



# Mécanique des fluides

## Section de génie civil

### Hydraulique

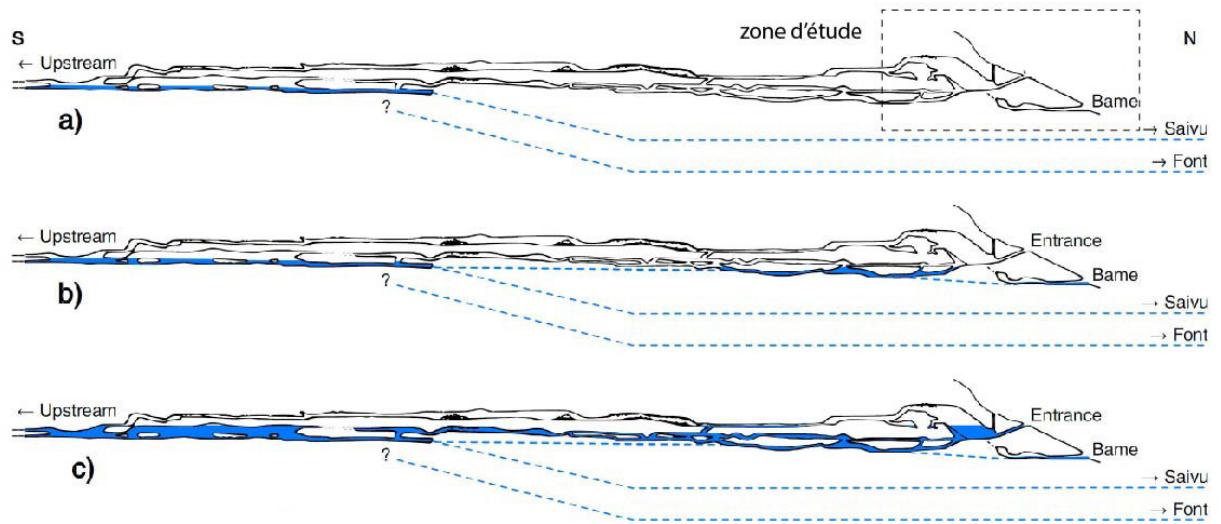
#### Problème 10 : hydraulique de la grotte de Milandre

La grotte de Milandre est située dans la commune de Boncourt (Jura) à la frontière franco-suisse. Elle est constituée d'un réseau karstique de conduites, gouffres et siphons, qui s'étend sur plus de 10 km (voir figure 1). La rivière souterraine (la Milandrine) est un affluent de l'Allaine. On s'intéresse au gouffre de Bâme, et plus particulièrement aux crues qui remplissent ce gouffre.

À cet effet, on étudie le fonctionnement hydraulique simplifié du gouffre (voir figure 2): le gouffre est alimenté par un débit  $Q$  en son sommet  $D$ . Le gouffre est assimilable à un réservoir cylindrique de rayon  $2R$ , dont le plancher est à la cote 0 (segment AB à la figure 2). L'eau est évacuée par un boyau (segment BC à la figure 2) dont la longueur projetée est  $\ell$ , de diamètre  $d$ , et dont l'angle par rapport à l'horizontale est  $\theta$ . Lors d'une crue, le gouffre se remplit d'eau, le trop-plein d'eau est évacuée par le boyau et resurgit en C (source de la Milandrine).

Les dimensions sont les suivantes :

- débit entrant  $Q = 400 \text{ L/s}$ ;
- longueur projetée  $\ell = 500 \text{ m}$ ;
- $\theta = 0,30^\circ$  l'angle que fait le boyau par rapport à l'horizontale ;
- $z_c$  position de la source  $C$  par rapport au plancher AB du gouffre ;
- hauteur initiale d'eau  $h = 12 \text{ m}$ ;
- rayon du gouffre  $R = 20 \text{ m}$ ;
- rayon du boyau  $d = 50 \text{ cm}$ .



