

- Autrice des dias (2023)  
Prof. Katrin Beyer

- Earthquake  
Engineering and  
Structural Dynamics  
Laboratory

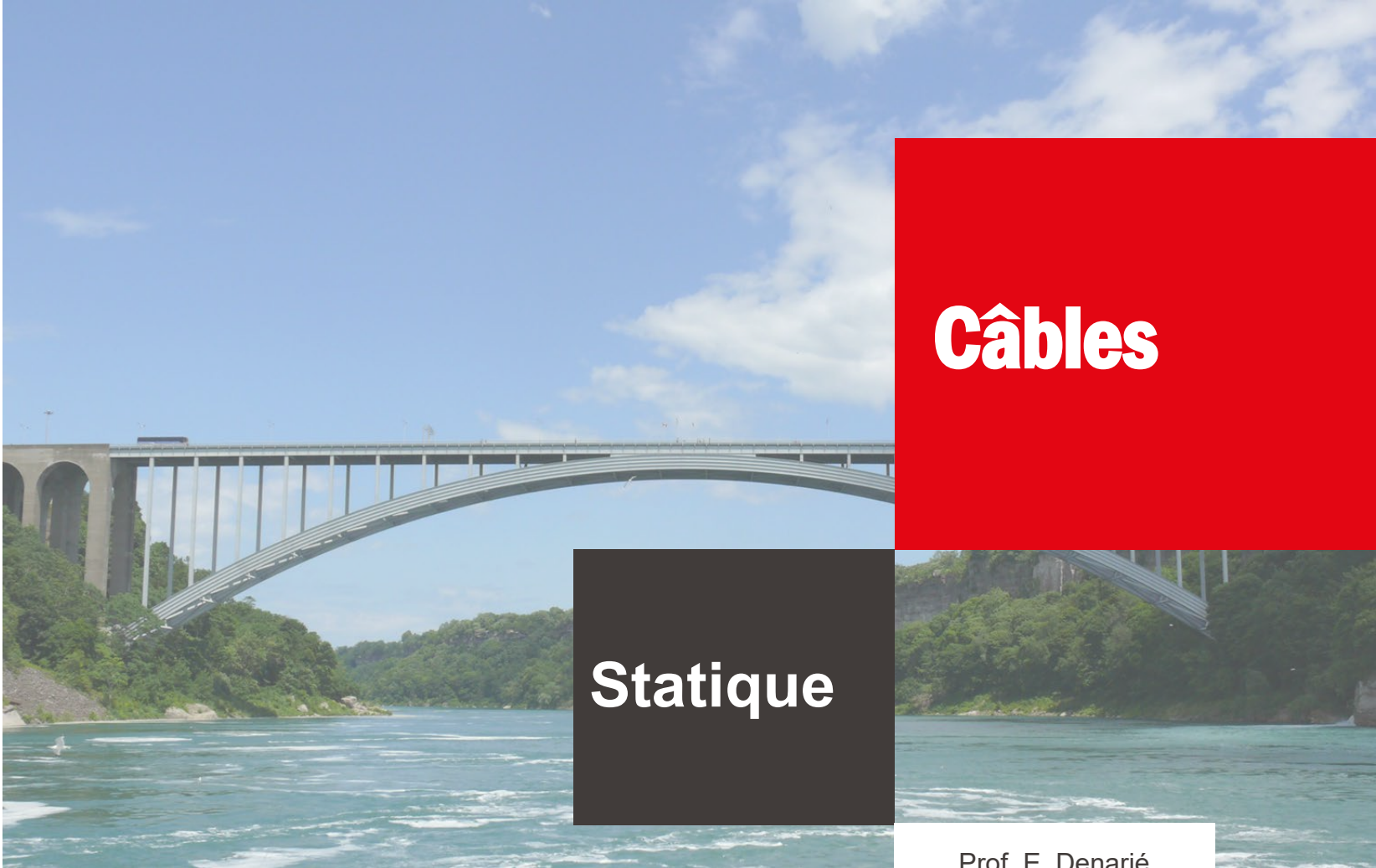
- Dias supplémentaires  
Prof. E. Denarié (2025)

