Mécanique des fluides

Section de génie civil

Écoulements en charge

Problème 1 : château d'eau

Les châteaux d'eau sont des réservoirs d'eau qui servent à stocker l'eau, à la distribuer sous pression dans un réseau gravitaire, et à équilibrer les variations de demandes et d'approvisionnement en eau. La figure 1 montre un château d'eau, situé sur le plateau au nord de Lausanne, d'une hauteur de 40 m.

On étudie un réseau gravitaire simplifié alimenté par un château d'eau (réservoir) qui alimente un village (point C) et qui est relié au réseau principal d'adduction d'eau (point A).

Les caractéristiques du réseau sont les suivantes :

- rayon du château d'eau $R = 20$ m ;
- hauteur d'eau dans le réservoir $h = 20$ m ;
- cotes $z_f = 50$ m, $z_e = 30$ m, $z_d = z_b = z_a = 0$ m, et $z_c = 10$ m ;
- caractéristiques des conduites par tronçon

tronçon	ED	DB	BA	BC
diamètre d [cm]	50	50	30	20
longueur L [m]	100	500	200	100

Les coefficients de perte de charge singulière sont les suivants :

- rétrécissement brutal d'une section de diamètre d_1 à une section de diamètre d_2 :

$$\Delta H_s = \zeta \frac{\bar{u}_2^2}{2g} \text{ avec } \zeta = \left(1 - \frac{1}{0{,}59 + 0{,}41\beta^6}\right)^2,$$

  avec $\beta = d_2/d_1 < 1$;

Figure 1 –: Château d'eau de Goumoens-la-Ville (VD). Source : Wikimedia.

– élargissement brutal d'une section de diamètre d_1 à une section de diamètre d_2 :

$$\Delta H_s = \zeta \frac{\bar{u}_1^2}{2g} \text{ avec } \zeta = \left(1 - \beta^{-2}\right)^2$$

avec $\beta = d_2/d_1 > 1$;
– coude en D (avec un angle $\theta = \pi/2$) : $\zeta = \sin^2(\theta/2) + 2\sin^4(\theta/2) = 1$
– entrée dans un réservoir depuis une conduite : $\zeta = 1$ (quelles que soient les sections) ;
– entrée depuis un réservoir (de section S_1) dans une conduite (de section S_2) : $\zeta = 0{,}57$;
– embranchement d'une section S_1 vers des conduites de section S_2 et S_3 :

$$\Delta H_s = \zeta \frac{\bar{u}_1^2}{2g} \text{ avec } \zeta = 1{,}3$$

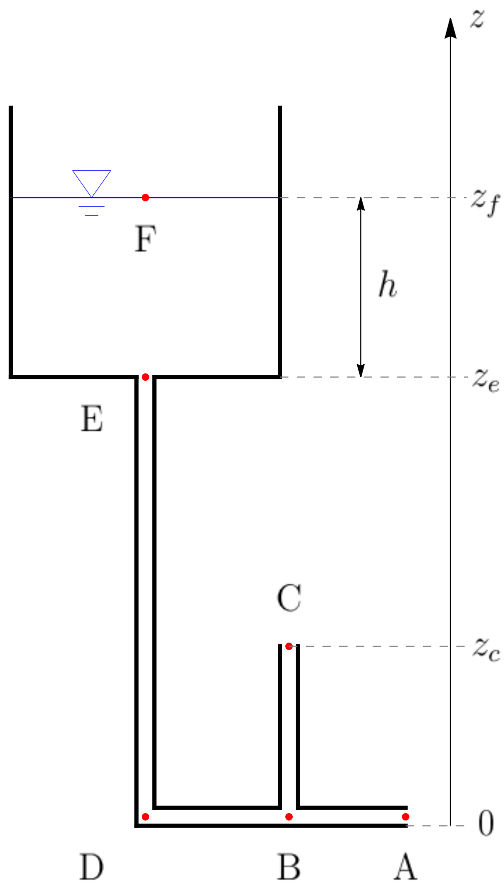


Figure 2 –: Schéma de fonctionnement du réseau gravitaire étudié.

(quelles que soient les sections et les vitesses à travers ses sections) ;
- sortie ou entrée des conduites en C et A : on prendra $\zeta = 0$.

On utilisera la formule de Darcy-Weisbach pour la perte de charge régulière pour une conduite de longueur L et diamètre D :

$$\Delta H = f \frac{L}{D} \frac{\bar{u}^2}{2g},$$

avec un coefficient de frottement $f = 0{,}005$.

(a) [0,50] Dans un premier temps, on néglige les pertes de charge dans le réseau.

Écrire la conservation de la charge entre E (ou bien F) et A, puis entre E (ou F) et C, en l'absence de pertes de charge. Que valent les débits à la sortie en A et en C ? (On supposera que ces deux sorties sont à une pression égale à la pression atmosphérique).

(b) [0,50] Que vaut la vitesse en D si la sortie en C est fermée (la sortie en A restant ouverte) et toujours dans l'hypothèse où les pertes de charge sont négligeables ? Quelle est la pression qui s'exerce au point D du coude ?

(c) [0,50] Calculer la vitesse en D et la pression si maintenant les deux sorties sont ouvertes.

(d) [0,75] Refaire le calcul du débit en A en prenant en compte les pertes de charge entre E et A, et en supposant que la sortie en C est fermée.

(e) [0,75] On considère maintenant qu'une pompe placée en A permet le remplissage du réservoir du château d'eau. On considère que la sortie C est fermée. Montrer que la perte de charge de l'écoulement de A vers E peut s'écrire sous forme compacte :

$$\Delta H_{A\to E} = \Gamma \frac{u_E^2}{2g}$$

avec Γ une constante à déterminer et u_E la vitesse dans la conduite DE. Écrire la conservation de la charge entre A et E en tenant compte des pertes de charge, de la charge fournie par la pompe, et du rapport de diamètre $\beta = d_{BA}/d_{EB}$; à cet effet, on continuera de supposer que (i) le débit est constant entre A et E, (ii) la pression en A est la pression atmosphérique, (iii) la hauteur h dans le réservoir reste constante. La courbe caractéristique de la pompe est de la forme :

$$H_p = \gamma - \alpha Q^2,$$

avec $\gamma = 100$ m la charge à vide et $\alpha = 0{,}5$ s^2·m^{-5}. Montrer qu'on peut écrire cette caractéristique sous la forme

$$H_p = \gamma - \delta \frac{u_E^2}{2g}$$

et calculer δ. En déduire la vitesse u_E en E en fonction de z_f, γ, Γ et β. Déterminer le débit refoulé par la pompe vers le réservoir.

