Mécanique des fluides

Section de génie civil

Équations de Navier-Stokes

Exercice 1 : écoulement laminaire entre deux plans parallèles

Dans cet exercice, nous allons considérer l'écoulement d'un fluide newtonien entre deux plaques horizontales séparées d'une distance $2b$. Voir figure 1. L'écoulement se fait selon l'axe x, la longueur des plaques L ainsi que leur largeur ℓ sont beaucoup plus grandes que l'espace $2b$ qui les séparent ($L \gg 2b$, $\ell \gg 2b$), si bien que l'on peut considérer que les plaques sont de taille infinie selon x et z. Une pompe impose un gradient de pression $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x$ dans la direction x. Le fluide est de masse volumique ϱ et de viscosité μ. On suppose que l'écoulement est permanent, laminaire et on néglige les effets de la pesanteur.

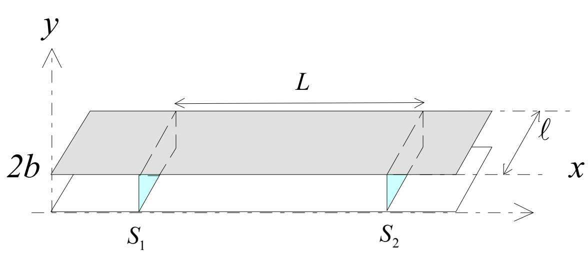

Figure 1 –: Schéma de principe.

1. Déterminer le champ de vitesse au sein de l'écoulement. Pour cela, partir des équations de Navier-Stokes, projeter les dans le repère xyz puis éliminer tous les termes nuls et intégrer l'équation différentielle pour obtenir le champ de vitesse.

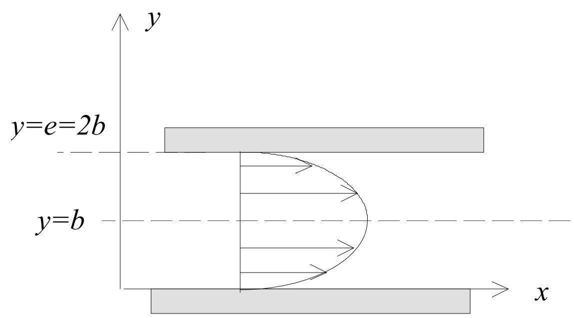

Figure 2 –: Vue en coupe

2. Déterminer le débit par unité de largeur transitant dans la conduite, en déduire la vitesse moyenne de l'écoulement.
3. Déterminer la contrainte de cisaillement τ dans l'écoulement.
4. Déterminer la puissance dissipée.

Exercice 3 : vidange d'un réservoir de fluide visqueux

Un réservoir de glycérol dont le niveau est maintenu à une hauteur $H = 10$ cm alimente une conduite circulaire de rayon $r = 2$ mm et de longueur $L = 5$ cm. Déterminer, à l'aide des réponses de l'exercice 2 :

1. Le débit de sortie.
2. La vitesse moyenne et maximale de l'écoulement
3. La force totale de frottement sur le tube

Exercice 5 : viscosimètre de type Couette

On se propose de mesurer expérimentalement la viscosité d'un fluide newtonien. Pour ce faire on dispose d'un viscosimètre muni d'une géométrie de type Couette (voir figure 4). Il s'agit en fait de deux cylindres concentriques d'axe z

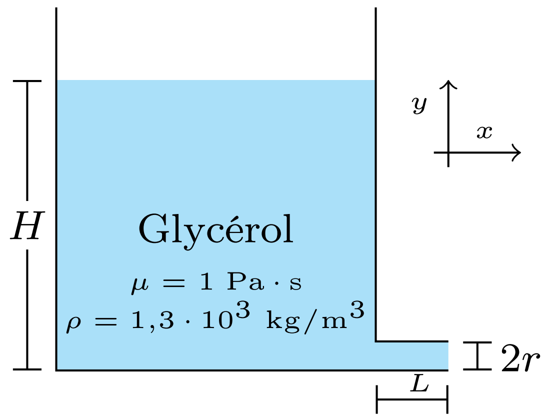

Figure 3 –: Vue en coupe

entre lesquels se trouve le fluide. Le cylindre intérieur de rayon $R_1 = 5{,}0$ cm est en rotation à vitesse angulaire constante Ω_1, tandis que le cylindre extérieur de rayon $R_2 = 5{,}5$ cm est fixe ($\Omega_2 = 0$). Pour entretenir la rotation, on doit appliquer un couple C constant sur le cylindre intérieur.

Hypothèses : écoulement laminaire, gravité négligée.