- Laboratoire de  
comportement et  
conception des  
structures en béton

# Câbles

## Statique

Prof. E. Denarié



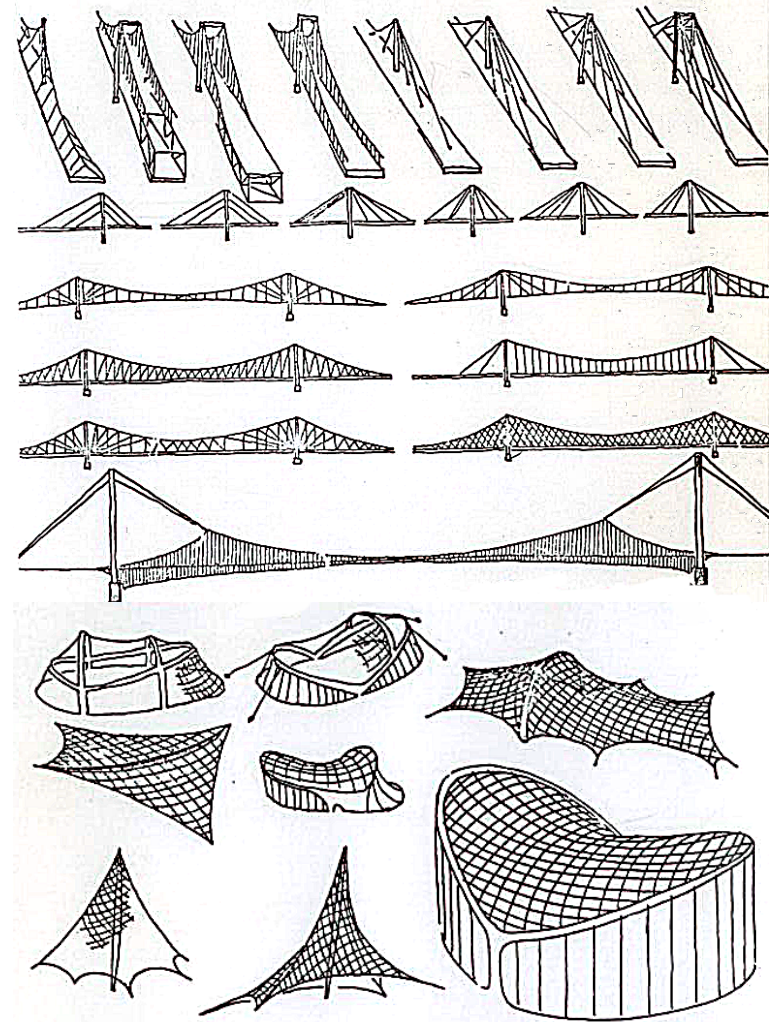
A la fin de ce cours, vous saurez :

- Quelles sont les caractéristiques statiques d'un câble
- Comment déterminer la forme d'un câble sous charges arbitraires en utilisant les équations différentielles d'équilibre ou l'équilibre des fragments
- Comment déterminer la forme d'un câble sous charges concentrées
- Quelles sont les similitudes entre un câble et un arc

1. Dérivation de l'équation différentielle des câbles
2. Câble sous une charge uniformément répartie sur l'horizontale
  - Analyse par l'équation différentielle
  - Analyse par l'équilibre des fragments
3. Câble sous une charge uniformément répartie le long de l'axe du câble
4. Câble sous charges concentrées
5. Comparaison câble - arc

# Types de câbles

- Câbles quasi-rectilignes
  - Câbles qui ne sont presque pas chargés entre leurs extrémités
  - Haubans, suspentes et tirants
- Câbles courbes
  - Charges distribuées
  - Câbles de grande portée
- Réseaux (ou nappes)
  - Câbles croisés
  - → Surface courbe
- Autres
  - Tenségrités
  - Toiles
  - Structures pneumatiques





<https://www.danvanderzwalm.com/album/el-suizo-toni-ruttimann-the-bridge-builder>

## Tony «El Suizo» Rüttimman

Constructeur de ponts, bénévole, autodidacte  
Recyclage de câbles usagés de téléphériques

[https://www.youtube.com/watch?v=H7\\_V3wvsnZA](https://www.youtube.com/watch?v=H7_V3wvsnZA)