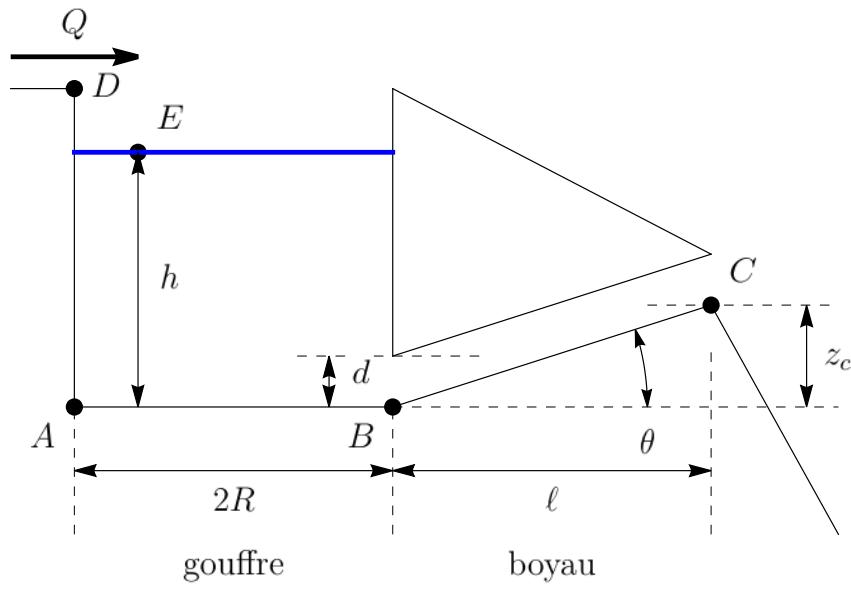
**Figure 1** – Réseau karstique de la Milandrine. La zone d'étude est le gouffre de Bâme.  
Source : C. Vuilleumier, *Hydraulics and sedimentary processes in the karst aquifer of Milandre (Jura Mountains, Switzerland)*, thèse de doctorat, Université de Neuchâtel, 2017.

Si nécessaire, on peut prendre les coefficients de perte de charge singulière suivante en compte :

- rétrécissement brutal en B :  $\zeta_1 = 0,5$ ;
- coude en B :  $\zeta_2 = \sin^2(\theta/2) + 2 \sin^4(\theta/2)$ .

Pour les pertes de charge dans le boyau, on utilisera la formule de Darcy-Weisbach avec un coefficient de frottement  $f = 0,05$ .

- (a) [0,50] En appliquant le théorème de Bernoulli (formule de Torricelli), quel serait le débit initial dans la source si on néglige les pertes de charge et tout effet d'instationnarité ?
- (b) [0,50] Refaire le calcul en prenant en compte les pertes de charge.
- (c) [0,50] En déduire l'équation différentielle qui régit la hauteur d'eau dans le gouffre en supposant qu'on est suffisamment proche d'un régime permanent pour que le théorème de Bernoulli soit valable. Est-ce que vous considérez que l'hypothèse de régime quasi permanent est réaliste ?



**Figure 2 -:** Schéma du gouffre. L'échelle n'est pas respectée.

- (d) [0,50] Quelle est la hauteur d'eau à l'équilibre dans le gouffre (telle que le débit sortant au niveau de la source soit égal au débit  $Q$  entrant dans le gouffre).

## Problème 11: seuil de la Matte

Les *déversoirs latéraux* – appelés aussi *seuils latéraux* – sont des ouvrages hydrauliques qui servent à déverser le trop-plein d'eau d'un canal *principal* vers un canal *secondaire* – appelé aussi canal de dérivation – dans le but de protéger contre les crues ou bien de dévier une partie d'un cours d'eau pour l'irrigation ou l'industrie. Un exemple historique de tels ouvrages est le seuil de la Matte (Mattenschwelle) sur l'Aar à Berne (voir figure 3). Ce déversoir a été construit au Moyen Âge en confortant un seuil naturel de la rivière. Il a servi à détourner l'eau de l'Aar vers le quartier de la Matte pour un usage industriel, et depuis la fin du xx<sup>e</sup> siècle, il sert aussi pour la production hydroélectrique.

On se propose ici d'étudier le fonctionnement hydraulique de tels ouvrages (voir figure 4). Le canal principal est supposé être à section rectangulaire constante de largeur  $b$ , de pente  $i$ . Il déverse une partie de l'eau dans un canal secondaire par le biais d'un déversoir latéral de longueur  $L$  et de pente  $p$ . On suppose que l'écoulement dans le canal secondaire est sans influence sur l'écoulement principal (déversoir dénoyé). La hauteur d'eau est notée  $h(x)$ , et le débit  $Q(x)$  est le débit total. On notera  $H_s$  la charge spécifique et  $u$  la vitesse moyenne dans le canal principal. Le débit entrant (juste à l'amont du déversoir) est  $Q_0$ . Le point  $x = 0$  (origine) marque le début (amont) du déversoir latéral.