1. Déterminer les composantes non nulles du champs de vitesse au sein du fluide à l'aide de considérations de symétrie et de l'équation de conservation de la masse.
2. Simplifier les équations de conservation de la quantité de mouvement.
3. Établir la relation
$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right) - \frac{u_\theta}{r^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial (r u_\theta)}{\partial r}\right).$$
4. Donner l'expression du champ de vitesse dans la cellule grâce aux conditions limites.
5. Déterminer la relation entre le couple qu'il faut exercer pour maintenir la vitesse de rotation du cylindre intérieur constante et la viscosité du fluide sachant que les cylindres ont une hauteur $h = 10$ cm. Calculer ensuite la viscosité du fluide sachant que pour $\Omega_1 = 0{,}1$ rad/s on mesure un couple $C = 2{,}42 \cdot 10^{-3}$ N m.

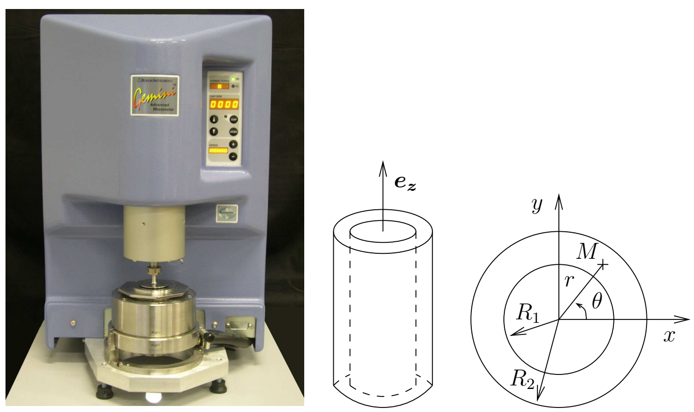

Figure 4 –: Vue et représentation schématique d'une géométrie de type Couette.

Problème 1 : écoulement granulaire dans un canal

Au LHE, un doctorant étudie les écoulements granulaires. À cet effet, il utilise un canal incliné dont le fond est mobile (c'est un tapis roulant) ; voir figure 5. Avec ce dispositif, il peut créer des écoulements permanents d'épaisseur uniforme h. La vitesse du fond est notée u_0. L'écoulement granulaire est supposé isochore. Il est constitué de grains dont le diamètre est d ; la masse volumique moyenne du mélange est ϱ. La pente du canal est noté θ. Le fond est rugueux et il y a adhérence à la paroi. L'air n'exerce aucune contrainte sur la surface libre. Voir figure 6.

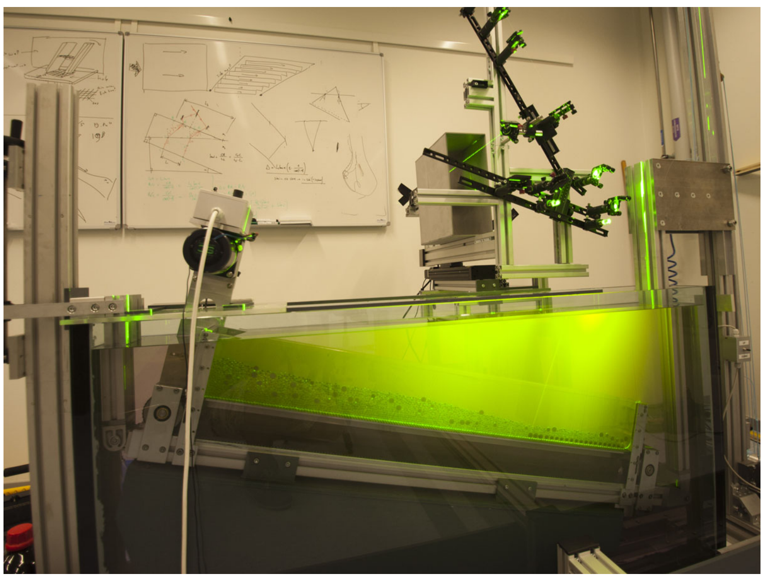

Figure 5 –: Vue du canal incliné composé d'un tapis roulant. Dans cette expérience, un fluide interstitiel est utilisé afin de rendre le mélange iso-indice (donc transparent). Les particules sont marquées avec un colorant fluorescent qui réfléchit la lumière d'une nappe laser émise dans une certaine longueur d'once, permettant ainsi de les repérer.

(a) Écrire les équations de conservation de la quantité de mouvement et les simplifier en tenant compte des symétries du problème. Comment s'écrivent les conditions aux limites ?

(b) En déduire une relation pour la contrainte normale totale $\Sigma_y = \sigma_y - p$ et la contrainte tangentielle τ après intégration en fonction de y.

(c) En première approximation, le doctorant suppose que le matériau granulaire se comporte comme un fluide newtonien de viscosité dynamique μ. Intégrer la relation $\tau(y)$ en tenant compte des conditions aux limites afin d'obtenir le profil de vitesse $u(y)$. Calculer le débit (par unité de largeur) associé à ce profil.