Correction du problème 1

Question (a)

Si on néglige les pertes de charges et qu'on considère une ligne de courant entre A et F, qu'on suppose l'écoulement permanent avec une vitesse en E nulle (comme $d \ll 2R$ on peut appliquer la formule de Torricelli), alors on déduit

$$\frac{u_A^2}{2g} + z_A = z_f \Rightarrow u_A = \sqrt{2gz_f} = 31{,}3 \text{ m/s}$$

avec $z_f = 50$ m (la question se pose s'il faut définir l'altitude de A comme $z_a = 0$ ou bien comme le milieu de la conduite $z_a = 15$ cm, mais une simple application numérique montre que cela ne change le résultat que de quelques pourcent). Le débit sortant en A est :

$$Q_A = \pi\frac{d_{BA}^2}{4}\sqrt{2gz_f} = 2{,}2 \text{ m}^3/\text{s}.$$

On fait de même pour le point C

$$u_C = \sqrt{2g(z_f - z_c)} = 28{,}0 \text{ m/s}.$$

Le débit sortant en A est :

$$Q_C = \pi\frac{d_{BC}^2}{4}\sqrt{2g(z_f - z_c)} = 0{,}88 \text{ m}^3/\text{s}.$$

Question (b)

On considère tout d'abord que la sortie C est fermée. En l'absence de pertes de charge, l'équation de Bernoulli entre F et D s'écrit

$$z_f + 0 + 0 = z_d + \frac{u_D^2}{2g} + \frac{p_D}{\varrho g},$$

car la vitesse et la pression en F sont nulles, et on a posé $z_d = 0$. La conservation du débit implique que

$$\frac{\pi}{4}d_{ED}^2 u_D = \frac{\pi}{4}d_{BA}^2 u_A \Rightarrow u_D = \beta^2 u_A$$

où $\beta = d_{BA}/d_{EB} = 3/5$.

On déduit

$$u_D = \beta^2 \sqrt{2gz_f} = 11{,}3 \text{ m/s}$$

et

$$p_D = \varrho g z_f - \frac{1}{2}\varrho u_D^2 = \varrho g z_f - \frac{1}{2}\varrho \beta^4 2g z_f = \varrho g z_f(1-\beta^4) = 427 \text{ kPa}.$$

Question (c)

On considère maintenant que les sorties A et C sont ouvertes. L'équation de Bernoulli entre F et D s'écrit

$$z_f = \frac{u_D^2}{2g} + \frac{p_D}{\varrho g},$$

or la conservation du débit implique que le débit dans ED vaut la somme des débits dans BA et BC

$$\frac{\pi}{4} d_{ED}^2 u_D = \frac{\pi}{4} d_{BA}^2 u_A + \pi d_{BC}^2 u_C \Rightarrow u_D = \beta_a^2 u_A + \beta_c^2 u_C$$

où $\beta_a = d_{BA}/d_{EB} = 3/5$ et $\beta_c = d_{BC}/d_{EB} = 2/5$.

On déduit

$$u_D = \beta_a^2 \sqrt{2gz_f} + \beta_c^2 \sqrt{2g(z_f - z_c)} = 15{,}8 \text{ m/s}$$

et

$$p_D = \varrho g z_f - \frac{1}{2}\varrho u_D^2 = 366 \text{ kPa}.$$

Question (d)

On recommence le calcul en prenant en compte les pertes de charge en E et A :

- Pertes de charge régulières le long des conduites

$$\Delta H_r = f\frac{L_{EB}}{d_{EB}}\frac{u_E^2}{2g} + f\frac{L_{BA}}{d_{BA}}\frac{u_A^2}{2g},$$

avec $L_{EB} = L_{ED} + L_{DB} = 600$ m la longueur totale de la conduite entre les points E et B, et $d_{EB} = 0{,}5$ m son diamètre. On peut écrire cette équation sous une forme ne faisant intervenir qu'une seule vitesse, par exemple u_E (le choix est arbitraire) :

$$\Delta H_r = f\left(\frac{L_{EB}}{d_{EB}} + \beta^{-4}\frac{L_{BA}}{d_{BA}}\right)\frac{u_E^2}{2g},$$

où $\beta = d_{BA}/d_{EB} = 3/5$ et l'on s'est servi de la conservation du débit :

$$\frac{\pi}{4}d_{DB}^2 u_E = \frac{\pi}{4}d_{BA}^2 u_A \Rightarrow u_A = \beta^{-2}u_E$$

- Pertes de charge singulières :
  - en E (entrée dans une conduite depuis un réservoir) :

$$\Delta H_E = \zeta_e \frac{u_E^2}{2g} \text{ avec } \zeta_e = 0{,}57$$

  - en D (coude) :

$$\Delta H_D = \zeta_d \frac{u_E^2}{2g} \text{ avec } \zeta_d = 1$$

  - en B (embranchement) :

$$\Delta H_{B,1} = \zeta_{b,1} \frac{u_E^2}{2g} \text{ avec } \zeta_{b,1} = 1{,}3$$

  - en B (contraction) :

$$\Delta H_{B,2} = \zeta_{b,2} \frac{u_A^2}{2g} = \zeta_{b,2}\beta^{-4}\frac{u_E^2}{2g} \text{ avec } \zeta_{b,2} = (1-1/(0{,}59+0{,}41\beta^6))^2 = 0{,}41.$$

La charge à la sortie A est

$$H_A = \frac{u_A^2}{2g} + z_a + p_a = \frac{u_A^2}{2g} + 0 + 0 = \beta^{-4}\frac{u_E^2}{2g},$$

et celle en E (du côté du réservoir, donc juste au-dessus de l'entrée de la conduite, ce qui implique $u_E = 0$; pour éviter toute confusion, il peut être préférable de prendre la ligne de courant AF)

$$H_E = \frac{u_E^2}{2g} + z_E + p_E = 0 + z_e + h.$$

La conservation de la charge entre les points E et A doit prendre en compte les pertes de charge singulière et régulière :

$$\beta^{-4}\frac{u_E^2}{2g} + \left(f\frac{L_{EB}}{d_{EB}} + \beta^{-4}f\frac{L_{BA}}{d_{BA}} + \zeta_e + \zeta_d + \zeta_{b,1} + \beta^{-4}\zeta_{b,2}\right)\frac{u_E^2}{2g} = z_e + h. \quad (1)$$

Comme $z_e + h = z_f$, on trouve facilement

$$u_E = \sqrt{\frac{2gz_f}{\beta^{-4} + f\frac{L_{EB}}{d_{EB}} + \beta^{-4}f\frac{L_{BA}}{d_{BA}} + \zeta_e + \zeta_d + \zeta_{b,1} + \beta^{-4}\zeta_{b,2}}} = 4{,}64 \text{ m/s},$$

ou encore

$$u_A = \beta^{-2}u_E = 12{,}9 \text{ m/s}.$$

Le débit sortant vaut

$$Q_A = \pi\frac{d_{BA}^2}{4}u_A = 912 \text{ L/s}.$$

Question (e)

La relation de perte charge entre A et E est identique à la perte de charge utilisée dans l'équation (1)

$$\Delta H_{A\to E} = \left(f\frac{L_{EB}}{d_{EB}} + \beta^{-4}f\frac{L_{BA}}{d_{BA}} + \zeta_e + \zeta_d + \zeta_{b,1} + \beta^{-4}\zeta_{b,2}\right)\frac{u_E^2}{2g}, \qquad (2)$$

que l'on peut écrire sous forme compacte :

$$\Delta H_{A\to E} = \Gamma\frac{u_E^2}{2g} \text{ avec } \Gamma = f\frac{L_{EB}}{d_{EB}} + \beta^{-4}f\frac{L_{BA}}{d_{BA}} + \zeta_e + \zeta_d + \zeta_{b,1} + \beta^{-4}\zeta_{b,2}.$$

