



# Mécanique des fluides

## Section de génie civil

### Hydraulique

#### Problème 1: évacuateur de crue

Les évacuateurs de crue sont des ouvrages hydrauliques disposés sur des barrages pour laisser transiter une crue lorsque le niveau dans le lac d'accumulation dépasse un certain niveau et présente un danger. Lorsque le débit à évacuer est important, il faut parfois des ouvrages complexes qui présentent une convergence marquée de la largeur du coursier (voir l'exemple de la figure 1). On étudie ici un tel dispositif.

On considère un évacuateur de crue de section rectangulaire en béton: le radier (le fond) et les bajoyers (murs droits) sont du même béton. Sa pente est constante et notée  $i$ . Sa longueur est  $L$ . Sa largeur est variable, et c'est une fonction supposée connue notée  $B(x)$ . Le frottement est de type Chézy, avec un coefficient de rugosité  $C$ . Le débit  $Q$  à laisser transiter est constant.

- (a) On souhaite établir l'équation de la courbe de remous pour un canal convergent. En s'inspirant de la démonstration vue en cours pour le canal de largeur constante, considérer l'équation de la charge hydraulique  $H$

$$h + z + \frac{\bar{u}^2}{2g} = H,$$

avec  $h$  la hauteur d'eau,  $z$  la cote du radier,  $\bar{u}$  la vitesse moyenne. En différentiant par rapport à  $x$  et en introduisant la pente d'énergie  $j = -H'(x)$  et la pente du radier  $i$ , obtenir l'équation différentielle de la hauteur d'eau  $h$ .

- (b) On suppose que la largeur du canal est grande par rapport à la hauteur en sorte de pouvoir simplifier l'expression du rayon hydraulique. En déduire les équations algébriques vérifiées par la hauteur normale  $h_n$  et la hauteur critique

$h_c$  (on rappelle que celles-ci correspondent respectivement aux cas  $h' = 0$  et  $h' \rightarrow \infty$ ).

- (c) Dans le cas d'un radier droit (à largeur constante), quelle est la condition portant sur le nombre de Froude pour que l'écoulement soit supercritique ? Dans le cas d'un frottement de type Chézy, montrer que cette condition est indépendante du débit et permet de mettre en évidence une pente critique séparant régimes sub- et supercritique.
- (d) On considère le cas d'une convergence linéaire :

$$B(x) = B_0 - kx,$$

avec  $k > 0$ . En supposant que  $k \ll 1$ , faire un développement asymptotique à l'ordre 1 de l'équation algébrique et en déduire une expression analytique. Pour quelles conditions l'écoulement est-il supercritique ? Est-ce qu'une contraction de la largeur du radier augmente ou diminue la pente critique ?

- (e) On considère le cas limite  $k = 0$  (canal à largeur constante). Calculer la hauteur normale et la hauteur critique dans le cas où  $L = 200$  m,  $Q = 500$  m<sup>3</sup>/s,  $B_0 = 50$  m,  $i = 0,2$ , et  $C = 80$  m<sup>1/2</sup>/s. Tracer l'allure de la courbe de remous dans le cas où la hauteur au sommet de l'évacuateur de crue est  $h_0 = 1$  m.



**Figure 1 –:** Example d'évacuateur de crue avec une convergence.

## Problème 2 : mesure de débit à l'aide d'un Parshall

Un Parshall est un dispositif qui sert à mesurer le débit dans un canal à partir de la mesure de la hauteur (voir figure 2). Il comporte :

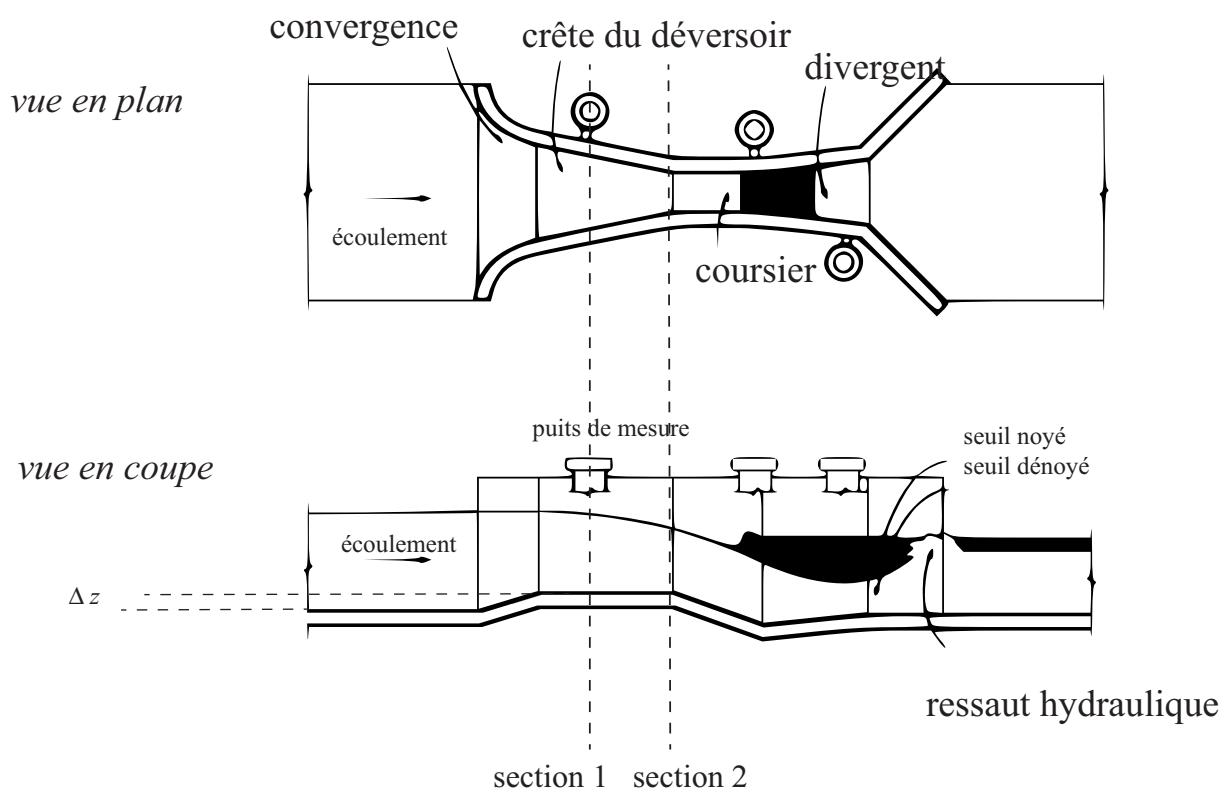
- un tronçon convergent, tout d'abord ascendant puis horizontal, où l'écoulement est subcritique ;
- un coursier à pente descendante, étroit de largeur constante  $W_2$ , où l'écoulement est critique ;
- un tronçon divergent et légèrement ascendant, où l'écoulement est supercritique.