Les dimensions sont les suivantes :

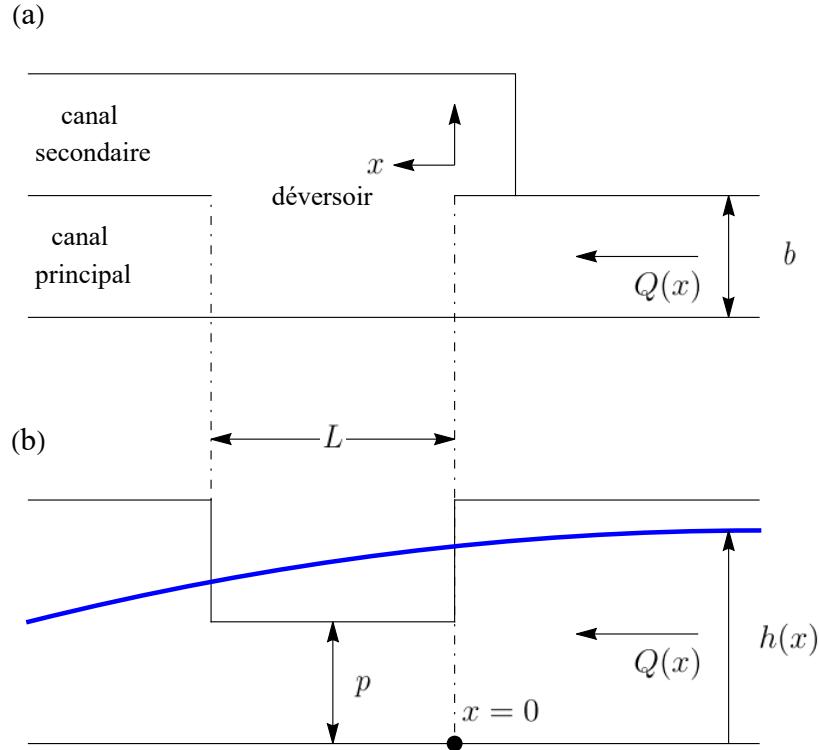
- débit entrant  $Q_0 = 200 \text{ m}^3/\text{s}$ ;
- largeur du canal principale  $b = 40 \text{ m}$ ;
- pente du canal principale  $i = 0,5 \%$ ;
- longueur du déversoir latéral  $L = 10 \text{ m}$ ;
- pente du déversoir latéral  $p = 2 \text{ m}$ ;
- coefficient de débit  $c = 0,3$ ;
- diamètre de la rugosité du lit  $d_{90} = 5 \text{ mm}$ .

- (a) [0,40] Calculer pour le canal principal : la hauteur normale, la hauteur critique, la charge spécifique à l'amont immédiat du déversoir.
- (b) [0,40] Calculer le nombre de Froude. Quel est le régime d'écoulement ? Tracer l'allure de  $H_s$  en fonction de  $h$ , et placer le point correspondant à la condition hydraulique entrante.



**Figure 3 –:** Le seuil de la Matte sur l’Aar à Berne. (a) vue plongeante depuis le pont de Kirchenfeld. (b) orthophotoplan du seuil de la Matte. Source: (a) C. Ancey, et (b) [map.geo.admin.ch](http://map.geo.admin.ch).

- (c) [0,40] En supposant que la charge spécifique peut être considérée comme constante sur de petites distances, déterminer l’expression du débit  $Q$  en fonction de la hauteur  $h$  et de la charge spécifique  $H_s$ , et  $g$  la constante de la gravité.



**Figure 4** –: (a) Vue de dessus de la dérivation. (b) Vue de côté.

- (d) [0,40] Toujours en supposant que la charge spécifique ne varie pas de façon significative le long du déversoir, établir l'équation différentielle régissant la variation de hauteur d'eau infinitésimale  $h'(x)$  en fonction de  $h(x)$ ,  $Q(x)$  et  $Q'(x)$ .
- (e) [0,40] En supposant que le débit  $dQ$  transitant par unité de longueur  $dx$  du déversoir peut être estimé à l'aide de la formule du seuil dénoyé :

$$dQ(x) = -c\sqrt{2g}(h - p)^{3/2}dx$$

(à noter : (i) le signe – compte tenu du fait qu'il s'agit du débit perdu par le canal principal, (ii)  $c$  est le coefficient de débit), établir l'équation différentielle exprimant  $h'$  en fonction de  $H_s$  et  $h$ .

- (f) [0,40] Adimensionnaliser cette équation différentielle en introduisant la hauteur adimensionnelle  $\eta = h/H_s$  et l'abscisse adimensionnelle  $\xi = x/L$ . En supposant qu'on est à petit nombre de Froude, et on suppose donc que  $\zeta = 1 - \eta$

est petit devant 0. Faire un développement limité en  $\zeta$  pour obtenir une approximation de l'équation différentielle. On définira aussi la pelle et la largeur adimensionnelle pour simplifier la notation :

$$\hat{p} = \frac{p}{H_s}, \hat{b} = \frac{b}{L} \text{ et } \hat{Q} = \frac{Q}{b\sqrt{gH_s^3}}.$$

On rappelle que  $(1 + x)^n = 1 + nx + O(x^2)$ .