On prendra garde que l'écoulement se fait maintenant de A vers E, donc les pertes de charge singulières en E et B sont différentes :

– en E (entrée depuis une conduite dans un réservoir) :

$$\Delta H_E = \zeta_e\frac{u_E^2}{2g} \text{ avec } \zeta_e = 1$$

– en D (coude) :

$$\Delta H_D = \zeta_d\frac{u_E^2}{2g} \text{ avec } \zeta_d = 1$$

– en B (embranchement) :

$$\Delta H_{B,1} = \zeta_{b,1}\frac{u_E^2}{2g} \text{ avec } \zeta_{b,1} = 1{,}3$$

– en B (expansion) :

$$\Delta H_{B,2} = \zeta_{b,2}\frac{u_A^2}{2g} = \zeta_{b,2}\beta^{-4}\frac{u_E^2}{2g} \text{ avec } \zeta_{b,2} = (1-\beta^2)^2 = 0{,}41.$$

On trouve donc que

$$\Gamma = 38{,}2.$$

La pompe a une charge

$$H_p = \gamma - \alpha Q^2 = \gamma - \delta\frac{u_E^2}{2g} \text{ avec } \delta = \alpha\frac{\pi^2}{8}gD_{ED}^4 = 0{,}38. \tag{3}$$

En introduisant les deux équations (2) et (3) dans l'équation de Bernoulli considérée entre les points E et A, on a

$$H_E + \Delta H_{A\to E} = H_p + H_A, \tag{4}$$

avec

$$H_E = \frac{u_E^2}{2g} + h + z_e \text{ et } H_A = \frac{u_A^2}{2g} = \beta^{-4}\frac{u_E^2}{2g}$$

Quand on substitue dans l'équation (4) et comme $z_e + h = z_f$, on a

$$(1-\beta^{-4})\frac{u_E^2}{2g} + z_f + \Gamma\frac{u_E^2}{2g} = \gamma - \delta\frac{u_E^2}{2g},$$

soit encore

$$\frac{u_E^2}{2g}\left(1-\beta^{-4}+\delta+\Gamma\right) = \gamma - z_f,$$

et de là on déduit la vitesse

$$u_E = \sqrt{\frac{2g(\gamma - z_f)}{1-\beta^{-4}+\delta+\Gamma}} = 5{,}55 \text{ m/s}$$

Le débit de pompage est

$$Q = \pi\frac{d_{ED}^2}{4}u_E = 1{,}09 \text{ m}^3/\text{s}.$$

Exercices suggérés

Problème 13 : fonctionnement d'un déversoir

On étude un déversoir de crue sur une digue en remblai. Ce déversoir est un canal de section rectangulaire de largeur $b = 3$ m et de hauteur 8 m. Il évacue les eaux d'un plan d'eau, dont le niveau des plus hautes eaux se situe à la cote 18 m. La crête du déversoir se situe à la cote $z_a = 15$ m (point A sur la figure 1). Il s'ensuit que la différence de hauteur d'eau au-dessus de la crête du déversoir (en A) est $\Delta h = 3$ m. Le niveau des plus hautes eaux est constant, et il est donc possible de considérer l'écoulement comme permanent.

Le déversoir est constitué :

- d'un coursier raide en béton (entre A et B sur la figure 3), puis
- d'un tronçon horizontal également en béton (entre B et C sur la figure 3).

Le tronçon terminal se termine par un seuil de forme triangulaire (CDE sur la figure 3, triangle isocèle en son sommet D) de hauteur a. La pente de chaque côté du seuil est 5H:1V.

Le déversoir débouche sur un canal en terre battue (entre E et F sur la figure 3) de longueur $L = 400$ m et de pente $i = 1$ %. Le bief EF est de section trapézoïdale avec des pentes latérales 1H:1V et une base $\ell = 2$ m.

On néglige les pertes de charge par frottement sur tout le déversoir entre les points A et E. En cas de formation d'un ressaut hydraulique, il faut prendre en compte la perte de charge singulière associée au ressaut. On ignore toute autre perte de charge singulière au niveau de la digue ou du seuil.

Pour le bief EF, le lit a une rugosité (Manning-Strickler) $K = 50$ m$^{1/3}$/s.

(a) En supposant que la crête du déversoir est assimilable à un seuil, déduisez ce que valent la hauteur et le débit Q en ce point.

(b) Calculer les charge hydraulique H_B, hauteur h_B et vitesse u_B au point B. Quel est le régime d'écoulement ?

(c) Si on veut qu'il se forme un ressaut entre B et C, quelle est la longueur minimale qu'il faut prévoir entre ces deux points ?

(d) On suppose que la condition sur la longueur entre B et C est vérifiée et qu'un ressaut se forme. Que valent les H_C, hauteur h_C et vitesse u_C au point C ? Quelle

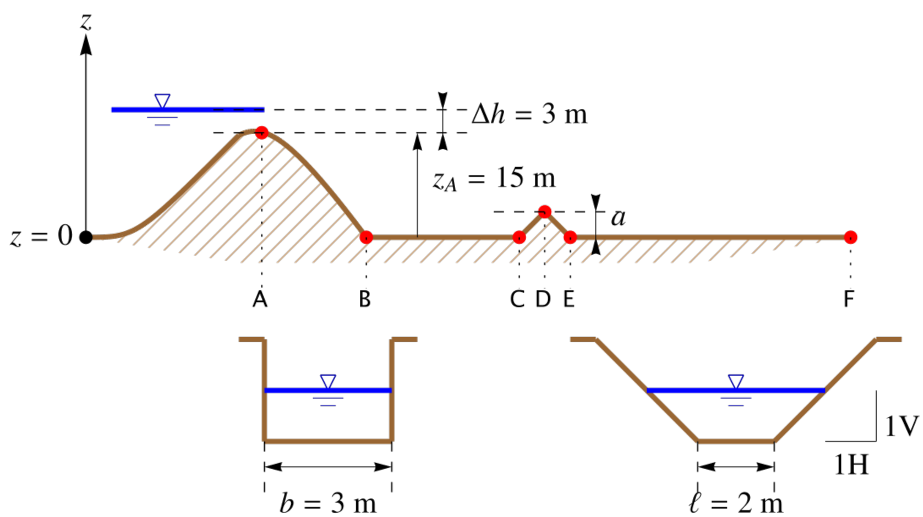


Figure 3 –: Schéma de principe. L'échelle et les proportions ne sont pas respectées. Le déversoir est un canal rectangulaire qui va du sommet A de la digue au sommet du seuil D. Il se poursuit par un canal trapézoïdal de longueur L entre les points E et F.

est la perte de charge due au ressaut ? Le ressaut est-il un moyen efficace de dissiper l'énergie de l'écoulement ? On supposera que la hauteur à l'amont du ressaut est h_B.

(e) Peut-on calculer les hauteurs critique et normale pour le tronçon horizontal BC ? (le cas échéant, les calculer). Calculer le nombre de Froude et caractériser le régime d'écoulement.

(f) Quelle doit être la hauteur minimale du seuil pour que le régime passe de sub-critique à supercritique au passage du seuil (en D) ?