On mesure la hauteur d'eau  $h_1$  dans un puits relié au premier tronçon au niveau de la section 1 (voir figure 2). La largeur du canal en cette section est notée  $W_1$ . Le débit total est  $Q$ . Le régime est permanent. La différence d'altitude entre le sommet du seuil (section 2) et le lit du canal est notée  $\Delta z$ . On appelle  $h_c$  la hauteur critique atteinte dans le second tronçon où l'écoulement est critique (on a donc  $h_2 = h_c$ ). Le seuil est dénoyé.

- Donner l'expression de l'énergie totale à la section 2 en fonction de  $\Delta z$  et  $h_c$ . On peut répondre en termes d'énergie totale ou de charge hydraulique.
- Donner l'expression de l'énergie totale à la section 1 en fonction de  $\Delta z$ ,  $Q$ ,  $W_1$  et  $h_1$ . On peut répondre en termes d'énergie totale ou de charge hydraulique.
- En négligeant la dissipation d'énergie entre les sections 1 et 2, déterminer l'équation (implicite) permettant de calculer le débit si on suppose que  $h_1$  est déterminée (à partir d'une mesure dans le puits).
- Faire une application numérique.
- Dans l'expression de l'énergie spécifique à la section 1, laquelle des deux contributions est négligeable et pourquoi ? En déduire une expression approchée permettant de déduire  $Q$  en fonction de  $\Delta z$ ,  $W_2$ ,  $W_1$  et  $h_1$ . Faire une application numérique. Quelle est la précision de cette approximation ?

*Données numériques:*

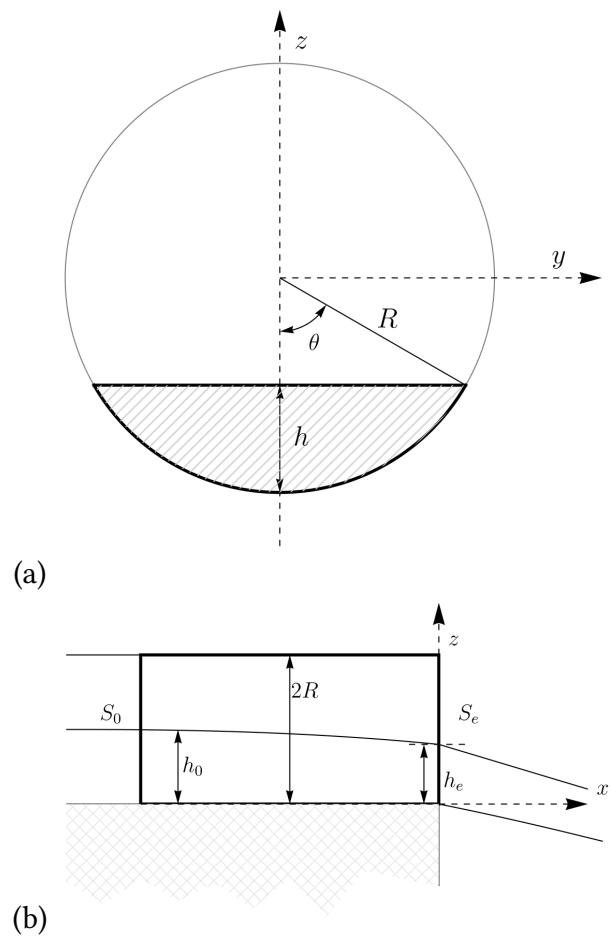
- Largeur des tronçons :  $W_1 = 6$  m et  $W_2 = 2$  m
- Hauteur mesurée  $h_1 = 1$  m
- Hauteur de la marche  $\Delta z = 30$  cm



**Figure 2** –: Schéma d'un canal Parshall.

## Problème 6 : méthode de mesure sommaire du débit

Vous travaillez pour le compte d'une commune de montagne qui souhaite créer un lac d'accumulation en détournant une partie du débit d'un torrent. Pour cela, une conduite de diamètre  $D = 2R$ , de longueur  $L$ , et de pente  $i$  est placée dans le torrent et capte une partie du débit transitant par le torrent. Un jet se forme à la sortie de la conduite. La question qui se pose à vous est de savoir comment déterminer le débit dévié dans la conduite avec des moyens rudimentaires.



**Figure 3** --: Géométrie de la conduite. (a) vue de face. (b) vue de côté; le cadre noir représente le volume de contrôle pour le calcul.

On adoptera les notations usuelles du cours :

- périmètre mouillé  $\chi$ , rayon hydraulique  $R_h$ , et section mouillée  $S$ ;
- vitesse moyenne  $\bar{u} = Q/S$ ;
- $\theta$  l’angle que fait la surface libre par rapport à la verticale;
- On appelle  $x$  la direction de l’écoulement.

On considère que dans la conduite, l’écoulement est à surface libre. Sur la plus majeure partie de la longueur, l’écoulement a une hauteur d’eau qui est égale à la hauteur normale  $h_n$ . La conduite est en acier avec un coefficient de Manning-Strickler  $K$ . On rappelle que cette loi s’écrit

$$\tau_p = \frac{\varrho g}{K^2} \frac{\bar{u}^2}{R_h^{1/3}}$$

Si on exprime la formule en termes de pente de frottement, cette loi s’écrit

$$j_f = \frac{\tau_p}{\varrho g R_h} = - \frac{dH}{dx} = \frac{\bar{u}^2}{K^2 R_h^{4/3}}$$

On considère que le taux de remplissage maximal est de 50 %, c.-à-d. que  $\theta \leq \pi/2$  ou  $h \leq R$  pour la gamme d’écoulements étudiés. Pour les applications numériques, on prendra les valeurs suivantes :

- $R = 20$  cm,  $L = 50$  m, et  $i = 10$  %;
- $Q = 200$  L/s;
- $K = 85$  m<sup>1/3</sup>/s.

- (a) Quelle est l’expression de la hauteur normale en régime permanent ? (on se contentera de donner l’équation implicite vérifiée par la hauteur normale).
- (b) Calculer la relation entre section mouillée  $S$ , hauteur d’eau  $h$ , rayon  $R$ , et angle  $\theta$ . Montrer qu’en première approximation, cette surface mouillée est voisine de  $\tilde{S} = \sqrt{Dh^3}$ . Quelle est l’erreur (relative) maximale commise ?
- (c) Écrire la définition de la charge spécifique  $H_s$ . On va s’inspirer ici de ce qu’on avait fait en cours pour établir la hauteur critique. Montrer qu’à débit constant, la fonction  $H_s$  admet un minimum, qui sépare deux domaines : le domaine supercritique et le domaine subcritique. Quelle est la définition de la hauteur critique ? (on se contentera de donner l’équation implicite vérifiée par la hauteur critique).