<https://www.danvanderzwalm.com/album/el-suizo-toni-ruttimann-the-bridge-builder>

[https://en.wikipedia.org/wiki/Toni\\_Rüttimann](https://en.wikipedia.org/wiki/Toni_Rüttimann)



<https://www.aguaplano.org/en/toni-el-suizo-4/>



Voir <https://fr.wikiarquitectura.com/bâtiment/stade-olympique-de-munich/>







- **Élément structural qui n'est résistant qu'à l'effort normal de traction (tension du câble)**

- Le câble représente une liaison unilatérale
- Le câble n'offre de résistance ni à la compression, ni à l'effort tranchant, ni à la flexion, ni à la torsion (le diamètre est très faible par rapport à sa longueur)

- **Matériaux**

- Acier à très haute résistance (acier pour câbles)
- Fibres de carbone
- Fibres naturelles

- **Géométrie du câble**

- Câble non chargé : lâche, sans forme définie
- Les charges sur le câble définissent sa configuration
- But des analyses des câbles : trouver pour une charge donnée la forme qui permet d'avoir l'équilibre du câble
- Types de charges : poids propre, charges concentrées ou distribuées, pré-tension
- L'hypothèse des petites déformations n'est plus valable

# Dérivation de l'équation différentielle des câbles

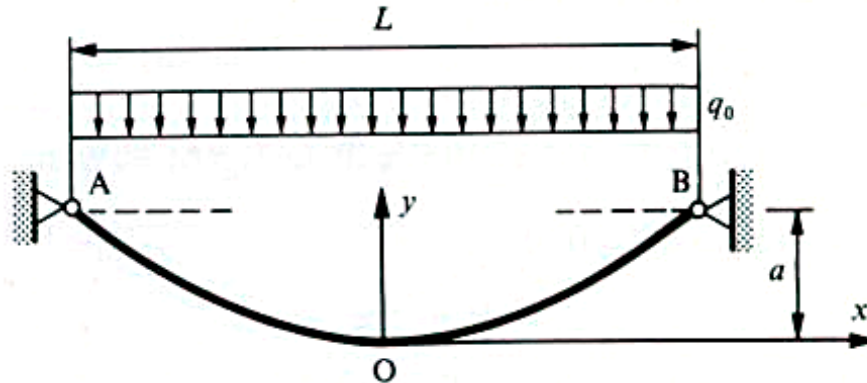
Câble sous charge répartie arbitraire (cas plan)

■ Hypothèses :

- Le câble est inextensible (la forme change mais pas la longueur)
- La force répartie  $q(x)$  agit vers le bas (effet de la pesanteur)

■ Objectif :

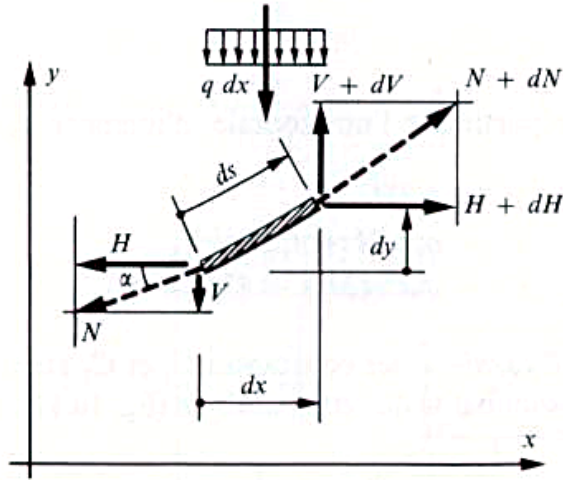
Trouver  $y(x)$ : la forme qui permet l'équilibre du câble avec la charge  $q(x)$



$L$  : la portée du câble  
 $a$  : la flèche du câble  
 $s$  : la longueur du câble

# Dérivation de l'équation différentielle des câbles

Equilibre d'un petit tronçon  $ds$  d'un câble sous des charges verticales :