- (g) [0,40] En considérant qu'en  $x = 0$ , la hauteur d'écoulement est la hauteur normale, résoudre l'équation différentielle approchée. Faire l'application numérique et tracer la hauteur  $h(x)$  le long du déversoir. En déduire la hauteur d'eau en  $\xi = 1$  ( $x = L$ ) et le débit qui transite par le canal principal. En déduire le débit dévié dans le canal secondaire.

## Problème 12: saut du Doubs

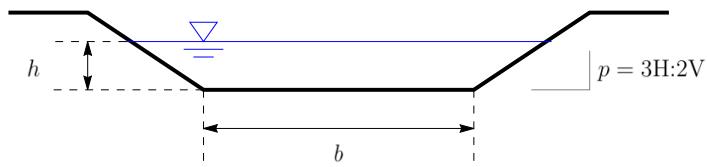
On étudie l'exutoire du lac des Brenets emprunté par le Doubs jusqu'à la cascade appelé « Saut du Doubs » (figure 5). On fait une étude hydraulique simplifiée du bief juste à l'amont de la cascade. Les caractéristiques sont les suivantes :

- débit  $Q = 28 \text{ m}^3/\text{s}$ ;
- largeur du lit  $b = 7 \text{ m}$ ;
- pente du bief  $i = 1\%$ ;
- forme trapézoïdale avec des berges de pente  $p = 3 \text{ H}: 2 \text{ V}$  (figure 6);
- diamètre de la rugosité du lit  $d_{50} = 21 \text{ mm}$ .



**Figure 5** –: Vue sur le saut du Doubs à la frontière entre France et Suisse (Le Locle, NE).

- (a) [0,40] Que vaut le coefficient de Manning-Strickler (on arrondira à l'entier le plus proche)?
- (b) [0,40] Donner les expressions analytiques de la section mouillée, du périmètre mouillé, et du rayon hydraulique.
- (c) [0,40] Calculer les hauteurs normale et critique.



**Figure 6** –: Section simplifiée du bief étudié.

- (d) [0,40] Calculer le nombre de Froude. Quel est le régime d'écoulement?
- (e) [0,40] Tracer la courbe de remous en amont de la chute d'eau.

## Correction du Problème 10

### Question (a)

Si on néglige les pertes de charges et qu'on considère une ligne de courant entre E et C, qu'on suppose l'écoulement permanent avec une vitesse en E nulle (comme  $d \ll 2R$  on peut appliquer la formule de Torricelli), alors on déduit

$$\frac{u_C^2}{2g} + z_c = z_e,$$

avec  $z_e = h = 12 \text{ m}$  et  $z_c = \ell \tan \theta = 2,6 \text{ m}$  (la question se pose s'il faut appliquer en C ou bien au milieu, mais une simple application numérique montre que cela ne change le résultat que de 1 % environ). Le débit sortant en C est :

$$Q_C = \pi \frac{d^2}{4} \sqrt{2g(h - z_c)} = 2,67 \text{ m}^3/\text{s}.$$

### Question (b)

On recommence le calcul en prenant en compte les pertes de charge :

- régulièrement réparties le long du boyau

$$\Delta H_r = f \frac{L}{d} \frac{u^2}{2g},$$

avec  $L = \ell / \cos \theta$  la longueur du boyau ;

- singulières en C :

$$\Delta H_s = (\zeta_1 + \zeta_2) \frac{u^2}{2g}.$$

$$\frac{u_C^2}{2g} + z_c + \Delta H_r + \Delta H_s = z_e.$$

On trouve facilement

$$u_c = \sqrt{\frac{2g(h - z_c)}{1 + f \frac{L}{d} + \zeta_1 + \zeta_2}},$$

et donc comme débit sortant

$$Q_c = \pi \frac{d^2}{4} u_c = 369 \text{ L/s.}$$

## Question (c)

L'équation différentielle s'obtient en faisant un bilan de masse. Pendant un laps de temps  $dt$ , il y a un volume d'eau qui entre en E:  $Qdt$ , et un volume qui sort en C:  $Q_c dt$ . La différence des deux provoque une variation de volume :

$$dV = \pi R^2 dh = (Q - Q_c)dt,$$

soit encore

$$\frac{dV}{dt} = \pi R^2 \frac{dh}{dt} = Q - Q_c,$$

que l'on peut exprimer entièrement en fonction de  $h$ :

$$\frac{dh}{dt} = \frac{Q}{\pi R^2} - \frac{d^2}{4R^2} \sqrt{\frac{2g(h - z_c)}{1 + f \frac{L}{d} + \zeta_1 + \zeta_2}},$$

Comme  $d \ll 2R$ , il semble *a priori* correct de supposer un régime permanent car la vitesse de la surface libre varie en  $(d/R)^2$  de la vitesse au point de résurgence C.