- (d) En vous servant de l'approximation  $\tilde{S} = \sqrt{Dh^3}$  et du développement asymptotique au premier ordre  $\arccos(1 - x) = \sqrt{2x}$  quand  $x \rightarrow 0$ , calculer une approximation explicite des hauteurs critique et normale.
- (e) Faire l'application numérique. Caractériser le régime d'écoulement. Est-ce que ce résultat peut changer sachant que l'on a fait des approximations pour arriver à ce résultat ? Si on veut résoudre l'équation de la courbe de remous, où faut-il placer la condition aux limites ?
- (f) En vous inspirant de ce qu'on a vu en cours pour établir l'équation de la courbe de remous, déduire l'équation de la courbe de remous en différentiant l'équation de conservation de la charge  $H$  par rapport à  $x$  dans le cas d'un écoulement permanent. En vous servant de l'approximation  $\tilde{S} = \sqrt{Dh^3}$  et des approximations trouvées précédemment pour les hauteurs normale et critique, écrire une approximation de l'équation de la courbe de remous pour une conduite circulaire inclinée sous la forme d'une équation de Bresse :

$$\frac{dh}{dx} = i \frac{1 - (h_n/h)^p}{1 - (h_c/h)^q},$$

avec  $p$  et  $q$  deux coefficients à déterminer.

- (g) À la sortie de la conduite, un jet se forme. La pression qui était hydrostatique dans l'écoulement d'eau dans la conduite devient uniforme (en première approximation) et égale à la pression atmosphérique (cela sera utilisé à la question 9). On cherche à déterminer la hauteur d'eau  $h_e$  à l'exutoire de la conduite. On va pour cela appliquer le théorème de conservation de la quantité de mouvement sur un volume de contrôle – voir figure 1(b) – pour un écoulement d'eau en régime permanent. Que vaut la résultante des forces de pression sur la face amont  $S_0$  en supposant qu'on est suffisamment loin de l'exutoire et que la pression est hydrostatique (comme d'habitude on supposera que la pression ambiante est nulle) ? Montrer que cette force (sous forme algébrique) peut être approchée par l'expression :

$$\tilde{F}_p = \frac{3}{4} \varrho g \sqrt{R h^5}.$$

- (h) Comment s'exprime le flux de quantité de mouvement  $\Phi_0$  (projété le long de  $x$ ) à travers  $S_0$  en supposant le profil de vitesse uniforme ? En vous servant de l'approximation  $\tilde{S} = \sqrt{2Rh^3}$ , proposez une approximation  $\tilde{\Phi}_0$ .
- (i) À l'exutoire de la conduite, il se forme un jet. La pression devient non hydrostatique sur la face  $S_e$  :  $p \approx \varrho g(h - z) - \varrho g(h - z)^2/h$ . Comme le montre la figure

4, la pression est plus faible que la pression hydrostatique. En conséquence, en première approximation, on va supposer que la pression est égale à la pression atmosphérique sur  $S_e$  et qu'en conséquence, la résultante des forces de pression sur  $S_e$  est nulle. Le profil de vitesse est également affecté dans la zone de transition « écoulement à surface libre »  $\rightarrow$  « jet ». On va toutefois supposer qu'il est uniforme. Exprimez le flux de quantité de mouvement  $\Phi_e$  et une approximation  $\tilde{\Phi}_e$  en vous servant de  $\tilde{S}$ .

- (j) En vous servant de l'équation de la conservation de la quantité de mouvement (1):

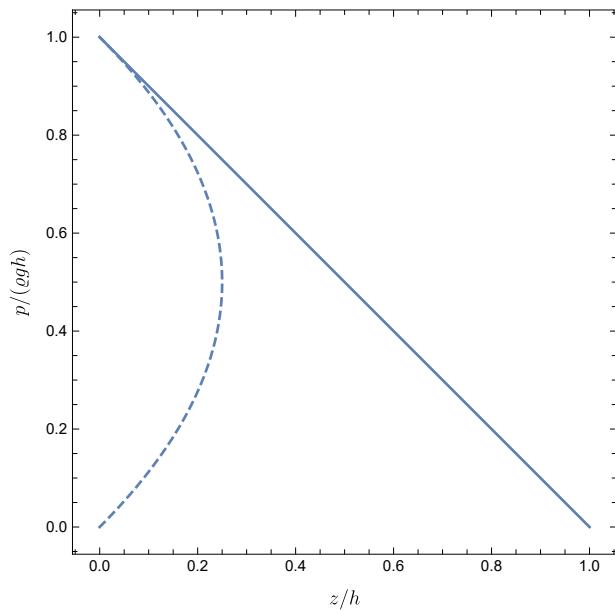
$$\frac{d}{dt} \int_V \varrho \mathbf{u} dV + \int_S \varrho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS = \varrho V \mathbf{g} + \int_S \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (1)$$

écrivez la relation (approchée) liant les flux de quantité de mouvement  $\Phi_e$  et  $\tilde{\Phi}_e$  à la force de pression  $F_p$  sur  $S_0$  (on néglige : l'effet de la pesanteur, le frottement sur les parois, et la pression à l'exutoire). Simplifiez cette relation en introduisant le nombre de Froude à l'amont et le rapport de hauteur :

$$Fr_0^2 = \frac{3}{4} \frac{Q^2}{g R h_0^4} \text{ et } Y = \frac{h_e}{h_0}.$$

Faire une application numérique en supposant que  $h_0 = h_n$ .

- (k) Tracez la forme de la courbe de remous en prenant comme hauteur d'eau à l'entrée de la conduite :  $h_i = 20$  cm.
- (l) Est-ce qu'en mesurant la hauteur d'eau  $h_e$  à l'exutoire on dispose d'un moyen commode et précis d'estimer le débit ? Quelle précision pensez-vous obtenir ?



**Figure 4 –:** Profil (adimensionnalisé) de pression à l'exutoire de la conduite: profil hydrostatique (trait continu) et approximation d'un profil non hydrostatique (trait discontinu).

# Correction du problème 1

## Question (a)

La conservation du débit nous impose

$$Q = B(x)h(x)\bar{u}(x). \quad (2)$$

La charge hydraulique s'écrit

$$h + z + \frac{\bar{u}^2}{2g} = H,$$

soit encore

$$h + z + \frac{Q^2}{2gB^2h^2} = H.$$

On différentie par rapport à  $x$  et on introduit  $i = -z'$  et  $j = -H'$

$$h' - \frac{Q^2}{gB^2h^2} \left( \frac{B'}{B} + \frac{h'}{h} \right) = i - j.$$

En regroupant les termes, on a

$$h' = \frac{i - j + \frac{\bar{u}^2}{g} \frac{B'}{B}}{1 - Fr^2}, \quad (3)$$

avec  $Fr^2 = \bar{u}^2/(gh) = Q^2/(gB^2h^3)$ .

