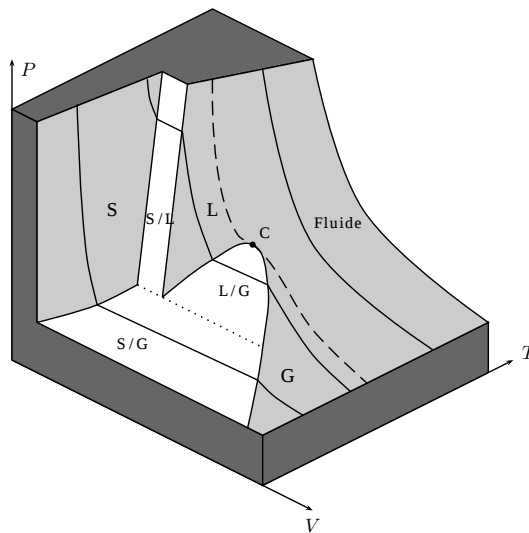


Figure 3.2 – Diagramme schématisé des phases d'un corps simple dans un espace pression (p), température (T), et volume (V).

corps traverse sur ce diagramme une des courbes d'équilibre, il y a un changement d'état et cette transformation est toujours accompagnée d'une libération ou d'une absorption de chaleur. Ainsi, la fusion, la vaporisation, et la sublimation nécessitent toujours une absorption de chaleur (à l'échelle moléculaire, cela se traduit par une agitation plus grande des molécules). La quantité de chaleur échangée au cours d'un changement d'état s'appelle

chaleur latente² et la relation de Clapeyron³ permet de l'exprimer

$$L = T(v_2 - v_1) \frac{dp}{dT},$$

avec v_i le volume massique du corps dans chacune des phases. Le tableau 3.2 fournit les chaleurs latentes de quelques corps usuels.

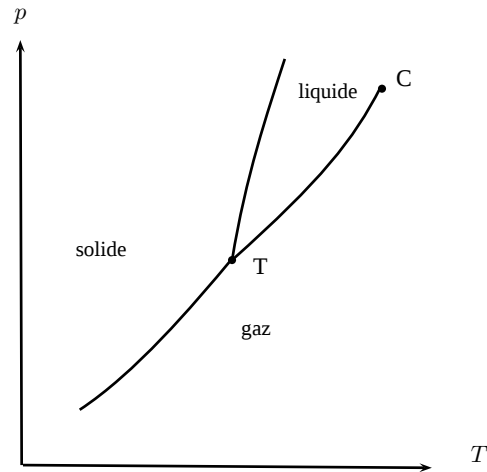


Figure 3.3 – Courbes d'équilibre entre les trois phases d'un corps.

Tableau 3.2 – Chaleur latente de quelques corps pour la fusion et la vaporisation (en J/g) et température de changement d'état (en °C) pour des conditions ordinaires de pression.

Corps	L_{fusion}	T_{fusion}	$L_{vap.}$	$T_{vap.}$
Dioxyde de carbone	184	−57	574	−78
Hydrogène	58	−259	455	−253
Oxygène	13,9	−219	213	−183
Eau	334	0	2272	100

3.4 Vaporisation et cavitation

Si on reprend le diagramme de la figure 3.2, mais en le coupant cette fois-ci par un plan $p - V$ (on travaille donc à température constante) comme le schématise la figure 3.4, on peut étudier l'équilibre entre une phase gazeuse et une phase liquide. L'intersection de la

2. De nos jours, les physiciens se réfèrent à la chaleur latente comme étant l'*enthalpie de transformation*.

3. Benoît Paul Émile Clapeyron (1799–1864) est un ingénieur et physicien français. Il est notamment l'auteur d'un « Mémoire sur l'équilibre intérieur des solides homogènes » soumis à l'Académie des sciences de Paris. Il est surtout connu avec Sadi Carnot pour ses travaux de pionniers sur la thermodynamique. Il a donné son nom à la formule donnant la chaleur latente de changement d'état des corps purs ainsi qu'à un diagramme thermodynamique en coordonnées $p - V$. En tant qu'ingénieur, il a également participé à la réalisation de ponts suspendus en Russie ainsi qu'à la formation d'ingénieurs à Saint-Petersbourg.

surface montrée sur la figure 3.2 avec le plan $p - V$ donne lieu à différents types de courbe selon la valeur de T :

- pour $T \geq T_c$, il y a une phase liquide ou bien une phase gazeuse sans coexistence des deux phases ;
- pour $T \leq T_c$, il peut exister un équilibre entre les deux phases avec co-existence des deux phases selon la valeur de la pression. On appelle p_s la pression de vapeur saturante ; sur la figure 3.4, c'est la pression au point L (ou G). On a ainsi
 - $p < p_s$ on a uniquement de la vapeur sèche ;
 - $p = p_s$ on a un mélange liquide + vapeur où le taux de vapeur saturante x est compris entre 1 (point G) et 0 (point L) ;
 - $p > p_s$, on a uniquement une phase liquide.