## Question (d)

La hauteur d'équilibre est atteinte lorsque les débits entrant et sortant sont égaux. Cela revient à considérer  $dh/dt = 0$ , donc

$$Q = \pi \frac{d^2}{4} \sqrt{\frac{2g(h - z_c)}{1 + f \frac{L}{d} + \zeta_1 + \zeta_2}} \Leftrightarrow h = 13,6 \text{ m.}$$

## Correction du Problème 11

### Question (a)

La hauteur normale est la solution de l'équation implicite :

$$Q = K\sqrt{ibh} \left( \frac{bh}{2h+b} \right)^{2/3} \Rightarrow h_n = 2,23 \text{ m}$$

La hauteur critique dans un canal prismatique à section rectangulaire est

$$h_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} \Rightarrow h_c = 1,37 \text{ m}$$

et donc la charge spécifique en  $x = 0$  est

$$H_s = h_n + \frac{u^2}{2g} = 2,49 \text{ m},$$

avec  $u = Q/b/h_n = 2,24 \text{ m/s}$  la vitesse moyenne.

### Question (b)

Le Froude est dans un canal prismatique à section rectangulaire

$$Fr = \frac{u}{\sqrt{gh}} = 0,48,$$

et donc on est en régime subcritique car  $Fr < 1$ . On trace la charge spécifique  $H_s$  en fonction de  $h$  et on reporte les conditions hydrauliques  $(h_n, H_s(h_n))$ . La figure 7 montre comment varie  $H_s$  en fonction de  $h$ . Pour la branche subcritique, on a  $u^2/(2g) \ll h$  et donc  $H_s \propto h$ .

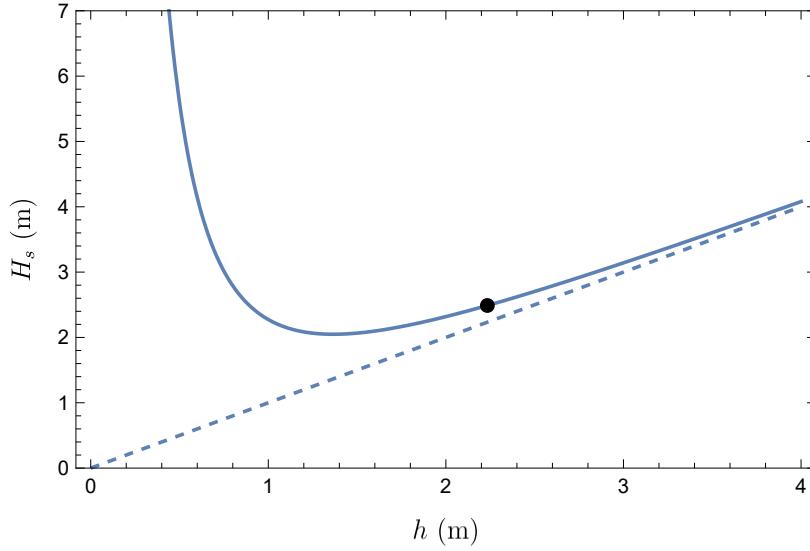
### Question (c)

La charge spécifique est par définition

$$H_s = \frac{u^2}{2g} + h,$$

avec ici  $u = Q/(bh)$ , donc on a :

$$u = \sqrt{2g(H_s - h)} \Rightarrow Q = bh\sqrt{2g(H_s - h)}. \quad (1)$$



**Figure 7** --: Variation de la charge spécifique avec la hauteur  $h$  (courbe continue). La courbe tiretée montre la variation asymptotique  $H_s \propto h$ .

### Question (d)

La charge spécifique est supposée constante

$$H_s = \frac{Q^2}{2gh^2b^2} + h,$$

donc sa différentielle est nulle

$$H'_s = 2 \frac{QQ'}{2gh^2b^2} - 2 \frac{Q^2h'}{2gh^3b^2} + h' = 0.$$

En regroupant les termes on trouve

$$h' = -\frac{QQ'}{gh^2b^2 \left(1 - \frac{Q^2}{gh^3b^2}\right)}.$$

On peut réarranger les termes

$$h' = -h \frac{QQ'}{gh^3b^2 - Q^2}. \quad (2)$$

## Question (e)

On utilise la relation du seuil dénoyé pour estimer la perte de débit  $Q'$

$$Q'(x) = -c\sqrt{2g}(h - p)^{3/2},$$

qu'on substitue dans l'équation différentielle (2):

