

■ Autrice des dias (2023)
Prof. Katrin Beyer

■ Earthquake
Engineering and
Structural Dynamics
Laboratory

■ Prof. E. Denarié (2025)

■ Laboratoire de
comportement et
conception des
structures en béton



Poutres : définitions et équations différentielles d'équilibre

Prof. E. Denarié

Objectif du cours

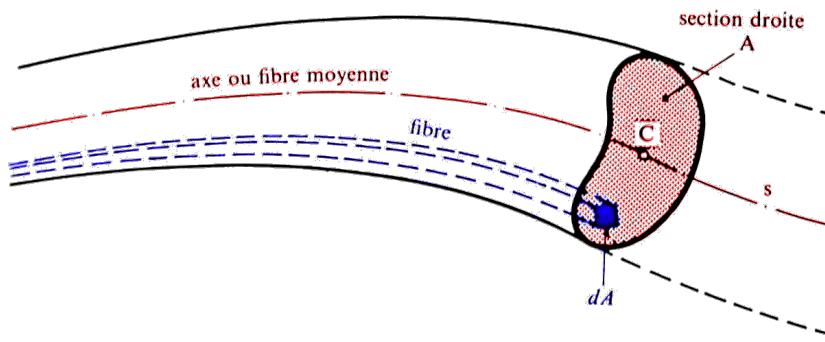
A la fin de ce cours, vous saurez :

- Comment est définie la géométrie d'une poutre
- Comment déterminer l'isostaticité d'une structure composée de poutres
- Quelle est la définition des diagrammes des efforts intérieurs
- Quelles sont les équations différentielles qui relient les efforts intérieurs et les charges réparties
- Comment utiliser les équations différentielles pour calculer les diagrammes des efforts intérieurs

1. Définition de la poutre (géométrie, efforts intérieurs)
 - Poutre dans l'espace
 - Poutre à plan moyen
2. Diagrammes NVM par l'équilibre des fragments
3. Equations différentielles d'équilibre d'une poutre à plan moyen
4. Diagrammes NVM par les équations différentielles

Géométrie d'une poutre

- Un élément structurel allongé (2 dimensions plus petites que la 3^{ième})
- Sa géométrie est définie par
 - son axe ou «fibre moyenne» s (positions des centres C des sections A)
 - sa section droite A (figure plane normal à l'axe de la poutre)
- Note : la section droite A peut varier en grandeur et forme le long de l'axe s (variation lente et progressive)
- **Poutre à section constante** : la section droite A reste invariable.
- **Poutre prismatique** : la section droite A reste invariable et l'axe est droit

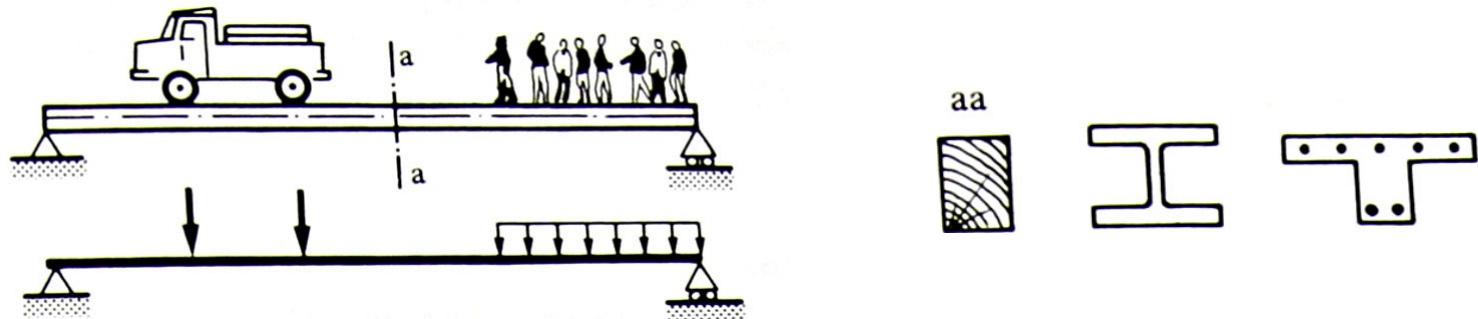


Système statique

Une poutre est complètement définie par

- la géométrie de son axe s
- une fonction qui décrit la section droite A (forme, dimensions, ...) en fonction de s
 - Cette fonction est nécessaire seulement pour calculer les déformations → cours Analyse des Structures

→ Le schéma statique d'une poutre se réduit au dessin de l'axe de la poutre.