(g) Quelle est la hauteur en E ? On fera le calcul en considérant que E soit dans le déversoir à section rectangulaire ou dans le canal trapézoïdal.

(h) Calculer les hauteurs critique et normale dans le canal EF. Quel est le régime d'écoulement ?

(i) Tracer l'allure de la courbe de remous dans le déversoir AE. On placera les hauteurs caractéristiques et on justifiera – autant que faire se peut (cela reste un schéma) – l'allure proposée.

(j) Tracer l'allure de la courbe de remous dans le canal trapézoïdal EF. On placera les hauteurs caractéristiques et on justifiera l'allure proposée.

Problème 14 : force exercée sur une vanne

On étudie le fonctionnement hydraulique d'une vanne plane dont l'ouverture est a et qui est placée perpendiculairement à un fond horizontal (voir schéma et notation sur la figure 4). Le débit (par unité de largeur) à l'amont est constant et vaut $q = h_0 u_0$ avec h_0 la hauteur à l'amont de la vanne et u_0 la vitesse moyenne. Il y a deux modes de fonctionnement :

- *Régime dénoyé* – voir figure 4(a) – pour lequel l'écoulement à l'aval n'influence pas l'écoulement sous la vanne. Au passage de la vanne, on observe une contraction de l'écoulement et la hauteur atteint une valeur $h_1 \leq a$. L'écoulement est supposé supercritique à l'aval immédiat de la vanne. Il se forme donc un ressaut un peu plus en aval, dont la hauteur aval est notée h_2, qui permet d'assurer la transition du régime supercritique à un régime subcritique.
- *Régime noyé* – voir figure 4(b) – pour lequel l'écoulement à l'aval influence l'écoulement sous la vanne. La hauteur à l'aval de la vanne est notée h_2. Le régime est subcritique de part et d'autre de la vanne.

Valeurs numériques

- hauteur $h_0 = 10$ m et vitesse $u_0 = 50$ cm/s à gauche de la vanne ;
- ouverture de la vanne $a = 50$ cm.

(a) En vous servant de la méthode de votre choix, faite l'analyse dimensionnelle du problème où l'on cherche à calculer q connaissant les hauteurs du problèmes (a, h_0 et h_2) dans les cas dénoyé et noyé.

(b) Utilisez le théorème de Bernoulli pour déduire la hauteur h_1 connaissant h_0 et u_0. On négligera la perte de charge singulière due à la contraction de la lame d'eau au passage de la vanne. Faire l'application numérique.

(c) Tracez la charge spécifique $H_s(h)$ pour le débit donné $q = h_0 u_0$ et positionnez les hauteurs h_0 et h_1 sur cette courbe. Déduisez-en le régime d'écoulement de part et d'autre de la vanne.

(d) En examinant ce graphique, examinez si on peut toujours trouver h_1 satisfaisant le théorème de Bernoulli, c'est-à-dire qui puisse se placer sur la courbe $H_s(h)$. Quelle est la condition portant sur u_0 et h_0 (ou bien sur le nombre de Froude $\mathrm{Fr} = u_0/\sqrt{g h_0}$) pour qu'on puisse déterminer la hauteur h_1 à partir de h_0 en se servant de la courbe $H_s(h)$?

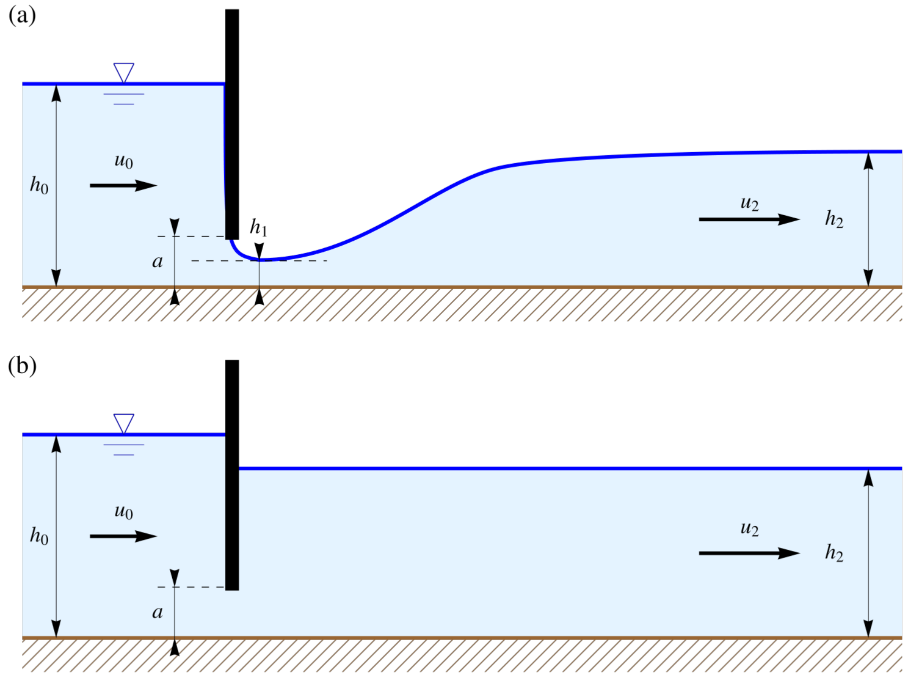


Figure 4 –: Schéma de principe d'une vanne plane vertical à paroi mince. (a) régime dénoyé. (b) régime noyé.

(e) On suppose maintenant que la charge hydraulique à l'amont de la vanne est constante et vaut $H_0 = 10$ m. La hauteur h_0 et la vitesse u_0 peuvent varier en fonction du débit transitant par la vanne. Ce débit peut se calculer à l'aide de la formule

$$q = aC_d\sqrt{2gh_0},$$

avec $C_d = 0{,}6$ le coefficient de débit. En vous servant de la courbe spécifique $H_s(h)$, montrer que si on augmente l'ouverture a de la vanne, la hauteur amont h_0 diminue alors que la hauteur h_1 augmente.

(f) Déterminer le débit seuil q et de l'ouverture a au-delà desquels on ne peut plus reporter les hauteurs h_0 et h_1 sur la courbe $H_s(h)$ (on pourra faire l'approximation $H_0 = h_0$ pour la charge à l'amont loin de la vanne).

(g) Calculer la hauteur h_2 à l'aval du ressaut. Faire l'application numérique.

(h) On considère le volume de contrôle montré en hachuré de la figure 3. Écrire la conservation de la masse, puis la conservation de la quantité de mouvement.

On supposera l'écoulement permanent, le profil de vitesse uniforme, et on négligera le frottement au sol. On peut se contenter de projeter la conservation de la quantité de mouvement sur l'axe horizontal.

(i) Calculer la force de pression hydrostatique sur la paroi immergée de la vanne (on fera l'hypothèse d'une distribution hydrostatique des pressions comme su l'eau était au repos). Faire l'application numérique.

(j) Faire le bilan de forces. En déduire la force totale (par unité de largeur) exercée par l'écoulement sur la vanne. Faire l'application numérique. Comparer la valeur obtenue avec la force de pression obtenue à la question précédente et commenter le résultat.