$$h' = h \frac{Q}{gh^3 b^2 - Q^2} c \sqrt{2g}(h - p)^{3/2}.$$

On élimine  $Q$  en se servant de l'équation (1):

$$Q = bh\sqrt{2g(H_s - h)},$$

pour obtenir

$$h' = 2 \frac{c}{b} \frac{\sqrt{(H_s - h)(h - p)^3}}{3h - 2H_s}. \quad (3)$$

## Question (f)

Avec les notations proposées dans l'énoncé, on trouve après substitution dans l'équation

$$\eta' = \frac{d\eta}{d\xi} = 2 \frac{c}{\hat{b}} \frac{\sqrt{(1 - \eta)(\eta - \hat{p})^3}}{3\eta - 2}. \quad (4)$$

Cette équation peut aussi se mettre sous la forme :

$$\zeta' = -\frac{d\eta}{d\xi} = -2 \frac{c}{\hat{b}} \frac{\sqrt{\zeta(1 - \zeta - \hat{p})^3}}{3 - 3\zeta - 2}.$$

Au premier ordre en  $\zeta$ , on a immédiatement

$$\zeta \ll 1 \Rightarrow 3 - 3\zeta - 2 = 1 \text{ et } 1 - \zeta - \hat{p} = 1 - \hat{p}.$$

On a finalement

$$\zeta' = -2 \frac{c}{\hat{b}} \sqrt{\zeta(1 - \hat{p})^3}, \quad (5)$$

ou bien encore

$$-\frac{\zeta'}{2\sqrt{\zeta}} = \frac{c}{\hat{b}}(1 - \hat{p})^{3/2}$$

qui est une équation différentielle à variable séparable (facile à intégrer).

## Question (g)

L'intégration de l'équation (5) fournit

$$\zeta^{1/2} = a + \frac{c}{\hat{b}}(1 - \hat{p})^{3/2}\xi \Rightarrow \zeta = \left(a + \frac{c}{\hat{b}}(1 - \hat{p})^{3/2}\xi\right)^2$$

avec  $a$  une constante d'intégration. La constante d'intégration  $a$  est déterminée en posant qu'en  $\xi = 0$ , on a

$$\zeta(0) = \zeta_0 = 1 - \frac{h_n}{H_s} \Rightarrow a = \zeta_0^{1/2}.$$

**A.N.:**  $a = \zeta_0^{1/2} = 0,32$ . La hauteur adimensionnelle est

$$\eta = 1 - \zeta = 1 - \left(a + \frac{c}{\hat{b}}(1 - \hat{p})^{3/2}\xi\right)^2,$$

ou sous forme dimensionnelle

$$h(x) = H_s \left(1 - \left(a + \frac{cx}{b} \left(1 - \frac{p}{H_s}\right)^{3/2}\right)^2\right).$$

La figure 8 montre la courbe de remous le long du déversoir latéral.

La hauteur en  $\xi = 1$  est donc

$$\zeta(1) = \left(\zeta_0^2 + \frac{c}{\hat{b}}(1 - \hat{p})^{3/2}\right)^2 \Rightarrow \eta(1) = \eta_1 = 1 - \left(\zeta_0^2 + \frac{c}{\hat{b}}(1 - \hat{p})^{3/2}\right)^2.$$

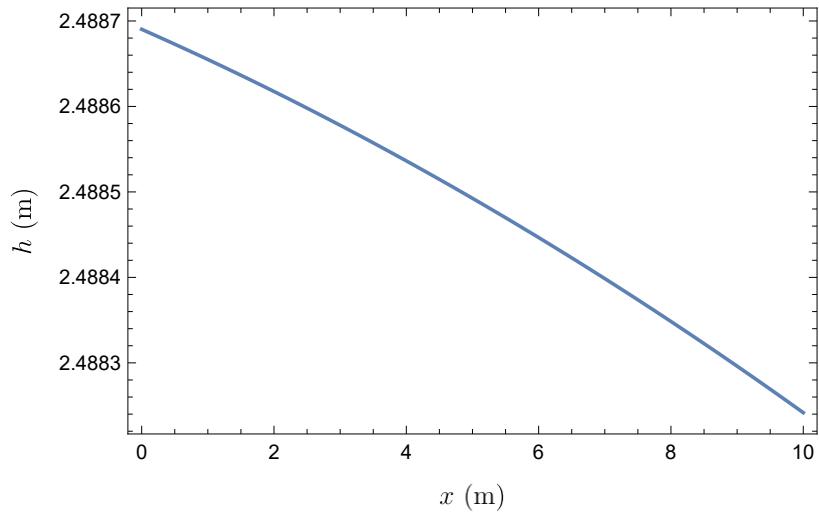
**A.N.:**  $\eta_1 = 0,89$ , et donc  $h_1 = 2,22$  m en  $x = 10$  m.