Efforts intérieurs d'une poutre

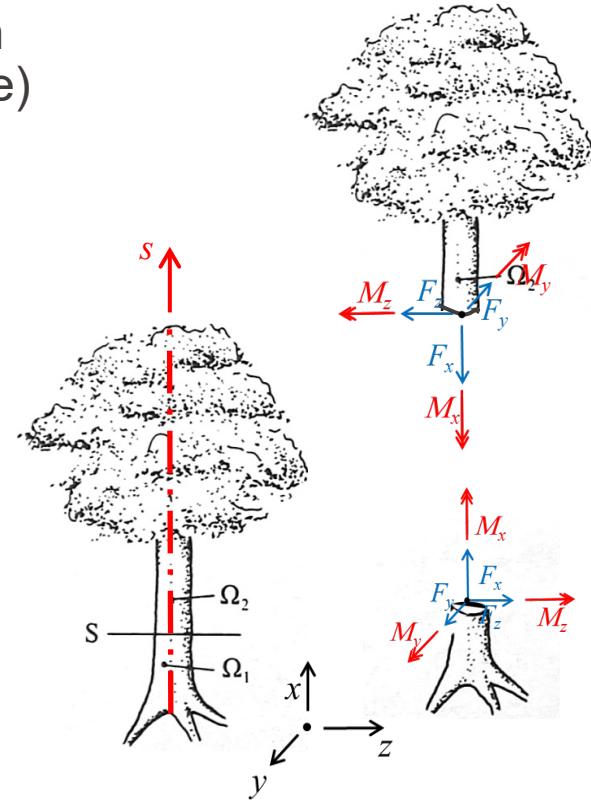
- Une poutre bloque **tous** les déplacements d'un fragment par rapport à l'autre (ex : tronc d'arbre)

- Grandeur cinétiques (dans l'espace):

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \vartheta_x = 0, \quad \vartheta_y = 0, \quad \vartheta_z = 0$$

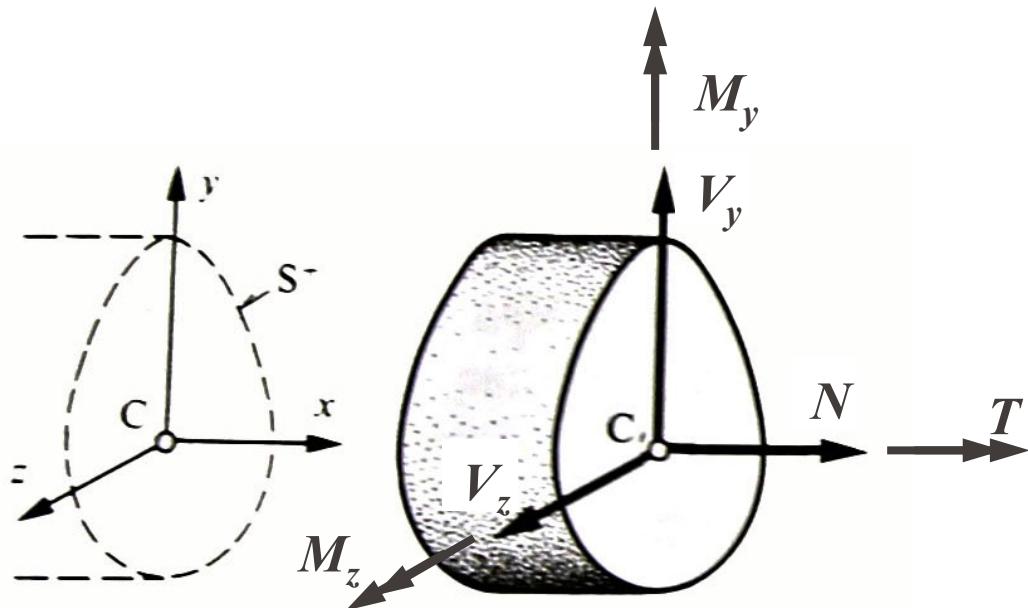
- Grandeur statiques (dans l'espace) :

$$F_x \neq 0, \quad F_y \neq 0, \quad F_z \neq 0, \quad M_x \neq 0, \quad M_y \neq 0, \quad M_z \neq 0$$



Efforts intérieurs d'une poutre dans l'espace

- F_x effort normal ou axial N
- F_y, F_z efforts tranchants V_y et V_z
- M_x moment de torsion T
- M_y, M_z moments de flexion M_y et M_z (moments fléchissants)