(k) On suppose que l'ouverture a de la vanne est grande, et en conséquence la condition trouvée à la question (6) est vérifiée. On dit alors que la vanne est noyée – voir figure 2(b). En considérant la charge hydraulique entre l'amont (H_1) et la vanne et en supposant que la contribution de la pression (contribution dite piézométrique) vaut h_2, déterminer le débit q par unité de largeur pour la vanne noyée.

(l) Dans la question précédente, on considère que la vanne est noyée car son ouverture est trop grande. Voyez-vous d'autres scénarios dans lesquels la vanne sera considérée comme noyée, c'est-à-dire que le débit à travers elle dépend à la fois des conditions amont et aval ?

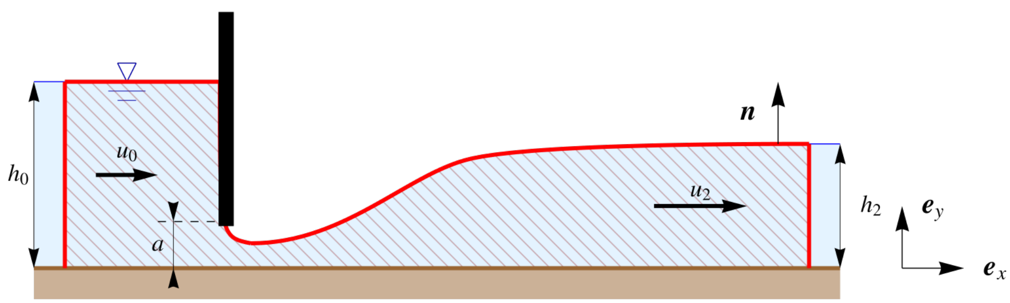


Figure 5 –: Volume de contrôle englobant la vanne.

Correction du Problème 13

Question (1)

Si la crête du déversoir se comporte comme un seuil, alors la hauteur critique h_c est atteinte en A, et le nombre de Froude y vaut 1. Par ailleurs, cette hauteur vaut $\Delta h = 3$ m d'après les données du problème.

Pour un canal rectangulaire de largeur b, cela implique qu'en A, $h_A = h_c = \Delta h$, et donc par définition du nombre de Froude

$$\mathrm{Fr} = \frac{u_A}{\sqrt{gh_A}} = 1 \text{ avec } u_A = \frac{Q}{bh_A},$$

soit encore en termes de débit

$$Q = bh_A\sqrt{gh_A} = b\sqrt{g}h_A^{3/2} = 48{,}8 \text{ m}^3/\text{s}. \tag{5}$$

Le débit par unité est largeur est

$$q = \frac{Q}{b} = 16{,}3 \text{ m}^2/\text{s}. \tag{6}$$

Question (2)

On néglige toute perte de charge entre A et B. La conservation de la charge impose

$$H_A = H_B$$

or comme la hauteur est critique en A, on a

$$H_A = z_A + h_A + \frac{u_A^2}{2g} = z_A + \frac{3}{2}h_A = z_A + \frac{3}{2}\Delta h = 19{,}5 \text{ m}.$$

En B, on a donc

$$H_B = z_B + h_B + \frac{u_B^2}{2g} = 0 + h_B + \frac{q_B^2}{2gh_B^2} = 19{,}5 \text{ m}.$$

C'est une équation polynomiale de degré 3. Elle admet trois racines, mais une seule est à la fois positive et associée à un régime supercritique. On pose donc

$$h_B = 85 \text{ cm}. \tag{7}$$

La vitesse en B est
$$u_B = \frac{q}{h_B} = 19{,}1 \text{ m/s}. \tag{8}$$
Le nombre de Froude en B est
$$\mathrm{Fr}_B = \frac{u_A}{\sqrt{gh_B}} = 6{,}6. \tag{9}$$
L'écoulement est donc supercritique.

Question (3)

Selon la formule (5.27) p. 152 des notes de cours, la longueur du ressaut est
$$\frac{L}{h_B} = 160 \tanh \frac{\mathrm{Fr}_B}{20} - 12 = 39{,}1 \text{ m}. \tag{10}$$
On peut prendre 39 m comme longueur minimale entre B et C.

Question (4)

On se sert de l'équation de conjugaison (5.25) du cours
$$\frac{h_C}{h_B} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + 8\mathrm{Fr}_B^2} - 1\right) \Rightarrow h_C = 7{,}6 \text{ m}. \tag{11}$$
On en déduit
$$u_C = q/h_C = 2{,}2 \text{ m/s}, H_C = z_C + h_C + \frac{q^2}{2gh_C^2} = 7{,}8 \text{ m et } \mathrm{Fr}_C = \frac{u_C}{\sqrt{gh_C}} = 0{,}25. \tag{12}$$
La perte de charge due au ressaut est
$$\Delta H = H_C - H_B = -11{,}7 \text{ m}. \tag{13}$$
Cela pourrait aussi se calculer à l'aide de l'équation (5.26) p. 152 des notes de cours. Le ressaut permet de dissiper 60 % de la charge de l'écoulement, et on peut donc considérer que c'est un moyen efficace de réduire la puissance de l'eau avant qu'elle entre dans le canal en terre battue.

Question (5)

La hauteur normale n'existe que pour un canal de pente non nulle. La hauteur critique est constante quelle que soit la pente si la section ne change. Or au sommet A du déversoir, on a posé $h_A = h_c = 3$ m. La hauteur critique est donc

$$h_c = 3 \text{ m}. \tag{14}$$

Le nombre de Froude est 0,25 en C. L'écoulement est subcritique.

Question (6)

Si la taille du seuil est trop petite, alors l'écoulement passe par-dessus lui sans changer de régime (voir § 5.6.4 dans les notes de cours). Pour qu'il y ait changement de régime, il faut que l'écoulement devienne critique au sommet D du seuil. Il faut donc qu'au point D, on ait

$$h_D = h_c = 3 \text{ m}. \tag{15}$$

Par ailleurs, la charge hydraulique se conserve entre C et D, et donc on doit avoir

$$H_D = a + \frac{3}{2}h_c = H_C \Rightarrow a = 7{,}8 - 1{,}5 \times 3 = 3{,}3 \text{ m}. \tag{16}$$

Question (7)

Si on néglige les pertes de charge et qu'on considère que la section d'écoulement est rectangulaire, alors la charge en E vaut celle en D et C

$$H_E = H_D \Rightarrow z_E + h_E + \frac{q^2}{2gh_E^2} = 7{,}8 \text{ m}.$$

C'est un polynôme d'ordre 3, qui admet donc trois solutions. Seule la solution positive et associée à un régime supercritique est possible. Donc on obtient

$$h_E = 1{,}5 \text{ m}. \tag{17}$$

Si maintenant on considère une section trapézoïdale, on doit résoudre

$$z_E + h_E + \frac{Q^2}{2gS^2(h_E)} = 7{,}8 \text{ m},$$

avec $S(h_E) = (\ell + h_E)h_E$. La solution est alors la seule qui soit positive et associée à un écoulement supercritique

$$h_E = 1{,}3 \text{ m.} \tag{18}$$

Question (8)

La hauteur critique est définie comme la hauteur pour laquelle le nombre de Froude vaut 1. Or ce nombre est défini de façon générale comme

$$\text{Fr} = \frac{Q}{S\sqrt{g\dfrac{S}{B}}},$$

avec pour une section trapézoïdale dont les pentes de talus sont 1H:1V :

$$B = \ell + 2h,\ S = h\frac{B+\ell}{2} = (\ell + h)h \text{ et } R_h = \frac{(\ell + h)h}{\ell + 2h\sqrt{2}}.$$

On doit donc résoudre l'équation polynomiale de degré 6, dont une seule racine est positive et réelle

$$Q^2 B = gS^3 \Rightarrow h_c = 2{,}6 \text{ m.} \tag{19}$$

La hauteur normale satisfait l'équation de Manning-Strickler

$$Q = K\sqrt{i}SR_h^{2/3} \Rightarrow h_n = 2{,}2 \text{ m.} \tag{20}$$

Question (9)

Pour tracer l'allure de la courbe de remous dans le déversoir, on se sert des hauteurs calculées précédemment en A, B, C, et D.