(d) Il suppose maintenant que le matériau granulaire se comporte comme un fluide non newtonien dont la viscosité $\mu(\dot{\gamma})$ peut être estimée à partir de la loi empirique dite « $\mu(I)$ » qui généralise la loi de Coulomb en supposant que le frottement varie avec le taux de cisaillement $\dot{\gamma}$

$$\tau = \mu(I)|\sigma_y| \text{ avec } I = \frac{d\dot{\gamma}}{\sqrt{|\sigma_y|/\varrho}}$$

(I est un nombre adimensionnel appelé le plus souvent « nombre inertiel »). Le calage sur des données de laboratoire a permis de proposer une loi (dite loi de Jop), qui a la forme suivante

$$\mu(I) = \mu_1 + \frac{\mu_2 - \mu_1}{I_0/I + 1},$$

avec μ_1 et μ_2 deux constantes correspondant aux frottements en statique et dynamique, et I_0 une autre constante (reflétant un critère de transition entre régimes). On supposera que la pression est nulle ($p = 0$) à travers toute la couche (dans ce modèle, on suit le principe de Terzaghi, c'est-à-dire la contrainte totale $\Sigma_y = \sigma_y - p$ résulte de la superposition d'une contrainte fluide p – supposée isotrope – et d'une contrainte σ_y dite *effective* représentant les contraintes dans le milieu granulaire). Intégrer $\tau(y)$ et obtenir $u(y)$ en tenant compte des conditions aux limites. Tracer l'allure du profil de vitesse ainsi obtenu et le comparer avec le profil newtonien.

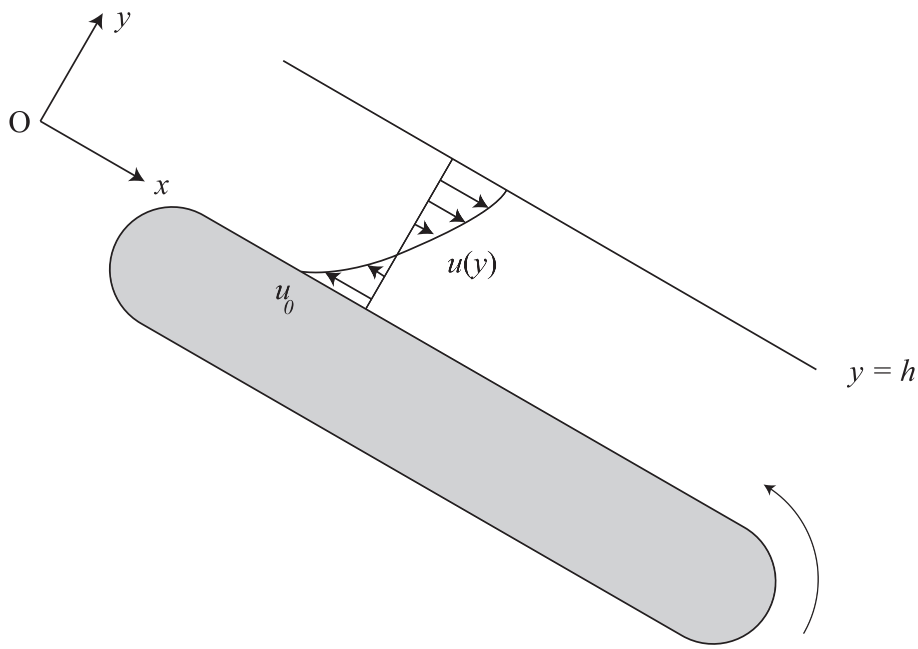

Figure 6 –: Schéma de principe du canal incliné composé d'un tapis roulant.

Problème 2 : écoulement de Poiseuille-plan

On considère l'écoulement permanent d'un fluide newtonien incompressible de viscosité cinématique ν entre deux plans parallèles de grandes dimensions, placés horizontalement, et séparés d'une distance d (voir figure 7). Le fluide est mû par un gradient de pression constant $\partial p_x = -a < 0$ (avec a une constante positive). L'axe x est orienté dans le sens de l'écoulement.

(a) En supposant que l'écoulement est en régime laminaire, écrire les équations de Navier-Stokes et les conditions aux limites. Les simplifier en tenant compte des symétries simples du problème.

(b) Résoudre les équations : déterminer le profil de vitesse en fonction de a, le tracer. Quelle est la vitesse moyenne du fluide $\bar{u}$?

(c) Calculer la contrainte de cisaillement et tracer son profil.