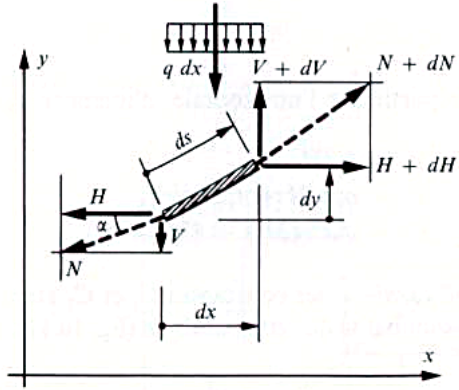


$N$  : effort normal (tension) qui agit dans la direction du câble ( $N$  a la même pente que le câble)

Décomposition de  $N$  en 2 inconnues  $V$  et  $H$  :

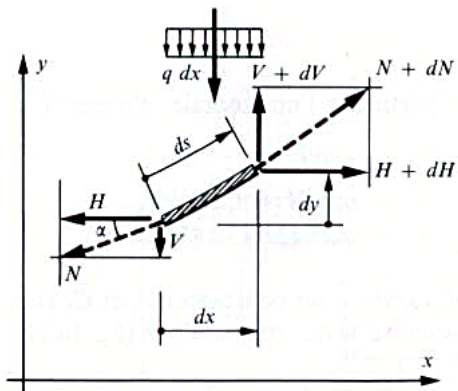
# Dérivation de l'équation différentielle des câbles

Equilibre d'un petit tronçon  $ds$  d'un câble sous des charges verticales :



Longueur du câble :

# Equation différentielle d'équilibre d'un câble



- $N$  Effort normal
- $V$  Composante verticale
- $H$  Composante horizontale
- $q$  Charge répartie verticale (positive vers le bas)
- $y$  Configuration du câble / forme en équilibre
- $s$  Longueur du câble

$$V = Hy'$$

$$V'(x) = q(x)$$

$$H(x) = \text{const.}$$

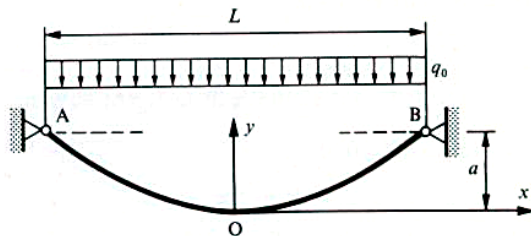
$$\boxed{y''(x) = \frac{q(x)}{H}}$$

$$ds = dx \sqrt{1 + y'(x)^2}$$

$$s = \int_{x_1}^{x_2} ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$$

$$N = \sqrt{H^2 + V^2} = H \sqrt{1 + y'(x)^2}$$

# Exemple : câble sous une charge uniformément répartie sur l'horizontale

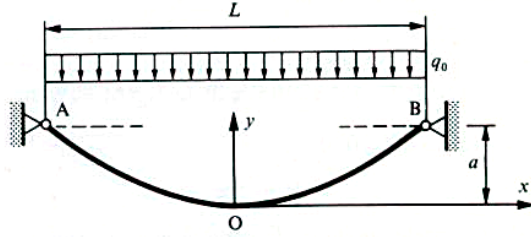


$$y''(x) = \frac{q(x)}{H}$$

Calculer avec l'équation différentielle

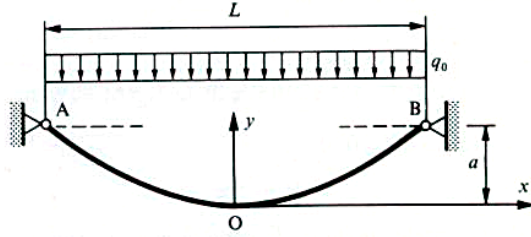
- La composante horizontale  $H$  si la flèche est égale à  $a$
- L'effort axial minimal et maximal dans le câble ( $N_{min}$  et  $N_{max}$ )