## Question (b)

La hauteur normale  $h_n$  est définie comme la hauteur pour laquelle le numérateur du rapport dans l'équation de la courbe de remous (3) est nul:

$$i - j + \frac{\bar{u}^2}{g} \frac{B'}{B} = i - \frac{\bar{u}^2}{C^2R_h} + \frac{Q^2}{gh^2B^2} \frac{B'}{B} = 0,$$

avec  $R_h = Bh/(B + 2h)$  le rayon hydraulique. Autrement dit c'est la solution de l'équation algébrique

$$\frac{B + 2h}{C^2Bh} - \frac{1}{g} \frac{B'}{B} = \frac{ih^2B^2}{Q^2}. \quad (4)$$

Pour la hauteur critique  $h_c$ , on est en terrain connu puisque l'on retrouve la condition sur le dénominateur nul, qui donne

$$Fr^2 = 1 \Rightarrow h_c = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{gB^2}}.$$

### Question (c)

Un écoulement est supercritique quand

$$Fr > 1.$$

En termes de vitesse cela impose

$$\bar{u}^2 > gh,$$

or d'après la loi de Chézy, on a  $\bar{u} = C\sqrt{ih}$ , donc en substituant cette loi dans la condition ci-dessus, on a

$$C^2i > g.$$

Il existe donc une pente critique

$$i_c = \frac{g}{C^2}$$

telle que pour  $i > i_c$  l'écoulement est supercritique, et réciproquement pour  $i < i_c$  il est subcritique. Cela est indépendant du débit (contrairement à ce qui est trouvé avec des lois plus réalistes comme Manning-Strickler).

### Question (d)

Avec  $B(x) = B_0 - kx$  et  $R_h \propto h$ , l'équation (4) devient

$$\frac{1}{C^2h} + \frac{1}{g} \frac{k}{B} = \frac{ih^2B^2}{Q^2}.$$

Soit encore

$$h^3 = \frac{Q^2}{iC^2B^2} \left( 1 + \frac{k}{g} \frac{C^2h}{B} \right),$$

On a donc

$$h = \left( \frac{Q^2}{iC^2B^2} \right)^{1/3} \left( 1 + \frac{k}{g} \frac{C^2h}{B} \right)^{1/3},$$

et comme  $k$  est petit, on a au premier ordre en  $k$

$$h = \left( \frac{Q^2}{iC^2B^2} \right)^{1/3} \left( 1 + \frac{1}{3} \frac{k}{g} \frac{C^2h}{B} \right).$$

En regroupant les termes en  $h$  et en faisant un nouveau développement limité en  $k$ , on déduit

$$h_n = \left( \frac{Q^2}{iC^2B^2} \right)^{1/3} \left( 1 + \frac{1}{3} \frac{k}{g} \frac{C^2}{B} \left( \frac{Q^2}{iC^2B^2} \right)^{1/3} \right).$$

L'écoulement est supercritique lorsque  $h_n < h_c$ , soit quand

$$h_n < h_c \Rightarrow \left( \frac{Q^2}{iC^2B^2} \right)^{1/3} \left( 1 + \frac{1}{3} \frac{k}{g} \frac{C^2}{B} \left( \frac{Q^2}{iC^2B^2} \right)^{1/3} \right) < \sqrt[3]{\frac{Q^2}{gB^2}}.$$

En simplifiant on trouve

$$1 + \frac{1}{3} \frac{k}{g} \frac{C^2}{B} \left( \frac{Q^2}{iC^2B^2} \right)^{1/3} < \sqrt[3]{\frac{iC^2}{g}}.$$

Un développement limité donne une expression simplifiée

$$i > \underbrace{\frac{g}{C^2}}_{i_{c0}} + k \frac{1}{B} \left( \frac{Q^2}{iC^2B^2} \right)^{1/3}. \quad (5)$$

On a vu au (c) que si le canal était droit ( $k = 0$ ), la condition  $i > i_{c0} = g/C^2$  est la condition usuelle pour observer un écoulement supercritique avec un frottement à la Chézy, et cela indépendamment du débit. On voit que la contraction du radier avec un coefficient  $k$  a pour effet d'augmenter la pente à partir de laquelle le régime supercritique est observé car le second terme dans le membre de droite dans (5) est positif (quelle que soit la valeur de  $i$ ). Pour s'en convaincre on peut poser  $i = i_{c0} + \delta i$  avec  $\delta i \ll 1$ . En reportant dans (5), on trouve

$$\delta i > \frac{\alpha}{1 + \alpha/3} \text{ avec } \alpha = \frac{k}{B} \left( \frac{Q^2}{i_{c0}C^2B^2} \right)^{1/3}.$$

Le facteur correctif dépend du débit.

## Question (e)

Le débit critique est

$$h_c = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{gB^2}} = 2,16 \text{ m}$$

La hauteur normale est solution de l'équation.

$$Q^2 = B^2 C^2 i h^2 \frac{Bh}{B + 2h},$$

qui donne  $h_n = 43 \text{ cm}$ . Si on fait l'approximation d'un canal large, alors

$$h_n = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{iC^2B^2}} = 42,7 \text{ cm.}$$

Comme le régime est supercritique et que la condition initiale vérifie  $h_c > h_0 > h_n$ , on doit avoir une courbe de remous décroissante qui tend vers son asymptote  $h_n$ . Si on intègre numériquement l'équation de la courbe de remous (3) avec pour condition initiale  $h(0) = h_0$  on obtient la solution tracée sur la figure 5.