(d) Le coefficient de Darcy-Weisbach f est lié aux pertes de charges (ici le gradient de pression qu'il faut imposer pour mouvoir le fluide) de telle sorte que

$$|\Delta p| = \frac{1}{2} f \frac{L}{D_h} \varrho \bar{u}^2$$

avec $D_h = d$ le diamètre hydraulique, L la longueur sur laquelle est appliqué le gradient de pression (si Δp est la différence de pression entre deux points séparés de L, alors $\partial_x p = \Delta p / L = -a$), ϱ la masse volumique du fluide.
Calculer f en régime laminaire en fonction du nombre de Reynolds $Re = 4 D_h \bar{u} / \nu$.

(e) On considère maintenant que l'écoulement est en régime turbulent. On adopte une équation algébrique de fermeture de type « longueur de mélange » pour la viscosité turbulente. Quelle est la forme du profil de vitesse moyennée près de la paroi (on supposera que la contrainte est constante et égale à la contrainte pariétale).

Correction détaillée de l'exercice 1

Question (a)

Tout d'abord, le fluide considéré est un fluide newtonien avec une masse volumique ϱ et une viscosité dynamique μ. L'écoulement est supposé laminaire,

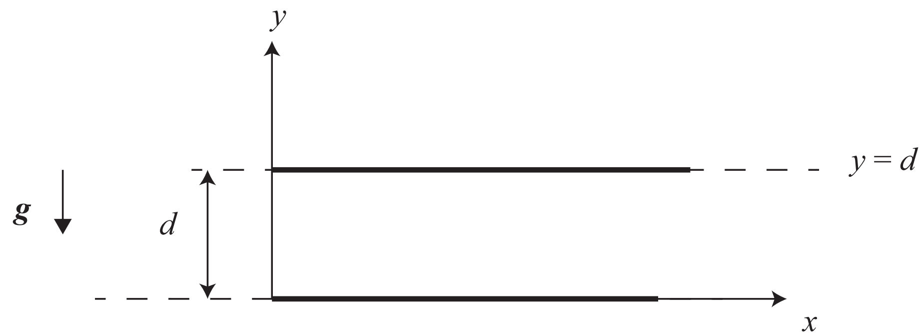

Figure 7 –: Écoulement entre deux plaques parallèles.

et le champ de vitesse peut donc s'écrire sous la forme $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u, & v, & w \end{pmatrix}$; comme il est supposé permanent, les fonctions u, v et w ne dépendent pas du temps. De plus, une pompe impose un gradient de pression d$p/$dx dans la direction x. Les effets de pesanteur sont négligés. En considérant les équations de Navier-Stokes dans le système (x, y, z), on a :

$$\varrho\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{u}\nabla\boldsymbol{u}\right) = \varrho\boldsymbol{g} - \nabla p + 2\mu\nabla\cdot\boldsymbol{D}.$$

Dans le cas d'un fluide incompressible, les équations de Navier-Stokes s'écrivent :

$$\varrho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \varrho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right),$$

$$\varrho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) = \varrho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right),$$

$$\varrho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = \varrho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right).$$

De plus, le champ de vitesse doit vérifier l'équation de continuité :

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

L'écoulement est unidirectionnel selon x, c'est-à dire que seule la composante u du champ de vitesse est non nulle : $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u, & 0, & 0 \end{pmatrix}$. L'équation de continuité se réduit simplement à :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Reprenons les hypothèses afin de simplifier au maximum les équations de Navier-Stokes :

- l'écoulement est permanent : le champ de vitesse ne dépend pas du temps, ainsi les termes de la forme $\partial_t \cdot = 0$;
- l'écoulement est unidirectionnel donc $v = 0$ et $w = 0$;
- la conduite est supposée de dimension infinie dans la direction z, on se ramène donc à un problème en 2D (x, y), les termes sous la forme $\partial_z \cdot = 0$ et $\partial_{zz} \cdot = 0$;
- les effets de pesanteur sont négligés : les termes ϱg_x, ϱg_y et ϱg_z sont nuls ;
- l'équation de continuité nous dit que $\partial_x u = 0$ et donc $\partial_{xx} u = 0$.