Le débit dans le canal principal est obtenu en adimensionnalisant l'équation (1)

$$\hat{Q} = \frac{Q}{b\sqrt{gH_s^3}} = \sqrt{2\eta}(1 - \eta),$$

et en donc  $\xi = 1$ , on a

$$\hat{Q}_1 = \hat{Q}(\xi = 1) = \sqrt{2\eta_1}(1 - \eta_1).$$



**Figure 8 –:** Variation de la hauteur  $h$  le long du déversoir.

$$\text{A.N.: } Q_1 = b\sqrt{gH_s^3}\sqrt{2\eta_1}(1 - \eta_1) = 84,7 \text{ m}^3/\text{s}.$$

Le débit dérivé qui transite par le canal secondaire s'obtient par différence du débit entrant  $Q$  et du débit  $Q_1$ :

$$Q_d = Q - Q_1 = Q - b\sqrt{gH_s^3}\sqrt{2\eta_1}(1 - \eta_1) = 200 - 84,7 = 115,3 \text{ m}^3/\text{s}.$$

## Correction du Problème 12

### Question (a)

On prend la formule de Strickler (5.6) du cours :

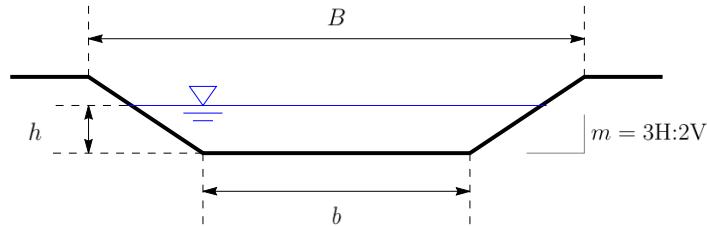
$$K = \frac{21,1}{d_{50}^{1/6}} = 40 \text{ m}^{1/3} \cdot \text{s}^{-1}.$$

### Question (b)

On considère un canal prismatique à section trapézoïdale. La section mouillée  $S$  d'une section trapézoïdale de « fruit<sup>1</sup> »  $m = p^{-1} = 3/2$  est

$$S = \frac{1}{2} (b + B) h = (b + mh) h$$

avec  $B = b + 2mh$  la largeur au miroir (figure 9).



**Figure 9** –: Section simplifiée du bief étudié et notation.

Le périmètre mouillé est

$$\chi = b + 2\sqrt{h^2 + (mh)^2} = b + 2h\sqrt{1 + m^2} = b + h\sqrt{13}.$$

Le rayon hydraulique est

$$R_h = \frac{S}{\chi} = h \frac{b + mh}{b + 2h\sqrt{1 + m^2}}.$$

---

1. Le fruit  $m$  d'un talus est l'inverse de sa pente  $p$ .

### **Question (c)**

Il faut résoudre l'équation (non linéaire) du régime permanent uniforme

$$Q = K R_h^{2/3} S \sqrt{i}.$$

On trouve

$$h_n = 1,86 \text{ m.}$$

La hauteur critique est donnée par la définition (5.21) p. 122 des notes de cours (canal prismatique de section quelconque) en résolvant :

$$\text{Fr} = 1 \Rightarrow g \frac{S^3(h_c)}{B(h_c)} = Q^2.$$

Soit encore

$$g(b + mh_c)^3 h_c^3 = Q^2(b + 2mh_c).$$

On trouve

$$h_c = 1,08 \text{ m.}$$

### **Question (d)**

Le nombre de Froude est donné par la définition (5.20) p. 122 :

$$\text{Fr} = \frac{Q}{S \sqrt{g \frac{S}{B}}} = 0,4.$$

On a  $\text{Fr} < 1$  : le régime est subcritique (ce que l'on pouvait voir aussi en notant que  $h_n > h_c$ ).