# Exemple (suite)

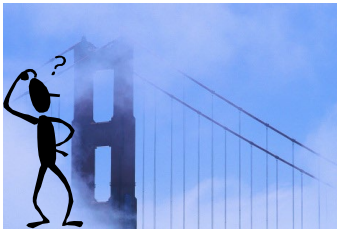


$$y''(x) = \frac{q(x)}{H}$$

# Exemple (suite)



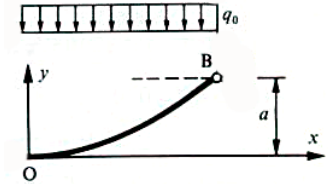
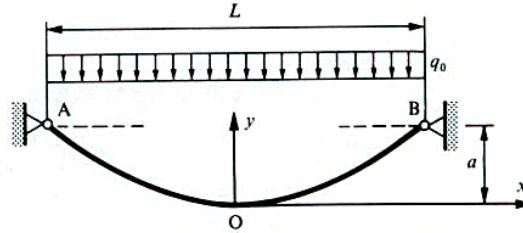
$$y''(x) = \frac{q(x)}{H}$$

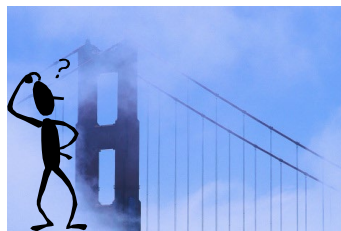


# A votre tour!

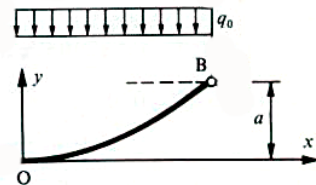
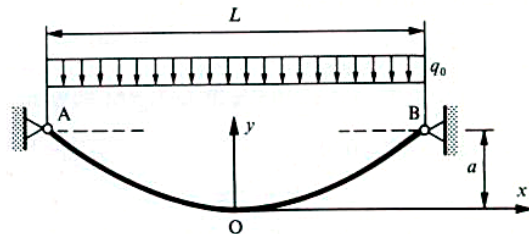
Calculer avec l'équilibre par tronçon

- La composant horizontale  $H$  si la flèche est égale à  $a$
- L'effort axial minimal et maximal dans le câble ( $N_{min}$  et  $N_{max}$ )

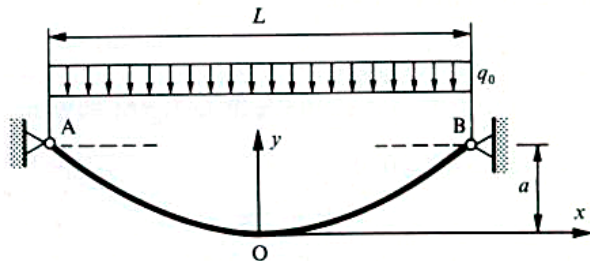




# A votre tour! (suite)



# Résumé : câble sous une charge uniformément répartie sur l'horizontale



$$y''(x) = \frac{q(x)}{H}$$

- 2 supports sur la même hauteur :

$$y = \frac{q_0 x^2}{2H} \quad -\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2}$$

$$a = \frac{q_0 L^2}{8H} \quad H = \frac{q_0 L^2}{8a}$$

$$N = q_0 \sqrt{x^2 + \left(\frac{L^2}{8a}\right)^2} = H \sqrt{1 + k^2}$$

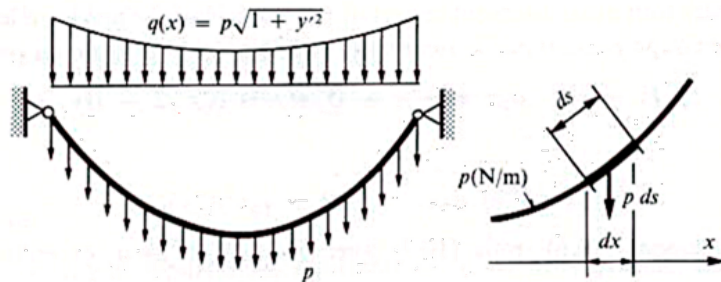
$$s = 2 \int_0^{L/2} ds = \frac{L}{2} \left[ \sqrt{1 + k^2} + \frac{1}{k} \ln \left( k + \sqrt{1 + k^2} \right) \right]$$

- La configuration du câble est une parabole.