Cette figure a été obtenue avec Mathematica en quelques lignes

$Q = 500$

$B = 50$

$i = 0.2$

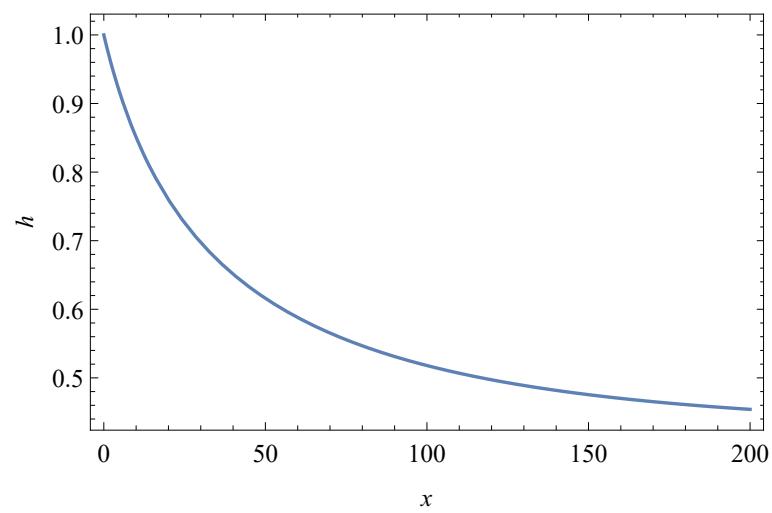
$Ch = 80$

$q = Q/B$

$g = 9.81$

```
eqn = NDSolve[{
  h[0] == 1,
  h'[x] == (i - q^2/Ch^2/h[x]^3)/(1 - q^2/g/h[x]^3)
}, h, {x, 0, 200}]

Plot[h[x] /. eqn, {x, 0, 200}, Frame -> True, FrameLabel -> {"x", "h"},
  BaseStyle -> {FontFamily -> "Times New Roman", 12}]
```



**Figure 5 –:** Courbe de remous.

## Correction du problème 2

### Question (a)

L'énergie totale au point 2 (en prenant le fond du canal comme référence des  $z$ ) est

$$E_2 = \Delta z + h_2 + \frac{u_2^2}{2g},$$

avec  $h_2 = h_c$  et  $u_2 = Q/(W_2 h_2)$ . Comme  $Fr = 1$ , on en déduit que

$$h_2 = h_c = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{gW_2^2}}$$

On a donc  $Fr = 1 \Rightarrow u_2^2/(2g) = h_c/2$  et donc

$$E_2 = \Delta z + \frac{3}{2}h_2,$$

### Question (b)

Par définition, on a

$$E_1 = \Delta z + h_1 + \frac{u_1^2}{2g}$$

avec  $u_1 = Q/(W_1 h_1)$ .

### Question (c)

Les deux points étant sur le même plan, il y a égalité des énergies spécifiques en l'absence de perte de charge. Donc

$$E_1 = \Delta z + h_1 + \frac{u_1^2}{2g} = E_2 \Rightarrow h_1 + \frac{Q^2}{2gW_1^2 h_1^2} = \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{Q^2}{gW_2^2}}$$

ou bien encore

$$Q = \frac{2\sqrt{2g}}{3\sqrt{3}} W_2 \left( h_1 + \frac{Q^2}{2gW_1^2 h_1^2} \right)^{3/2}$$

### **Question (d)**

AN:  $Q = 3,5 \text{ m}^3/\text{s.}$

### **Question (e)**

Comme l'écoulement est subcritique, on peut supposer que l'énergie cinétique est bien plus faible que la pression, donc

$$h_1 \gg \frac{Q^2}{2gW_1^2h_1^2}$$

Il s'ensuit alors

$$Q \approx \frac{2\sqrt{2g}}{3\sqrt{3}} W_2 h_1^{3/2}$$

AN  $Q = 3,41 \text{ m}^3/\text{s.}$  L'erreur relative est donc

$$\frac{\Delta Q}{Q} = \frac{3,41 - 3,5}{3,5} = -2,6 \%$$

## Correction du problème 6

### Question (a)

La hauteur normale s'obtient en égalant force de frottement et composante motrice de la gravité :

$$\chi\tau_p = \varrho g Si,$$

et comme on utilise la loi de Manning-Strickler, il vient :

$$\chi \frac{\varrho g}{K^2} \frac{\bar{u}^2}{R_h^{1/3}} = \varrho g Si,$$

et après élimination, on obtient une équation implicite

$$Q^2 = K^2 S^{10/3} \chi^{-4/3} i. \quad (6)$$

### Question (b)

Le calcul de la surface mouillée a été vu en cours. On considère une surface infinitésimale

$$dS = 2R \sin \theta \times dz \quad (7)$$

avec :

$$z = R \cos \theta \text{ et } dz = -R \sin \theta d\theta.$$

L'angle  $\theta$  est donné par

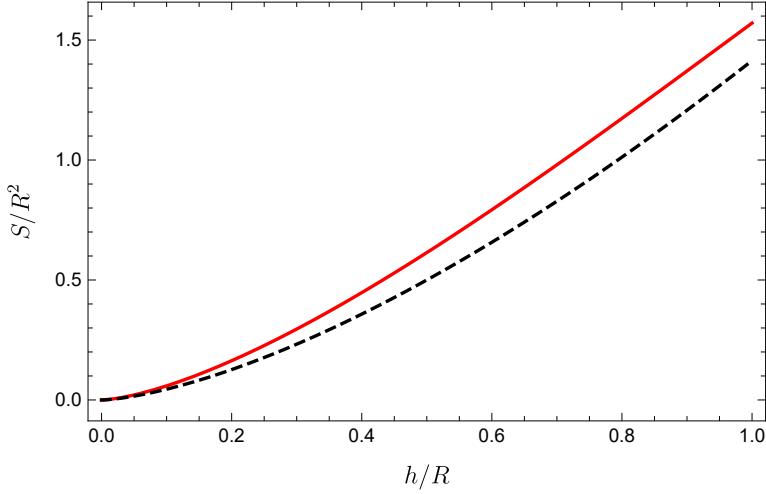
$$\theta = \arccos \left( 1 - \frac{h}{R} \right).$$

L'intégration donne

$$S = R^2(\theta - \cos \theta \sin \theta).$$

$S$  et  $\tilde{S}$  sont deux fonctions croissantes de  $h$ , qui sont nulles pour  $h = 0$  et atteignent les valeurs maximales respectives (pour  $\theta = \pi/2$ ):

$$S_{max} = \frac{\pi}{2} R^2 \text{ et } \tilde{S}_{max} = \sqrt{2} R^2.$$



**Figure 6** –: Variation de  $S$  (trait continu) et  $\tilde{S}$  (trait discontinu) en fonction de  $h$ . Les variables ont été adimensionnalisées.

L'erreur relative maximale commise est donc :

$$\epsilon = 1 - \frac{\frac{\pi}{2}R^2}{\sqrt{2}R^2} = 1 - \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx -11 \text{ \%}.$$

On pourrait obtenir une meilleure approximation de la surface mouillée en faisant un développement limité à l'ordre 2. En effet, on a

$$\arccos x = \sqrt{2}\sqrt{x} + \frac{x^{3/2}}{6\sqrt{2}} + O(x^{5/2}),$$

et

$$\sqrt{x(2-x)} = \sqrt{2}\sqrt{x} - \frac{x^{3/2}}{2\sqrt{2}} + O(x^{5/2}).$$

On montre ainsi en posant  $\xi = h/R$  que

$$S = \frac{4}{3}\sqrt{2}R^2\xi^{3/2} + O(x\xi^{5/2}) = \frac{4}{3}\sqrt{2Rh^3} + O(x\xi^{5/2}).$$

Ce développement est plus précis pour  $h \rightarrow 0$ , mais il l'est moins pour  $h \rightarrow R$  (l'erreur atteignant 20 %).