Avec les simplifications citées ci-dessus, les équations de Navier-Stokes se réduisent à :

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y}.$$

La deuxième équation nous permet de savoir que le champ de pression n'est pas fonction de y. En intégrant successivement la première équation, il est possible de déterminer le champ de vitesse.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y + C_1,$$

$$u(y) = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2,$$

où C_1 et C_2 sont les constantes d'intégration déterminées par les conditions aux limites :

$$\begin{cases} u(y=0)=0 \\ u(y=2b)=0 \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 = -\dfrac{b}{\mu}\dfrac{\partial p}{\partial x} \end{cases}$$

Ainsi le champ de vitesse s'exprime par $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial p}{\partial x}\left(\dfrac{y^2}{2} - by\right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Question (b)

Le débit infinitésimal est défini tel que :

$$\mathrm{d}q = u(y)\mathrm{d}S.$$

On s'intéresse au débit par unité de largeur q. On considère donc $\mathrm{d}S = 1 \times \mathrm{d}y$, ainsi le débit par unité de largeur infinitésimale est défini de la manière suivante :

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}y} = u(y).$$

Par intégration, on obtient :

$$\begin{aligned} q &= \int_0^{2b} \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\left(\frac{y^2}{2} - by\right)\mathrm{d}y, \\ &= \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\left[\frac{1}{2}\frac{y^3}{3} - \frac{by^2}{2}\right]_0^{2b}, \\ &= -\frac{2}{3}\frac{b^3}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}. \end{aligned}$$

La vitesse moyenne se déduit directement du débit par unité de largeur, grâce à la relation suivante :

$$\overline{u} = \frac{q}{2b} = -\frac{1}{3}\frac{b^2}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}.$$

Question (c)

Dans le cas d'un écoulement laminaire et en considérant un fluide newtonien, la contrainte de cisaillement τ est telle que :

$$\tau = \mu\dot{\gamma} = \mu\frac{\partial u}{\partial y} = \mu\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}y - \frac{b}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\right) = \frac{\partial p}{\partial x}(y-b)\,.$$

Question (d)

La puissance dissipée infinitésimale correspondante au volume $\mathrm{d}V = 1 \times \mathrm{d}y \times 1$ est telle que :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\phi &= \tau\dot{\gamma}\mathrm{d}V \\ &= \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 (y-b)^2\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

En intégrant cette expression, on obtient que la puissance dissipée est égale à :

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 \int_0^{2b} (y-b)^2\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 \left[\frac{y^3}{3} + b^2y - by^2\right]_0^{2b} \\ &= \frac{2}{3}\frac{b^3}{\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2.\end{aligned}$$

Correction détaillée de l'exercice 3

Question (a)

En se référant à l'exercice précédent, le débit est donné par :

$$Q = -\frac{\pi R^4}{8\mu}\frac{\partial p}{\partial z}$$

La différence de pression au niveau de la conduite est approchée par $\Delta p = -\varrho g H$. Ainsi, le gradient de pression correspond donc à

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\Delta p}{\Delta z} = \frac{-\varrho g H}{L}.$$

Finalement, nous avons :

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\mu}\frac{\varrho g H}{L} = 1{,}6 \times 10^{-7}\ \mathrm{m}^3.$$

Question (b)

La vitesse moyenne dans la conduite est simplement calculée par la formule :

$$\overline{u} = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{\pi R^2} = 0{,}0128\ \mathrm{m/s}.$$

En considérant le profil de vitesse dans la conduite comme une parabole, la vitesse maximale est atteinte en $r = 0$. D'après les réponses démontrées lors de l'exercice 2, on a :

$$u_{max} = u_z(r = 0) = -\frac{\partial p}{\partial z}\frac{R^2}{4\mu} = 0{,}0255\ \mathrm{m/s}.$$

Question (c)

Les contraintes de cisaillement orientées selon la normale $\boldsymbol{e_r}$ et dans la direction $\boldsymbol{e_z}$ sont données par :

$$\tau_{rz} = \mu\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\right),$$

avec $\frac{\partial u_r}{\partial z} = 0$. La force de frottement sur le tube s'exprime donc par :

$$\begin{aligned}
F &= -\int\int \tau_{rz}(r=R)\mathrm{d}S,\\
&= -\int_0^L \int_0^{2\pi} \tau_{rz}(r=R)\mathrm{d}zR\mathrm{d}\theta,\\
&= -L\mu 2\pi R\frac{\partial p}{\partial z}\frac{R}{2\mu},\\
&= -\pi R^2 \Delta p,\\
&= 0{,}016\ \mathrm{N}.
\end{aligned}$$

Correction détaillée de l'exercice 5

Question (a)

Le mouvement est un mouvement de rotation, et les composantes de vitesse u_r et u_z sont donc nulles. Le champ de vitesse se réduit à :

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ u_\theta(r,\theta,z) \\ 0 \end{pmatrix}$$

De plus, la conservation de la masse dans le système de coordonnées cylindriques s'exprime par :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0,$$
$$\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = 0.$$

La vitesse est donc uniforme selon la composante θ.