- Plus la composante horizontale est grande, plus la flèche du câble est petite
- $k = \frac{4a}{L}$
- Longueur :

# Câble sous une charge uniformément répartie le long de l'axe du câble

La configuration d'un câble sous une charge uniformément répartie le long de l'axe du câble est appelée **chaînette**



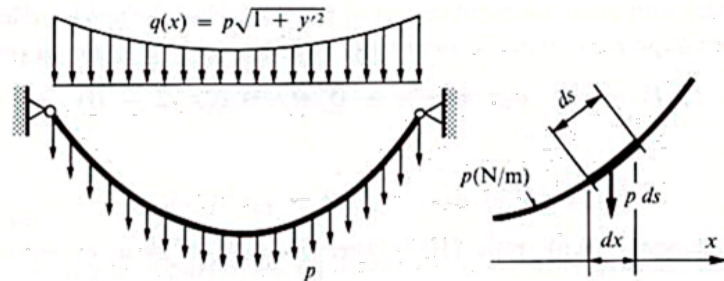
$p$  : poids propre du câble par mètre de longueur du câble

$$q(x)dx = p \cdot ds = p\sqrt{1+y'^2} dx$$

$$y''(x) = \frac{q(x)}{H} = \frac{p}{H}\sqrt{1+y'^2}$$

# Câble sous une charge uniformément répartie le long de l'axe du câble

$$y''(x) = \frac{q(x)}{H} = \frac{p}{H} \sqrt{1 + y'^2}$$



On peut montrer que la solution de cette équation différentielle est la chaînette :

$$y(x) = \frac{H}{p} \cosh\left(\frac{p}{H}x + C_1\right) + C_2$$

Axes passant par le sommet :

$$y(x) = \frac{H}{p} \left( \cosh \frac{p}{H}x - 1 \right)$$

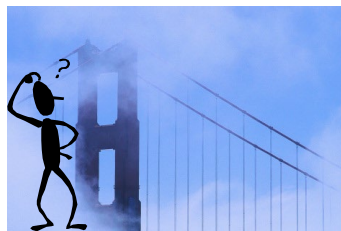
# Câble sous une charge uniformément répartie le long de l'axe du câble

$$y''(x) = \frac{q(x)}{H} = \frac{p}{H} \sqrt{1 + y'^2}$$

$$y(x) = \frac{H}{p} \left( \cosh \frac{p}{H} x - 1 \right)$$

Longueur du câble :

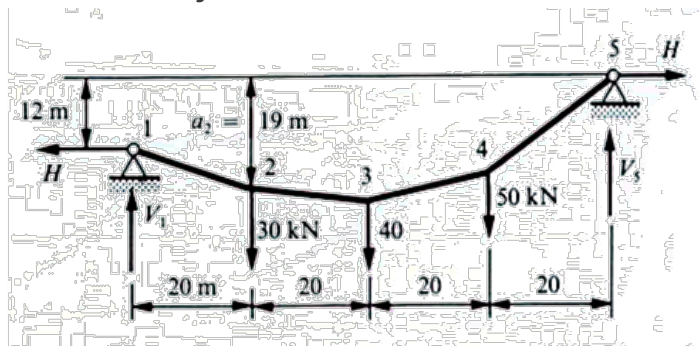
Effort axial du câble :



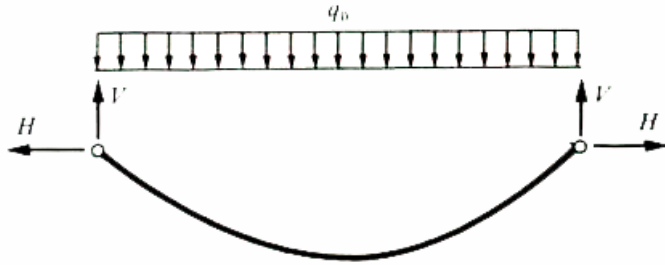
# A votre tour!