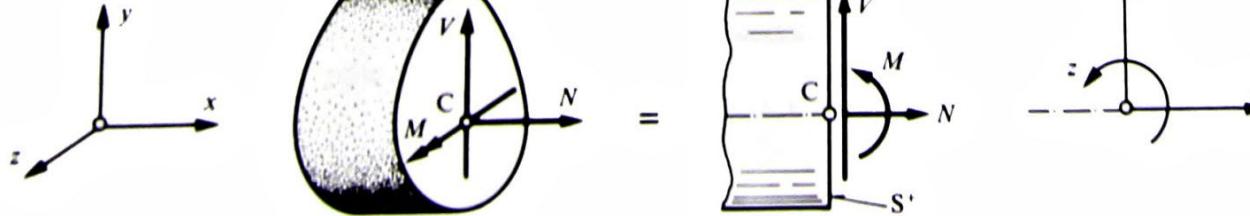
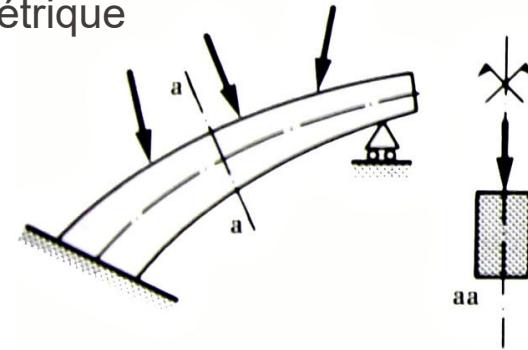
Efforts intérieurs d'une poutre à plan moyen

Une poutre est à plan moyen si :

- L'axe de la poutre est situé dans un plan
- Les forces et couples sont situés dans le même plan
- La forme géométrique de la section droite est symétrique par rapport à ce plan

Les efforts intérieurs d'une poutre à plan moyen :

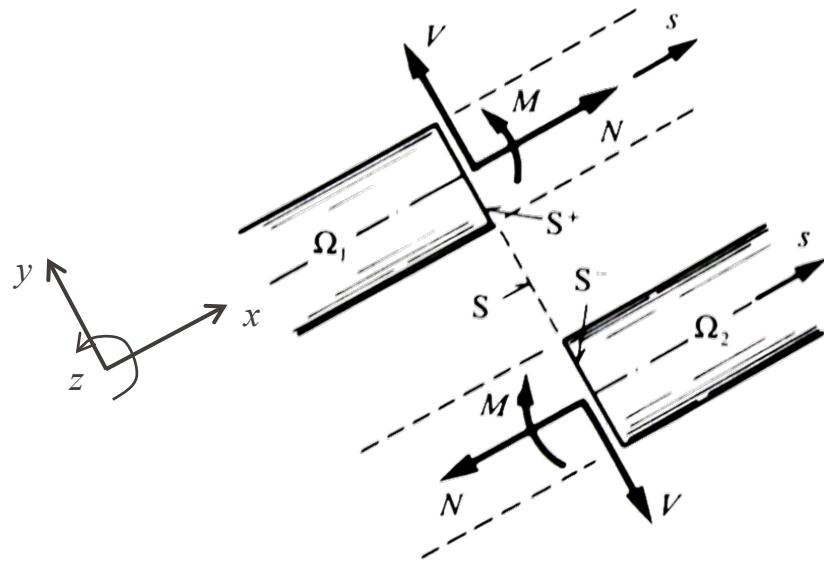
- Effort normal N (selon x)
- Effort tranchant V (selon y)
- Moment de flexion M (autour de z)



Signe des efforts intérieurs

Les efforts intérieurs sont **positifs** s'ils agissent dans le même sens que les axes de coordonnées définis **sur la face positive** d'une section droite.

Une surface est dite positive (S^+) si la normale extérieure à la section droite a le même sens que s