## Question (c)

La charge spécifique est

$$H_s = h + \frac{Q^2}{2gS^2}.$$

Comme  $S \propto \sqrt{h}$ , on a  $H_s \propto h^{-1}$  quand  $h \rightarrow 0$  (domaine supercritique) et  $H_s \propto h$  quand  $h \rightarrow \infty$  (domaine subcritique). Il existe un minimum de  $H_s$  atteint quand la dérivée de  $H_s$  s'annule :

$$\frac{dH_s}{dh} = 1 - \frac{2Q^2}{2gS^3} \frac{dS}{dh} = 0 \Rightarrow 1 = \frac{Q^2}{gS^3} \frac{dS}{dh}.$$

On peut transformer cette égalité en introduisant le nombre de Froude

$$Fr^2 = \frac{Q^2}{gS^3} \frac{dS}{dh}. \quad (8)$$

La hauteur  $h_c$  qui vérifie  $Fr = 1$  est la hauteur critique. C'est une équation implicite.

## Question (d)

Avec  $\tilde{S} = \sqrt{Dh^3}$ , on a d'après (6) et le développement asymptotique  $\theta = \arccos(1 - h/R) = \sqrt{2h/R}$  pour  $h \ll R$  (l'erreur commise quand  $h \rightarrow R$  est de l'ordre de 10 %) :

$$Q^2 = K^2 S^{10/3} \chi^{-4/3} i \approx K^2 i \frac{(2Rh^3)^{5/3}}{(2hR)^{2/3}}$$

En regroupant les puissances de  $h$ , on déduit

$$\frac{Q^2}{2K^2 i R} = h_n^{13/3}$$

On obtient la solution recherchée

$$h_n = \left( \frac{Q^2}{2K^2 i R} \right)^{3/13}. \quad (9)$$

Pour la hauteur critique, on a moins de travail. D'après (8) et en servant toujours de  $\tilde{S} = \sqrt{Dh^3}$ , on a

$$Fr^2 = 1 = \frac{Q^2}{g(2Rh^3)^{3/2}} \frac{3}{2} (2Rh)^{1/2} = \frac{3}{4} \frac{Q^2}{gRh^4}.$$

On en déduit une approximation de la hauteur critique

$$h_c = \left( \frac{3}{4} \frac{Q^2}{gR} \right)^{1/4}. \quad (10)$$

Comme le montre la figure 7, l'approximation  $\tilde{S} = \sqrt{Dh^3}$  permet d'obtenir les hauteurs normale et critique avec une erreur relative maximale de 13 % pour la gamme de débits testés.

### Question (e)

On fait l'application numérique et on trouve:  $h_n = 13$  cm,  $h_c = 35$  cm. La résolution des équations implicites (6) et (8) donne  $h_n = 14,3$  cm,  $h_c = 32$  cm. Le régime est supercritique puis que  $h_n < h_c$ . L'ordre de grandeur de l'incertitude est 10 %. L'écart entre  $h_n$  et  $h_c$  est un ordre de grandeur supérieur à cette incertitude, donc même en résolvant les équations implicites (6) et (8), le régime ne changera pas de nature. En régime supercritique, la condition à la limite se place à l'amont.

Le nombre de Froude vaut:

$$Fr = \sqrt{\frac{3}{4} \frac{Q^2}{gRh^4}} = 7,3.$$

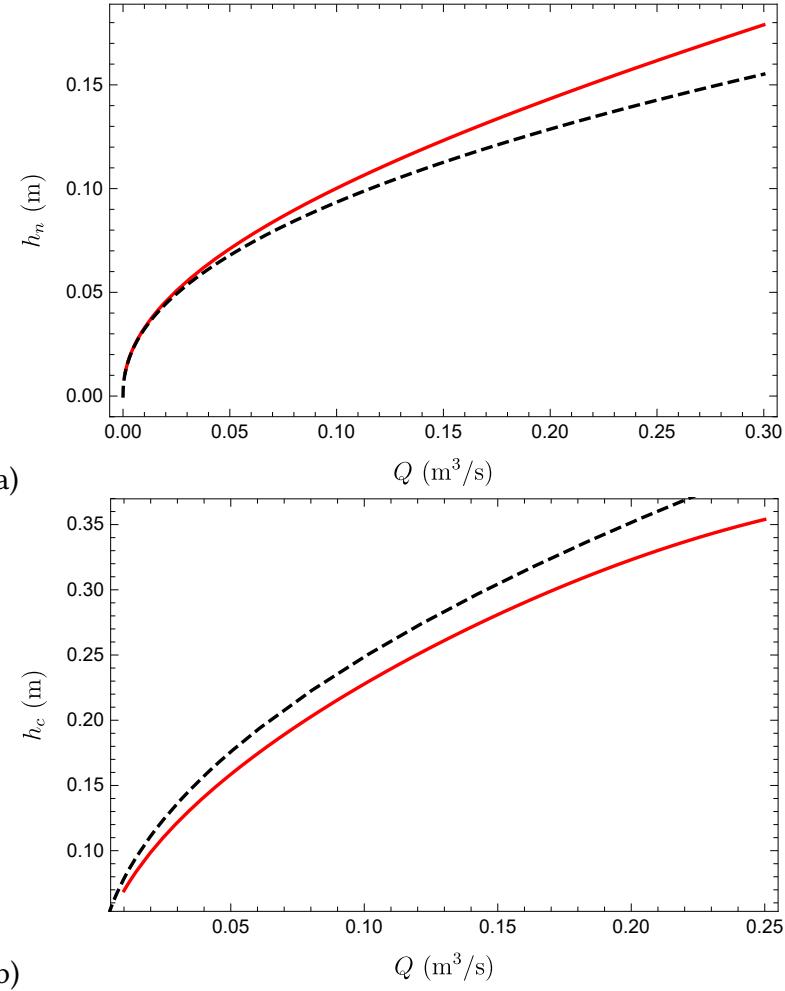
### Question (f)

En régime permanent, la charge s'écrit

$$H = z + h + \frac{Q^2}{2gS^2}.$$

En différentiant par rapport à  $x$ , on obtient

$$\frac{dH}{dx} = \frac{dz}{dx} + \frac{dh}{dx} - 2 \frac{Q^2}{2gS^3} \frac{dS}{dx},$$



**Figure 7** –: Variation de la hauteur normale  $h_n$  et de la hauteur critique  $h_c$  en fonction du débit  $Q$ . Les courbes continues sont les solutions aux équations implicites (6) et (8), respectivement, et les courbes en tireté sont les solutions approchées (9) et (10).