Question (b)

Pour rappel, dans un système de coordonnées cylindriques, les équations de Navier-Stokes s'expriment par :

$$\varrho\left(\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_r}{\partial r} + u_\theta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r}\right) + u_z\frac{\partial u_r}{\partial z}\right) = \varrho g_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial r T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z} - \frac{T_{\theta\theta}}{r},$$

$$\varrho\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+u_\theta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}+\frac{u_r}{r}\right)+u_z\frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right)=\varrho g_\theta-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2 T_{r\theta}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta}+\frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z},$$

$$\varrho\left(\frac{\partial u_z}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)=\varrho g_z-\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial r T_{rz}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial T_{\theta z}}{\partial \theta}+\frac{\partial T_{zz}}{\partial z}.$$

où $\boldsymbol{T}$ est le tenseur des extra-contraintes :

$$\boldsymbol{T}=2\mu\begin{bmatrix}\frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}+\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-\frac{u_\theta}{r}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)\\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}+\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-\frac{u_\theta}{r}\right) & \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}+\frac{u_r}{r} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)\\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial r}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial r}\right) & \frac{\partial u_z}{\partial z}.\end{bmatrix}$$

En outre, en supposant que le poids est négligeable et que l'on est dans un régime d'écoulement permanent, on peut simplifier les équations de Navier-Stokes :

$$\varrho\left(-\frac{u_\theta^2}{r}\right)=-\frac{\partial p}{\partial r},$$

$$0=-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2 T_{r\theta}}{\partial r},$$

$$0=-\frac{\partial p}{\partial z}.$$

Finalement, on a donc :

$$\varrho\left(\frac{u_\theta^2}{r}\right)=\frac{\partial p}{\partial r},$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}=\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right)-\frac{u_\theta}{r^2}\right),$$

$$0=\frac{\partial p}{\partial z}.$$

Question (c)

En développant le terme de droite, nous avons :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(ru_\theta)}{\partial r}\right) &= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\theta}{r}+\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\theta}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right)\\
&= \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-\frac{u_\theta}{r^2}+\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right)\\
&= \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right)\right)-\frac{u_\theta}{r^2}\\
&= \frac{1}{r}\left(\frac{\partial r}{\partial r}\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right)\right)-\frac{u_\theta}{r^2}\\
&= \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right)\right)-\frac{u_\theta}{r^2}.
\end{aligned}
$$

Question (d)

Le champ de pression n'est fonction que de r, c'est-à-dire $p = p(r)$. Ainsi :

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = 0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0.$$

De cette manière, nous avons par intégration successive :

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(ru_\theta)}{\partial r}\right) = 0.$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{r}\frac{\partial(ru_\theta)}{\partial r} &= C_1,\\
\mathrm{d}(ru_\theta) &= C_1 r\mathrm{d}r,\\
ru_\theta &= \frac{C_1}{2}r^2 + C_2,
\end{aligned}
$$

$$u_\theta = \frac{C_1}{2} r + \frac{C_2}{r}.$$

Les conditions aux limites sont telles que :

$$\begin{cases} u_\theta(R_2) = 0, \\ u_\theta(R_1) = R_1 \Omega_1, \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} C_2 = -C_1 \frac{R_2^2}{2}, \\ \Omega_1 = \frac{C_1}{2} \left(1 - \frac{R_2^2}{R_1^2}\right). \end{cases}$$

Ainsi :

$$C_1 = \frac{2\Omega_1}{1 - \dfrac{R_2^2}{R_1^2}}$$

$$C_2 = -\Omega_1 \frac{R_2^2}{1 - \dfrac{R_2^2}{R_1^2}}$$

Finalement :

$$u_\theta = \frac{\Omega_1 r}{1 - \dfrac{R_2^2}{R_1^2}} \left(1 - \frac{R_2^2}{r^2}\right)$$

Question (e)

La contrainte de cisaillement est donnée par :

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta} &= \mu \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right), \\ &= \mu \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) \right), \\ &= 2\mu \frac{R_2^2}{r^2} \frac{\Omega_1}{1 - \dfrac{R_2^2}{R_1^2}}. \end{aligned}$$

La contrainte au niveau du cylindre intérieur est donc :

$$\tau_{r\theta}(r = R_1) = 2\mu \frac{\Omega_1}{1 - \dfrac{R_2^2}{R_1^2}} \frac{R_2^2}{R_1^2}.$$

Le couple C appliqué au niveau du cylindre intérieur s'exprime par :

$$\begin{aligned}
C &= \int \mathrm{d}M \\
&= \int r \times \mathrm{d}F \\
&= \int R_1 \tau_{r\theta}(r = R_1) \mathrm{d}S \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^h R_1 \tau_{r\theta}(r = R_1) \mathrm{d}z \times R_1 \mathrm{d}\theta \\
&= 4\pi h \mu R_1^2 \frac{\Omega_1}{1 - \dfrac{R_2^2}{R_1^2}} \left(\frac{R_2^2}{R_1^2} \right) \\
&= 4\pi h \mu R_2^2 \frac{\Omega_1}{1 - \dfrac{R_2^2}{R_1^2}}.
\end{aligned}$$