Coursier. On sait que le long de la partie raide du coursier (entre A et B), l'écoulement est supercritique, et la hauteur d'eau épouse (à peu près) la forme du fond (on pourrait calculer ces hauteurs en considérant la conservation de la charge).

Fond horizontal. La hauteur devient uniformément constante et égale à $h_B = 85$ cm. En effet, sur de courtes distances, il n'y a pas d'effet significatif du frottement, et si le régime est permanent, la pente est nulle, alors rien ne peut causer de changement de hauteur. Entre B et C, il se forme un ressaut qui est représenté de façon très simplifiée par une discontinuité, un « mur d'eau » faisant passer la hauteur de $h_B = 85$ cm à $h_C = 7{,}6$ m. La position du ressaut n'est pas connue. Elle est en théorie fixée en recherchant (par la méthode de conjugaison) l'intersection de la branche subcritique à l'aval du ressaut avec la conjuguée de la courbe de remous à l'amont du ressaut. Or comme celle-ci est une droite horizontale, sa conjuguée l'est aussi. En l'absence de frottement et de pente, la branche aval subcritique doit rester horizontale jusqu'au point C.

Seuil. L'écoulement étant subcritique, la hauteur d'eau doit diminuer entre C et D (voir § 5.2.1 dans les notes de cours) puis au passage du seuil, la hauteur diminue jusqu'à atteindre la valeur critique $h_c = 3$ m en D.

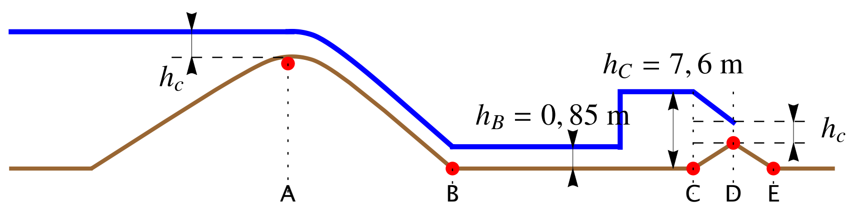


Figure 6 –: Allure de la courbe de remous le long du déversoir en béton. L'échelle et les proportions ne sont pas respectées.

Question (10)

Le régime est supercritique dans le canal. La condition initiale est donc à fixer à l'amont. On a trouvé précédemment qu'au point E, on a $h_E = 1{,}3$ m ; cela sera la condition initiale. On intègre l'équation de la courbe de remous (5.18) dans le cas d'un écoulement prismatique ($\partial_x S = 0$)

$$h' = F(h) = \frac{i - j}{1 - \dfrac{Q^2 B}{g S^3}} \text{ avec } j = \frac{Q^2}{K^2 R_h^{4/3} S^2} \tag{21}$$

La figure 2 montre la courbe de remous obtenue numériquement par intégration de l'équation (21). On peut déterminer l'allure de cette courbe à partir des éléments suivants :

- comme $h' > 0$ en $x = 0$ (on pose $x = 0$ en E), la fonction $h(x)$ est croissante ;
- comme $h_0 = h(0) = h_E < h_n < h_c$, la courbe de remous doit tendre vers la hauteur normale ;
- on peut obtenir une approximation de la courbe de remous sans résoudre l'équation (21). Par exemple, on peut faire un développement à l'ordre 2

$$h(x) = h_0 + xh'(0) + \frac{x^2}{2}h''(x) + \cdots \tag{22}$$

avec

$$h'(0) = F(h_0) = 0{,}00496 \text{ et } h''(0) = \frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}x^2}(0) = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}h}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} = -8{,}9 \times 10^{-6}$$

Comme le montre la figure 7, l'approximation (22) fournit une description correcte de la solution pour les 100 premiers mètres et permet de voir que le raccordement asymptotique vers h_n se fait rapidement (la hauteur normale est quasiment atteinte au bout de 300 m).

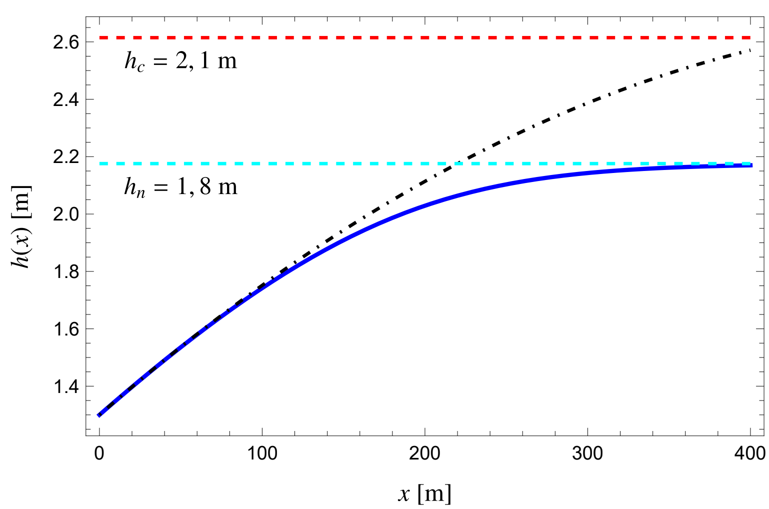


Figure 7 –: Allure de la courbe de remous le long du canal trapézoïdal. On reporte la solution numérique à l'équation (21) (courbe continue), la hauteur normale et la hauteur critique. La courbe noire discontinue montre l'approximation (22).

Correction du Problème 14

Question (1)

Pour le régime dénoyé, on a 4 variables (q, h_0, a, et g) et deux unités physiques (m et s). Le rang de la matrice dimensionelle est 2, donc on peut former deux nombres sans dimension d'après le théorème de Vaschy-Buckingham. L'intuition physique nous incite à poser

$$\frac{q}{a\sqrt{gh_0}} = f\left(\frac{a}{h_0}\right).$$

On peut raisonner de façon plus rapide en se disant que l'ordre de grandeur de la vitesse sous la vanne est donné par la formule de Torricelli ($u \propto \sqrt{2gh_0}$) et comme l'ouverture est a, alors le débit par unité de largeur doit être proportionnel à $a\sqrt{2gh_0}$. Il existe donc une constante C telle que

$$q = Ca\sqrt{2gh_0}.$$

Les deux méthodes donnent des résultats similaires. En effet, si on considère que le rapport a/h_0 est petit, alors f doit tendre vers une constante si on fait l'hypothèse de similitude complète.