soit encore, après introduction de la pente d'énergie  $j_f$  et de la pente du fond  $i$ :

$$\frac{dH}{dx} = -j_f = -i + \frac{dh}{dx} - \frac{Q^2}{gS^3} \frac{dS}{dh} \frac{dh}{dx}.$$

On reconnaît le nombre de Froude (8), et on peut écrire :

$$\frac{dh}{dx} = \frac{i - j_f}{1 - Fr^2}.$$

Avec l'approximation  $\tilde{S} = \sqrt{Dh^3}$  et les expressions approchées (9) et (10) des hauteur normale et critique, on a

$$\frac{dh}{dx} = i \frac{1 - \frac{\bar{u}^2}{iK^2R_h^{4/3}}}{1 - \frac{3}{4} \frac{Q^2}{gRh^4}}.$$

Si on considère le numérateur, on a

$$\frac{\bar{u}^2}{iK^2R_h^{4/3}} = \frac{S_n^{10/3}}{S^{10/3}} \frac{\chi_h^{4/3}}{\chi_n^{10/3}},$$

où  $s_n$  et  $\chi_n$  sont les surface et périmètre mouillés. En servant de l'équation (9), on peut simplifier

$$\frac{S_n^{10/3}}{\chi_n^{4/3}} = 2Rh_n^{13/3}.$$

On peut faire de même pour les autres termes et on trouve finalement

$$\frac{dh}{dx} = i \frac{1 - (h_n/h)^p}{1 - (h_c/h)^q},$$

avec  $p = 13/3$  et  $q = 4$ .

### Question (g)

Le calcul de la force de pression nécessite de reprendre les éléments de calcul vus à la question (b). La force infinitésimale de pression s'écrit :

$$d\mathbf{F}_p = -p(z)\mathbf{n}dS,$$

avec  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_x$  la normale à  $S_0$ ,  $p = \varrho g(h_0 - z')$  la pression hydrostatique, et  $dS$  donné par (7):  $dS = 2R^2 \sin^2 \theta d\theta$ . On a  $z = R \cos \theta$  (position par rapport à

l'axe de la conduite) et  $z' = R - z$  (position par rapport au fond de la conduite). On a donc en projection sur l'axe  $x$

$$dF_p = 2\varrho g R^2 (h_0 - R + R \cos \theta) \sin^2 \theta d\theta,$$

que l'on intègre sur  $[0, \theta_0]$  avec  $\theta_0 = \arccos(1 - h_0/R)$ . L'intégration donne

$$F_p = \frac{1}{3} \varrho g R^3 (2 \sin^3(\theta) + 3(\xi - 1)(\theta - \sin(\theta) \cos(\theta))),$$

avec  $\xi = h/R$  et  $\theta = \arccos(1 - h/R)$ . On peut aussi tout mettre en fonction de  $\theta$

$$F_p = \frac{1}{12} \varrho g R^3 (9 \sin \theta + \sin(3\theta) - 12\theta \cos \theta), \quad (11)$$

ou bien de  $\xi$

$$F_p = \frac{1}{3} \varrho g R^3 \left( \sqrt{(2 - \xi)\xi} (\xi^2 - 2\xi + 3) + 3(\xi - 1) \cos^{-1}(1 - \xi) \right) \quad (12)$$

Comme le montre l'analyse rapide de (11),  $F_p$  est une fonction croissante de  $\theta$  ( $F_p \propto \theta^5$ ). L'erreur est donc maximale quand  $\theta = \Pi/2$ , et on trouve alors que

$$F_p = \frac{2}{3} \varrho g R^3,$$

alors que l'approximation proposée dans l'énoncé donne

$$\tilde{F}_p = \frac{3}{4} \varrho g R^3,$$

soit une erreur relative de 12,5 %. L'approximation semble correcte. On peut réitérer cela en deux ou trois points pour vérifier que l'approximation est correcte.

On peut le démontrer de façon plus rigoureuse en faisant un développement limité à l'ordre 3 en  $\xi = 0$  de (12) donne

$$F_p = \frac{8}{15} \sqrt{2} \xi^{5/2} \varrho g R^3 + O(\xi^{7/2}) \quad (13)$$

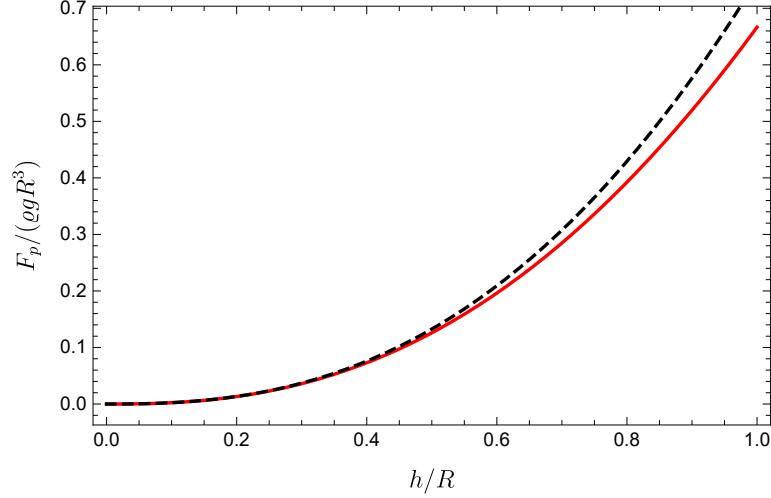
et une application numérique montre que

$$\frac{8}{15} \sqrt{2} = 0,7542 \approx \frac{3}{4}.$$

On va donc pouvoir se servir de l'approximation de la force de pression sur  $S_0$ :

$$\tilde{F}_p = \frac{3}{4} \xi^{5/2} \varrho g R^3 \quad (14)$$

avec  $\xi_0 = h_0/R$ . La figure 8 montre le bon accord entre solution théorique et approximation.



**Figure 8** –: Variation de la force de pression  $F_p$  en fonction de la hauteur  $h$ : calcul exact représentant (12) (trait continu) et approché (13) (trait discontinu).