La viscosité du fluide peut être déduite de l'équation précédente :

$$\begin{aligned}
\mu &= \frac{C}{4\pi h R_2^2} \frac{1 - \dfrac{R_2^2}{R_1^2}}{\Omega_1} \\
&= 1{,}34 \text{ Pa} \cdot \text{s}.
\end{aligned}$$

Correction du problème 1

Question (a)

La conservation de la quantité de mouvement s'écrit

$$\varrho \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{u} = \varrho \boldsymbol{g} - \nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}.$$

Comme on est en régime permanent uniforme, les termes en ∂_x et ∂_t disparaissent. Donc on peut simplifier grandement. Par ailleurs l'équation de continuité impose que $v = 0$ (voir démonstration du cours). La projection de cette équation dans un repère cartésien nous donne

$$0 = \varrho g \sin\theta + \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}y},$$

et

$$0 = -\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} - \varrho g_y \cos\theta + \frac{\mathrm{d}\sigma_y}{\mathrm{d}y}.$$

Question (b)

En tenant compte de $\tau(h) = 0$ et $\Sigma_y(h) = 0$, l'intégration est triviale et nous indique que le champ de contraintes est linéaire avec la profondeur, et cela indépendamment de la forme de la loi de comportement

$$\tau(y) = \varrho g \sin\theta (h - y), \tag{1}$$

$$\Sigma_y(h) = \sigma_y - p = -\varrho g \cos\theta (h - y). \tag{2}$$

Question (c)

La loi de comportement est $\tau = \mu\dot{\gamma}$ que l'on égale à la distribution (1) :

$$\dot{\gamma} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = \frac{\varrho}{\mu} g \sin\theta (h - y),$$

soumis à $u(0) = -u_0$. L'intégration donne le profil parabolique

$$u(y) = \frac{\varrho}{\mu} g \sin\theta \left(hy - \frac{1}{2} y^2 \right) + C$$

avec la constante d'intégration telle que $u(0) = -u_0$, donc $C = -u_0$. Le profil est donc

$$u(y) = \frac{\varrho}{\mu} g \sin\theta \left(hy - \frac{1}{2} y^2 \right) - u_0. \tag{3}$$

Une nouvelle intégration donne le débit par unité de largeur :

$$q = \int_0^h u(y) \mathrm{d}y = \left[\frac{\varrho}{\mu} g \sin\theta \left(\frac{1}{2} h y^2 - \frac{1}{6} y^3 \right) - u_0 y \right]_0^h = \frac{g h^3 \sin\theta}{3\nu} - h u_0,$$

avec $\nu = \mu/\varrho$.

Question (d)

La loi de comportement est $\tau = \mu(I)\sigma_y$ que l'on égale à la distribution (1) :

$$\tau = \mu(I)|\sigma_y| = \varrho g \sin\theta (h - y),$$

soumis à $u(0) = -u_0$. On a pris $p = 0$ et donc σ_y est donné par (2). On a donc

$$\mu(I) = \tan\theta.$$

Comme on utilise la loi empirique de Jop

$$\mu(I) = \mu_1 + \frac{\mu_2 - \mu_1}{I_0/I + 1},$$

on tire la relation entre I et θ :

$$I = I_0 \frac{\tan\theta - \mu_1}{\mu_2 - \tan\theta}.$$

Un écoulement permanent n'est possible que sur la plage de pentes : $\mu_2 \geq \tan\theta \geq \mu_1$. En utilisant la définition de I, on en déduit le taux de cisaillement :

$$\dot{\gamma} = \frac{I_0}{d} \sqrt{g \cos\theta (h - y)} \frac{\tan\theta - \mu_1}{\mu_2 - \tan\theta}.$$

L'intégration donne le profil en loi puissance 3/2

$$u(y) = C - a\sqrt{g\cos\theta(h-y)^3} \text{ avec } a = \frac{2I_0}{3d}\frac{\tan\theta - \mu_1}{\mu_2 - \tan\theta}$$

avec la constante d'intégration telle que $u(0) = -u_0$, donc $C = -u_0 + a\sqrt{g\cos\theta h^3}$. Le profil est donc

$$u(y) = -u_0 + a\sqrt{g\cos\theta h^3}\left(1 - \left(1 - \frac{y}{h}\right)^{3/2}\right). \tag{4}$$

La figure 8 compare les deux profils, qui ont des formes assez similaires (ce qui est normal car l'un varie en $(h-y)^2$ et l'autre en $(h-y)^{3/2}$) en dépit de la différence de rhéologie.