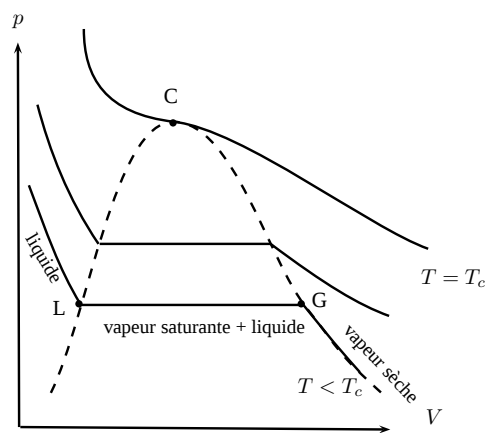


Figure 3.4 – Équilibre liquide-vapeur.

En pratique, l'équilibre liquide-gaz ne peut être réalisé qu'à des pressions comprises entre celle du point triple et celle du point critique.

Lorsque dans un liquide animé de grandes vitesses, la pression locale diminue jusqu'à devenir inférieure à la pression de vapeur saturante, il se forme de petites bulles de gaz. Ces bulles peuvent grandir, coalescer, ou bien s'effondrer. C'est le phénomène de *cavitation*. L'impact d'une bulle à grande vitesse contre une paroi génère sur le long terme une usure très importante : la paroi est « piquée » par les micro-impacts, ce qui peut causer avec le temps un endommagement irréversible.



Références bibliographiques

Bibliographie

- BATCHELOR, G. K. 1967 *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press.
- BOTSIS, J. & DEVILLE, M. 2006 *Mécanique des Milieux Continus: Une introduction*. Lausanne: Presses Polytechniques Fédérales de Lausanne.
- RHYMING, I. L. 2004 *Dynamique des fluides*. Lausanne: Presses Polytechniques et Universitaires Romandes.



Index

- adiabatique, 33
- capacité
 - calorimétrique, 34
- cavitation, 38
- chaleur, 33
 - latente, 35
 - spécifique, 33, 34
- champ, 1
- changement
 - d'état, 35
- cisaillement, 28
- compression, 28
- contrainte, 26
 - de cisaillement, 28
 - normale, 28
- coordonnées
 - cartésiennes, 2
 - cylindriques, 2, 31
 - sphériques, 2
- dérivée
 - matérielle, 12
 - particulaire, 12
- énergie
 - interne, 33
- équation
 - d'Euler, 30
 - de Laplace, 23
 - de Navier–Stokes, 30
 - explicite, 6
 - implicite, 6
- eulérien, 15
- fonction
 - de courant, 22
- fusion, 35
- incompressible, 24
- irrotationnel, 23
- isochore, 33
- isotrope, 28
- lagrangien, 15
- ligne
 - d'émission, 17
 - de courant, 17
- loi
 - de Joule, 35
 - première loi de la thermodynamique, 33
 - seconde loi de la thermodynamique, 33
- matrice, 1
- nabla, 8
- newtonien, 27
- opérateur
 - divergence, 9
 - gradient, 8
 - laplacien, 11
- point
 - critique, 35, 37
 - triple, 35
- potentiel
 - des vitesses, 23
- pression, 28, 33
 - de vapeur saturante, 37
- produit
 - dyadique, 5
 - scalaire, 4

- simplement contracté, 4
- tensoriel, 5
- vectorel, 4
- relation
 - de Clapeyron, 35
 - de Mayer, 35
- rotationnel, 23
- scalaire, 1
- sublimation, 35
- surface
 - de révolution, 7
 - orientée, 7
 - plane, 7
- taux
 - de cisaillement, 23, 24
 - de dilatation, 24
 - de rotation, 25
- tenseur, 1
 - des contraintes, 27
 - des extra-contraintes, 27
 - des taux de déformation, 20
- traction, 28
- trajectoire, 17
- transformation
 - adiabatique, 33
 - isentropique, 33
 - isobare, 33
 - isochore, 33
 - isotherme, 33
 - réversible, 33
- vaporisation, 35
- vecteur, 1
- vorticité, 20
- écoulement
 - irrotationnel, 23