## Question (h)

La projection du flux de quantité de mouvement à travers  $S_0$  s'écrit

$$\Phi_0 = \int_{S_0} \varrho \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_x (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS = -\varrho u_0^2 S_0,$$

puisque la vitesse est uniforme. La conservation du débit impose:  $u_0 = Q/S_0$ . D'où le résultat demandé

$$\Phi_0 = -\varrho \frac{Q^2}{S_0},$$

et en se servant de l'approximation  $\tilde{S}_0 = \sqrt{2R h_0^3}$ , on déduit

$$\tilde{\Phi}_0 = -\varrho \frac{Q^2}{\tilde{S}_0} = -\varrho \frac{Q^2}{\sqrt{2R h_0^3}}. \quad (15)$$

## Question (i)

Comme les hypothèses sont identiques à celles utilisées pour la question (8), on déduit immédiatement

$$\Phi_e = \varrho \frac{Q^2}{S_e},$$

et en se servant de l'approximation  $\tilde{S}_e = \sqrt{2Rh_e^3}$ , on déduit

$$\tilde{\Phi}_e = \varrho \frac{Q^2}{\tilde{S}_e} = \varrho \frac{Q^2}{\sqrt{2Rh_e^3}}. \quad (16)$$

## Question (j)

La conservation de la quantité de mouvement s'écrit

$$\frac{d}{dt} \int_V \varrho \mathbf{u} dV + \int_S \varrho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS = \varrho V \mathbf{g} + \int_S \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (17)$$

et donc en projetant sur  $x$ , en considérant un régime permanent (donc pas de terme d'accélération) et les hypothèses de l'énoncé, on aboutit à une équation relativement simple

$$F_p + \Phi_0 = \Phi_e. \quad (18)$$

On peut simplifier cette équation à l'aide des approximations (14), (15) et (16) vues précédemment :

$$\tilde{F}_p + \tilde{\Phi}_0 = \tilde{\Phi}_e,$$

soit encore

$$\frac{3}{4} \xi^{5/2} \varrho g R^3 + \varrho \frac{Q^2}{\sqrt{2Rh_0^3}} = \varrho \frac{Q^2}{\sqrt{2Rh_e^3}}.$$

On divise cette équation par  $\tilde{F}_p$  :

$$1 + \frac{4}{3} \frac{Q^2}{gR^3 \sqrt{2Rh_0^3} \xi_0^{5/2}} = \frac{4}{3} \frac{Q^2}{gR^3 \sqrt{2Rh_e^3} \xi_0^{5/2}}.$$

Comme on a  $\xi_0 = h_0/R$ , on peut tout exprimer en fonction de  $h_0$  :

$$1 + \frac{4}{3} \frac{Q^2}{gR\sqrt{2}h_0^4} = \frac{4}{3} \frac{Q^2}{gR\sqrt{2}h_0^4} \left( \frac{h_0}{h_e} \right)^{3/2}.$$

On identifie le nombre de Froude donné dans l'énoncé et trouvé également à la question (4), et cela nous conduit à

$$1 + \frac{16}{9\sqrt{2}} Fr_0^2 = \frac{16}{9\sqrt{2}} Fr_0^2 Y^{-3/2}.$$

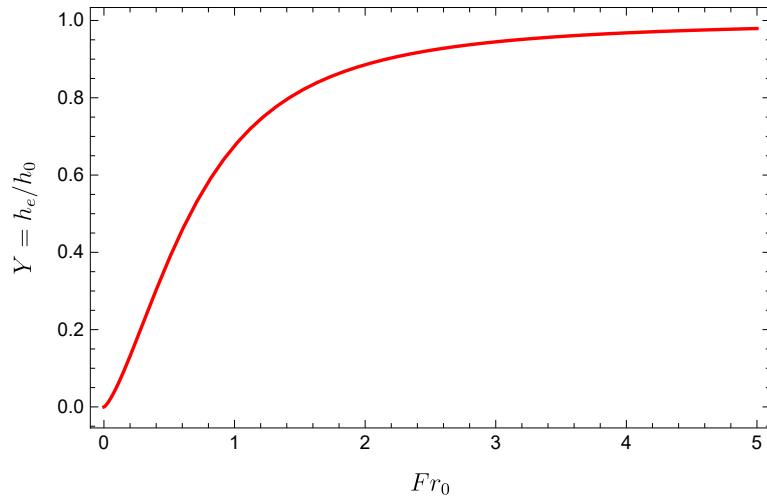
Le résultat est immédiat

$$Y = \left( \frac{\frac{16}{9\sqrt{2}} Fr_0^2}{1 + \frac{16}{9\sqrt{2}} Fr_0^2} \right)^{2/3}.$$

Soit encore, après réarrangement des termes :

$$Y \approx \left( \frac{Fr_0^2}{0,8 + Fr_0^2} \right)^{2/3}.$$

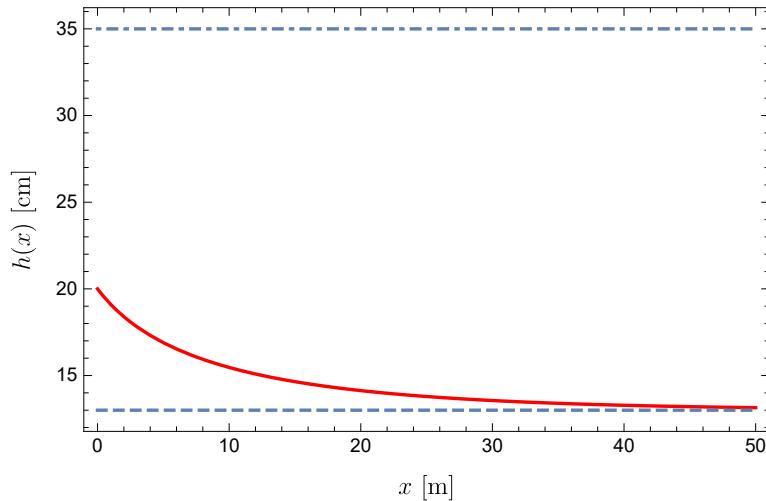
Avec les valeurs trouvées à la question (5), on trouve :  $Y = 0,99$ . C'est un résultat sans surprise : à grand nombre de Froude, la perturbation causée par la formation d'un jet est minime. La figure 9 montre l'allure de la courbe  $Y$ .



**Figure 9** –: Variation de la  $Y$  en fonction du nombre de Froude  $Fr_0$ .

## Question (k)

On a un régime supercritique. La condition à la limite est donnée par l'amont. La condition initiale est entre les hauteurs normale  $h_n$  et critique  $h_c$ , donc la courbe de remous va tendre vers  $h_n$  (voir figure 10).



**Figure 10** –: Courbe de remous (trait continu) et hauteurs normale  $h_n$  (trait discontinu) et critique  $h_c$  (trait pointillé).

## Question (l)

Si la conduite est suffisamment longue et le régime supercritique, la hauteur d'eau à la sortie de la conduite est très proche de la hauteur normale. On peut donc calculer la courbe de débitance en servant de l'équation (9) de la hauteur normale. Il s'agit d'une approximation précise à environ 10 %. Avec une simple règle, on peut mesurer la hauteur  $h_e$  et en déduire  $Q$  avec une précision de l'ordre de 10 %.