Pour le régime noyé, on a maintenant 5 variables (q, h_0, a, h_2 et g) et deux unités physiques (m et s). Le rang de la matrice dimensionelle est toujours 2, donc on peut former trois nombres sans dimension. On pose

$$\frac{q}{a\sqrt{gh_0}} = f\left(\frac{a}{h_0}, \frac{h_2}{h_0}\right).$$

Si on raisonne de façon physique, on se convainc facilement que le débit doit dépendre de la différence $h_2 - h_0$ (si $h_2 = h_0$, il n'y a plus de gradient de pression qui puisse mettre le fluide en mouvement sur un fond horizontal, et donc hormis d'imaginer qu'on pousse le fluide depuis la gauche, il ne peut y avoir d'écoulement). Cela incite à écrire

$$q = Ca\sqrt{2g(h_2 - h_0)}. \tag{23}$$

Question (2)

On considère une ligne de courant allant de la surface libre (hauteur d'eau h_0) à droite de la vanne jusqu'au creux de la lame d'eau, un creux caractérisé par la hauteur h_1. Les deux points ont le même potentiel gravitaire. La conservation de la charge entraîne

$$H_0 = H_1 \Rightarrow h_0 + \frac{q^2}{2gh_0^2} = h_1 + \frac{q^2}{2gh_1^2}.$$

C'est une équation polynomiale de degré 3. Il existe trois racines, dont une seule positive et en régime supercritique. On trouve

$$h_1 = 36 \text{ cm}. \tag{24}$$

Question (3)

La figure 8 montre la courbe de charge spécifique. On voit que la hauteur h_0 est sur la branche subcritique alors que la hauteur h_1 est sur la branche supercritique.

Question (4)

Pour qu'on puisse placer les hauteurs h_0 et h_1 sur la courbe $H_s(h)$, il faut que ces hauteurs soient au-dessus du minimum de H_s. Ce minimum est atteint pour $h = h_c$ et il vaut

$$\min H_s = \frac{3}{2} h_c \text{ avec } h_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}}.$$

On peut retrouver rapidement ce résultat en différentiant $H_s(h)$ et en recherchant la hauteur pour laquelle $H_s' = 0$:

$$\frac{\mathrm{d}H_s}{\mathrm{d}h} = h' - \frac{q^2}{gh^3} h' = 0 \Rightarrow h = h_c.$$

On recherche donc la condition sur les couples (h_0, u_0) qui vérifient

$$h_0 \geq \frac{3}{2} h_c \Rightarrow h_0^3 \geq \frac{27}{8} \frac{h_0^2 u_0^2}{g}.$$

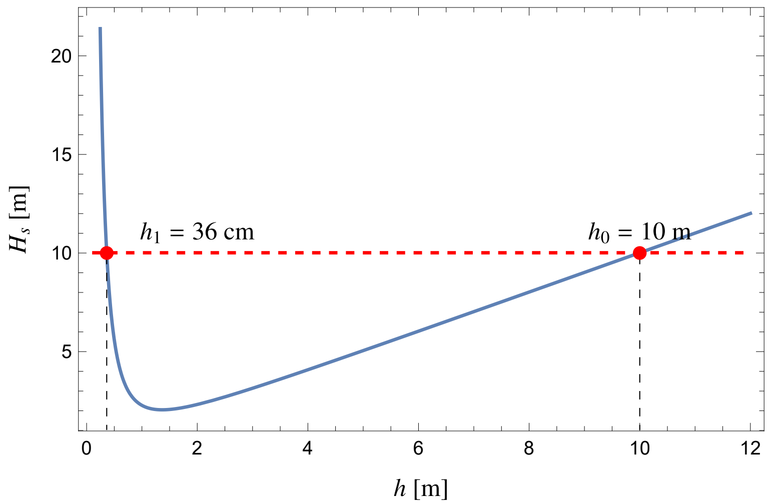


Figure 8 –: Variation de la charge spécifique H_s avec la hauteur h. L'intersection avec $H_0 = h_0 + u_0^2/(2g) = 10{,}01$ cm donne $h_0 = 10$ m et $h_1 = 36$ cm.

On peut arranger les termes

$$\mathrm{Fr}^2 = \frac{u_0^2}{gh_0} \leq \frac{8}{27}.$$

Il faut donc que le nombre de Froude soit plus petit que

$$\mathrm{Fr} \leq \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} = 0{,}54. \tag{25}$$

Question (5)

La figure 9 montre la courbe de charge spécifique pour deux débits $q = 5$ m^2/s et $q^* = 40$ m^2/s (choisis à titre d'illustration). On voit qu'à charge constante, la hauteur à l'amont h_0 diminue quand q (ou a) augmente alors que la hauteur à l'aval h_1 augmente. Cela correspond à l'intuition physique ordinaire (plus la vanne s'ouvre, plus le débit augmente, moins la hauteur d'eau à l'amont de la vanne est grande, et plus la hauteur à l'aval croît).

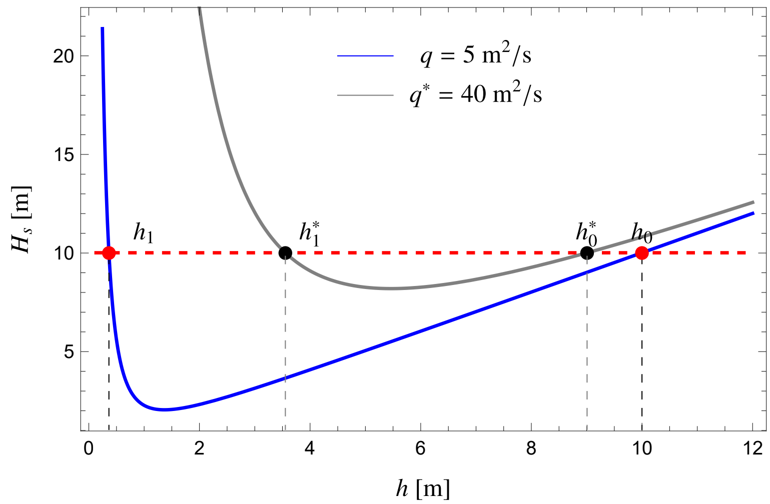


Figure 9 –: Variation de la charge spécifique H_s avec la hauteur h pour deux débits $q = 5$ m^2/s et $q^* = 40$ m^2/s. L'intersection avec $H_0 = 10$ cm donne $h_0 = 10$ m et $h_1 = 36$ cm lorsque $q = 5$ m^2/s. L'intersection avec $H_0 = 10$ cm donne $h_0^* = 9$ m et $h_1^* = 3{,}6$ m lorsque $q^* = 40$ m^2/s.