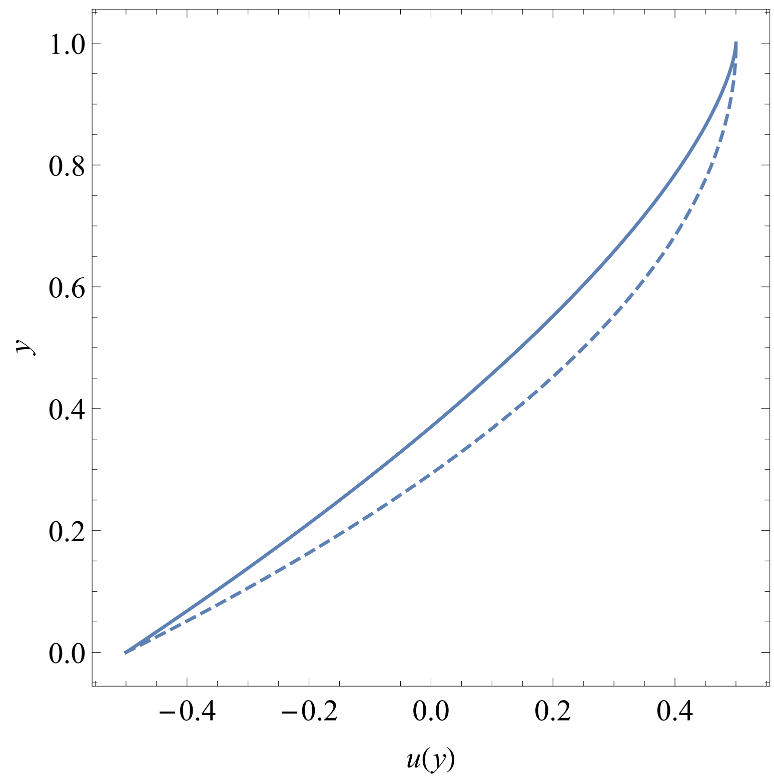

Figure 8 –: Profil de vitesse pour un fluide newtonien (trait discontinu) – donné par le profil (3) – et granulaire (trait continu) – donné par le profil (4) –; les unités sont arbitraires. Les paramètres ont été choisis en sorte que la vitesse au fond et celle à la surface libre prennent les mêmes valeurs pour les deux rhéologies.

Correction du problème 2

Question (a)

Comme l'écoulement est permanent, on $\partial_t = 0$. De même l'invariance en x fait que l'on cherche $u(y)$ et on pose directement $v = w = 0$; le champ de vitesse a une seule composante non nulle (celle selon x) et elle ne dépend que de la variable y. Seule la pression peut dépendre de x, toutes les autres variables ne peuvent en dépendre. Donc la conservation de la masse est trivialement satisfaite

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

La conservation de la quantité de mouvement dans la direction x se simplifie considérablement

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \varrho g_x + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

et comme on a une dépendance $u(y)$ et $\partial_x p = -a$, alors l'équation du mouvement est

$$u''(y) = -\frac{a}{\mu}.$$

Les conditions aux limites imposent l'adhérence aux parois

$$u(d) = u(0) = 0.$$

Question (b)

L'équation du mouvement s'intègre facilement

$$u(y) = \frac{a}{2\mu} y^2 + by + c,$$

avec b et c deux constantes. Les conditions aux limites imposent : $c = 0$ et $b = ad/(2\mu)$. Donc

$$u(y) = \frac{a}{2\mu} y(d - y)$$

Le profil de vitesse est parabolique. Par intégration on trouve :

$$\bar{u} = \frac{1}{h} \int_0^h u(y) \mathrm{d}y = \frac{a}{12\mu} d^2.$$

Question (c)

Par définition, la contrainte de cisaillement est

$$\tau = \mu \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = \frac{a}{2}(d - 2y).$$

Le profil de contrainte est donc linéaire.

Question (d)

De la relation donnant la vitesse moyenne on tire

$$|\Delta p| = 12 \frac{\mu \bar{u} L}{d^2}$$

et en égalant cette relation avec la définition de f on tire

$$f = 24 \frac{D\nu}{\bar{u} d^2} = \frac{96}{Re}.$$

Question (e)

Par définition on a en $y = 0$

$$\tau_p = \varrho \kappa^2 y^2 \left| \frac{\mathrm{d}\langle u \rangle}{\mathrm{d}y} \right|^2 = \frac{ad}{2}.$$

Pour simplifier les notations on introduit la vitesse de glissement $u_* = \sqrt{\tau_p/\varrho}$. On peut donc mettre l'équation précédente sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}\langle u \rangle}{u_*} = \frac{\mathrm{d}y}{\kappa}$$

qui s'intègre facilement

$$u(y) = \frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{y}{y_0},$$

avec y_0 une constante d'intégration. Le profil de vitesse est logarithmique près de la paroi.