Câble sous forces concentrées

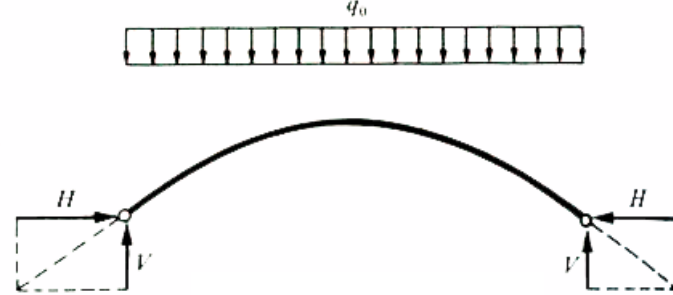
- Configuration du câble: ligne brisée (poids propre négligé)
- Objectif: trouver  $H$



# Comparaison câble-arc

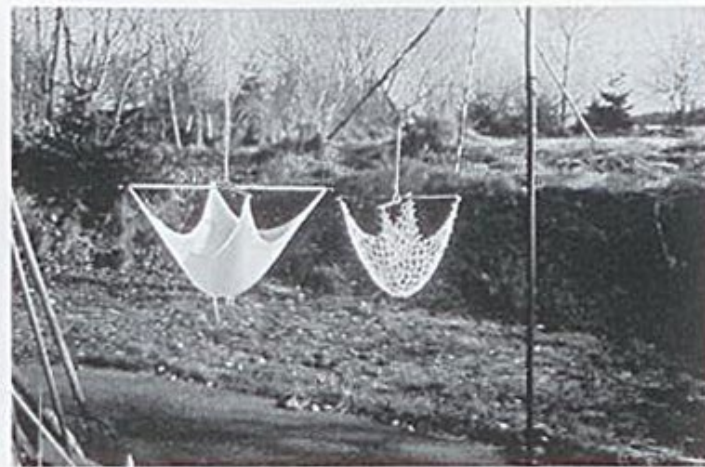
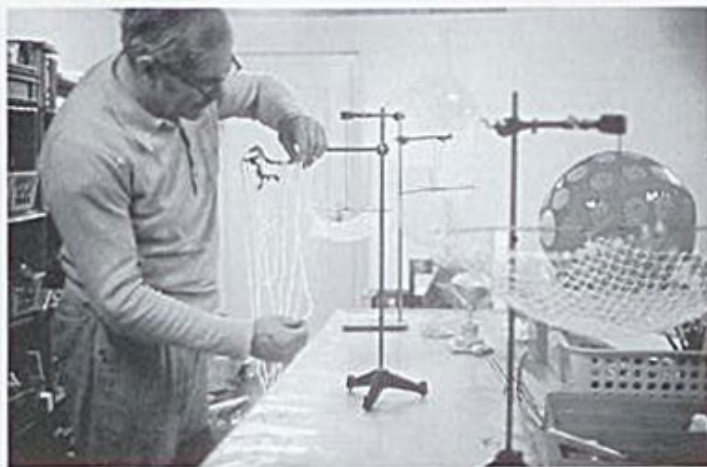


$$H = \frac{ql^2}{8f}; \quad V = \frac{ql}{2}$$



$$H = \frac{ql^2}{8f}; \quad V = \frac{ql}{2}$$

	Câble	Arc
<i>Effort normal</i>	Traction	Compression
<i>Matériaux</i>	Acier Fibre de carbone Fibre naturelle	Béton (avec faible armature) Pierre naturelle Bois



Heinz Isler



# Chapitres à étudier dans le TGC 1

- **Chapitre 10: Câbles (sauf 4.5)**

## Références des illustrations par ordre d'apparition

- [1] [Rainbow Bridge](#) © Ad Meskens, [CC BY-SA 3.0](#)
- [2] [Olympiastadion München](#) © Arad Mojtahedi
- [3] [Allianz Arena](#), Munich © Tobias Alt, [CC BY-SA 4.0](#)
- [4] Icône exercices: [Figure](#) © Dukesy68, [CC BY-SA 4.0](#) ; [Pont du Golden Gate](#), [CC0 1.0](#)
- [5] Photographies des coques de Heinz Isler: © Ramm et Schunck; 2002
- [6] Figures sur les câbles: Frey, François. Statique appliquée (TGC volume 1) – Analyse des structures et milieux continus. EPFL Press, 2005.

- The presentations are published under license CC BY-NC 4.0
- If reusing the entire presentation or parts of it, please cite as «Beyer K, Statique 1, Lecture notes, School of Architecture, Civil and Environmental Engineering, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Switzerland, 2023, with additional material from Denarié E. (2025)»