Question (6)

On voit sur la figure 4 que plus on ouvre la vanne, plus le débit augmente et donc à charge constante, plus H_0 se rapproche du minimum de H_s qui vaut $3h_c/2$. La condition critique est atteinte lorsque

$$\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} = H_0 \Rightarrow q = \sqrt{g}\left(\frac{2}{3}H_0\right)^{3/2}.$$

Si le débit est supérieur à ce débit critique, alors il n'y a plus de solution au problème posé. En se servant de l'équation du débit $q = C_d a\sqrt{2gh_0}$ et de l'approximation $H_0 = h_0$, on en déduit que l'ouverture maximale de la vanne est

$$a = \frac{1}{C_d\sqrt{2h_0}}\left(\frac{2}{3}H_0\right)^{3/2} = \frac{2}{3C_d\sqrt{3}}H_0. \tag{26}$$

Lorsque a vérifie

$$\frac{a}{H_0} > \frac{2}{3C_d\sqrt{3}} \approx \frac{2}{3},$$

la vanne est noyée.

Question (7)

On se sert de l'équation de conjugaison

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + 8\mathrm{Fr}_1^2} - 1\right) = 9{,}8 \Rightarrow h_2 = 3{,}6 \text{ m} \tag{27}$$

avec $\mathrm{Fr}_1 = q/\sqrt{gh_1^3} = 7{,}3$.

Question (8)

La conservation de la masse impose

$$q = h_0 u_0 = h_2 u_2. \tag{28}$$

Pour la quantité de mouvement, on ne considère que les contributions qui agissent selon l'horizontale $\boldsymbol{e}_x$. Pour la face amont (h_0, u_0) de normale $\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{e}_x$, le flux de quantité de mouvement projeté sur $\boldsymbol{e}_x$ s'écrit

$$Q_0 = \boldsymbol{e}_x \cdot \int_0^{h_0} \varrho \boldsymbol{u}(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n})\mathrm{d}y = -\varrho u_0^2 h_0,$$

alors que la force de pression est

$$P_0 = -\boldsymbol{e}_x \cdot \int_0^{h_0} p\boldsymbol{n}\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\varrho g h_0^2.$$

On fait la même chose pour la face aval (h_2, u_2) de normale $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_x$, la projection de la quantité de mouvement est

$$Q_2 = \boldsymbol{e}_x \cdot \int_0^{h_2} \varrho \boldsymbol{u}(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n})\mathrm{d}y = \varrho u_2^2 h_2,$$

alors que la force de pression est

$$P_2 = -\boldsymbol{e}_x \cdot \int_0^{h_2} p\boldsymbol{n}\mathrm{d}y = -\frac{1}{2}\varrho g h_2^2.$$

Question (9)

La pression a une distribution hydrostatique. On obtient facilement la résultante des forces de pression (par unité de largeur) exercée par le fluide sur la paroi de la vanne entre $y = a$ et $y = h_0$

$$P_v = \int_a^{h_0} \varrho g(h_0 - y)\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\varrho g(h_0 - a)^2$$

A. N. On trouve

$$P_v = 442{,}7 \text{ kN/m}.$$

Question (10)

Si on note F la force totale exercée par l'écoulement (forces de pression + effets hydrodynamiques) sur la vanne et si on utilise le principe d'action et de réaction, alors le bilan de quantité de mouvement projeté sur l'axe x s'écrit

$$Q_0 + Q_2 = P_0 + P_2 - F \Rightarrow -\varrho u_0^2 h_0 + \varrho u_2^2 h_2 = \frac{1}{2}\varrho g(h_0^2 - h_2^2) - F$$

On déduit grâce à la conservation de la masse

$$F = \frac{1}{2}\varrho g\left(h_0^2 - h_2^2\right) + \varrho q^2\left(\frac{1}{h_0} - \frac{1}{h_2}\right). \tag{29}$$

A. N. On trouve

$$F = 423{,}5 \text{ kN/m}.$$

On observe que $F < P_v$, ce qui implique que la résultante totale des forces est inférieure à la force hydrostatique. L'écoulement produit une légère dépression (l'écoulement réduit d'environ 5 % la pression hydrostatique).

Question (11)

On suppose que $a/h_0 > 2/3$ (vanne noyée). On écrit la conservation de la charge hydraulique entre l'amont

$$H_1 = h_1 + \frac{q^2}{2gh_1^2}$$

et la vanne

$$H_v = h_2 + \frac{q^2}{2ga^2},$$

où l'on a considéré que la charge piézométrique valait h_2. De la conservation de la charge $H_1 = H_v$, on déduit

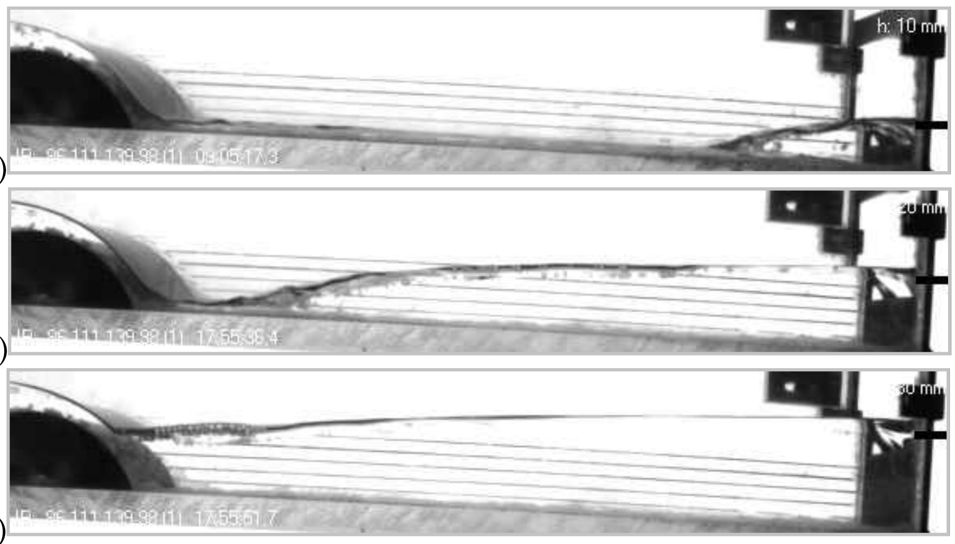
$$q = a\sqrt{2g(h_1 - h_2)}\frac{h}{\sqrt{h_1^2 - a^2}}.$$

Remarque : cette forme est proche de la forme (23) obtenue par analyse dimensionnelle. Si cette estimation du débit est correcte, cela revient à dire que le coefficient C est en fait une fonction de h_1 et a.

Question (12)

Si l'écoulement est subcritique à l'aval de la vanne, on peut avoir des hauteurs importantes sans qu'il soit possible de faire un raccord entre la hauteur h_2 du ressaut et cette branche subcritique. Le ressaut est alors poussé vers la vanne, puis noyé par l'écoulement. À son tour la vanne est noyée.

Quoique cela ne soit pas strictement la même configuration d'écoulement, l'expérience en ligne (voir 128.179.34.98:8888/LHE1.html) permet de voir l'effet de la condition aval sur la position du ressaut, et en fin de compte sur le régime d'écoulement noyé/dénoyé au niveau de l'obstacle.



(a) (b) (c)

Figure 10 –: Ressaut hydraulique à l'amont d'un obstacle. Sa position dépend de la condition à la limite à l'aval qui est imposée par un seuil à paroi mince. (a) $p = 10$ mm ; (b) $p = 20$ mm ; (c) $p = 30$ mm. Source : 128.179.34.98:8888/LHE1.html.