### **Question (e)**

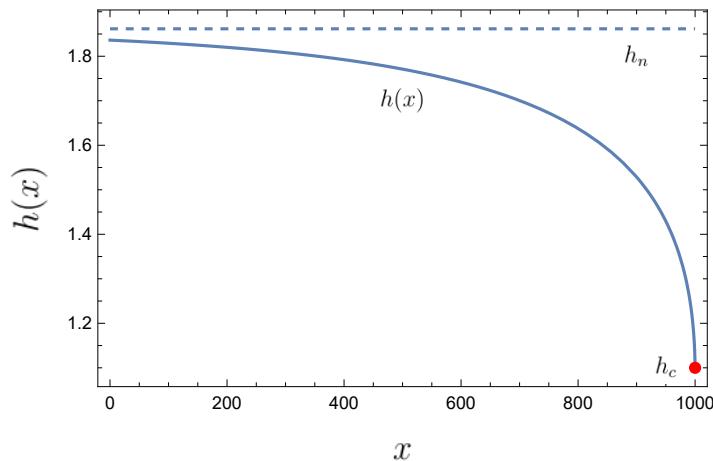
Le régime étant subcritique, l'écoulement dépend d'une condition à la limite placée à l'aval. La seule possible ici est la chute d'eau au Saut du Doubs : la hauteur doit y être critique. La courbe de remous est une branche de type M2 sur le tableau de la figure 5.35 (p. 120) des notes de cours.

Pour tracer la courbe de remous, on considère l'équation (5.17) des notes de cours (p. 115):

$$h'(x) = \frac{j_f - i}{\text{Fr}^2 - 1} \quad (6)$$

soumise à une condition à la limite en aval  $h = h_c + \epsilon$  (numériquement il faut prendre une valeur un peu plus grande pour pouvoir résoudre numériquement l'équation). La solution est une branche M2 qui part de  $h = h_c$  en un point (posons arbitrairement  $x = 0$ ) et tend vers  $h_n = 1,86$  m quand on va dans le sens des  $x$  décroissants. La figure 12 montre une solution numérique avec Mathematica (le script est donné à la figure 11).

(Pour l'examen on se contente d'un tracé qualitatif. On va ici un peu plus loin.)



**Figure 10** --: Solution numérique de l'équation de la courbe de remous (6).

```

Rh[h_] :=  $\frac{n (w + m n)}{w + 2 h \sqrt{1 + m^2}}$ 
S[h_] := h (w + m h)
B[h_] := w + 2 m h

fr[h_] := Q/Sqrt[g S[h]^3/B[h]]

jf[h_] := Q^2/K^2/Rh[h]^(4/3)/S[h]^2

eqn = NDSolve[{h'[x] == (jf[h[x]] - i)/(fr[h[x]]^2 - 1),
h[1000] == 1.1}, h, {x, 0, 1000}]

{h → InterpolatingFunction[ Domain: {{0, 1.00 × 10^3}} ]}]

```

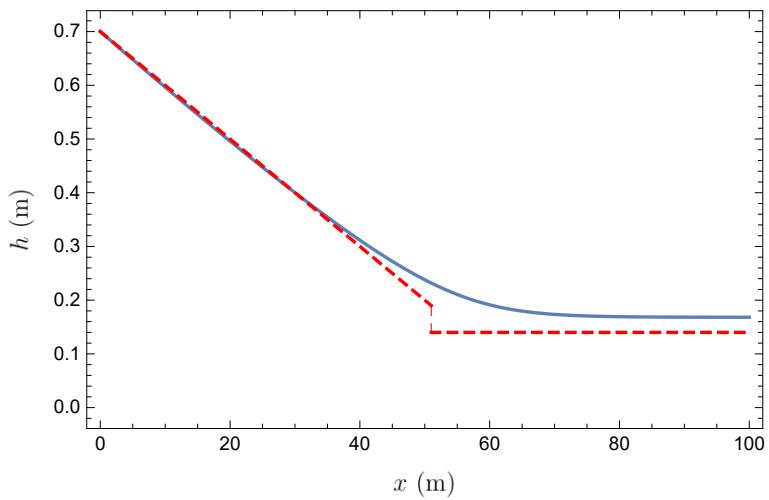
---

```

des = Show[
Plot[h[x] /. eqn, {x, 0, 1000}, PlotRange → All, Frame → True,
FrameLabel → {MaTeX["x", Magnification → 1.5], MaTeX["h(x)", Magnification → 1.5]}],
Plot[hn, {x, 0, 1000}, PlotStyle → Dashed],
Epilog → {
Inset[MaTeX["h_n"], {900, 1.8}],
Inset[MaTeX["h(x)"], {500, 1.7}],
{Red, PointSize[0.02], Point[{1000, 1.1}]},
Inset[MaTeX["h_c"], {950, 1.1}]
}]

```

**Figure 11** –: Script de résolution de l'équation de la courbe de remous (6).



**Figure 12 –:** Courbe de remous du problème considéré. La courbe continue est la solution numérique de l'équation de la courbe de remous (6). La courbe tiretée représente la solution idéalisée du problème 1 telle qu'on peut la déduire de l'analyse de la figure 1.