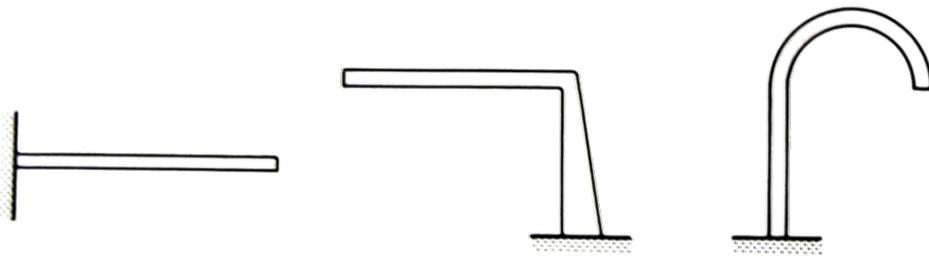


Différents types de poutres isostatiques

1. Poutres simples

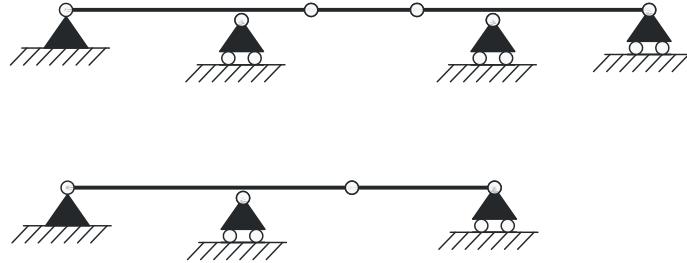


2. Poutres consoles

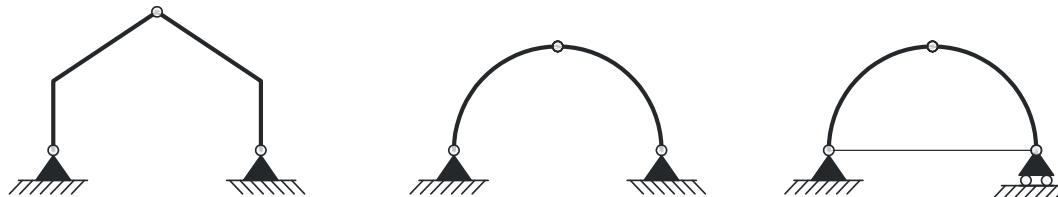


Différents types de poutres isostatiques (suite)

3. Poutres cantilever ou poutres Gerber



4. Portiques à 3 articulations



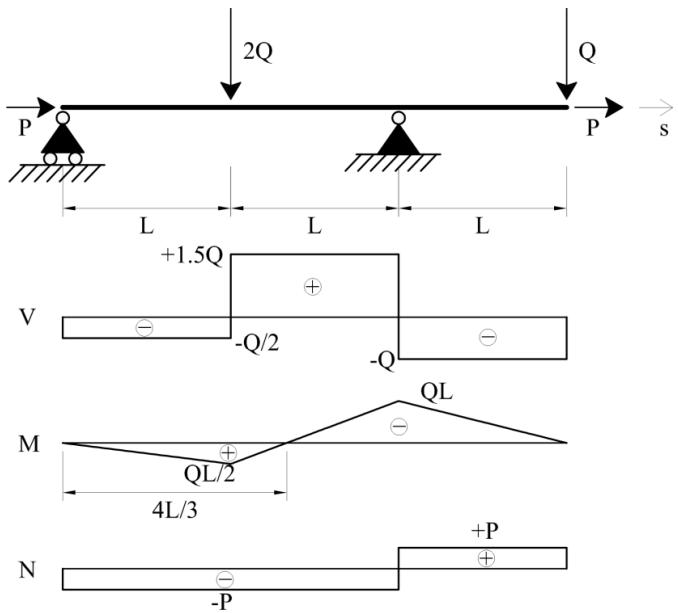
Les efforts intérieurs d'une poutre varient d'une section à d'autre. On appelle «diagrammes des efforts intérieurs» ou «diagrammes NVM» la représentation graphique des efforts intérieurs le long de l'axe de la poutre

Cas plan N, V_y, M_z

Cas 3D N, V_y, V_z, T, M_y, M_z

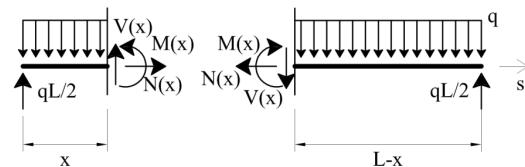
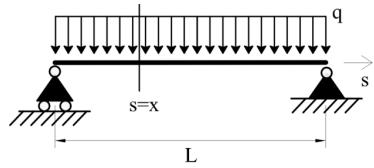
Méthodes de calcul possibles :

- Equilibre des fragments
- Équations différentielles
- Calcul rapide des diagrammes NVM

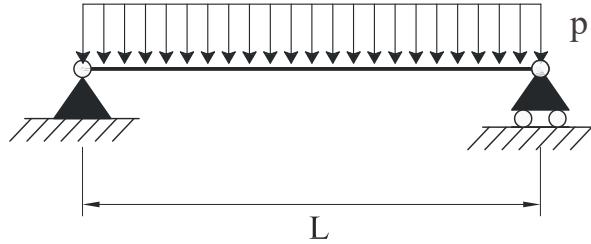


Calcul des diagrammes NVM par l'équilibre des fragments

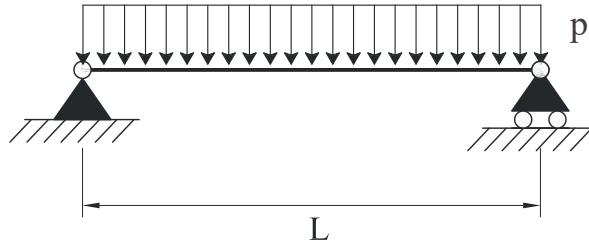
1. Calculer les forces de réaction et les forces de liaison
2. Couper à une position $s = x$
3. Formuler l'équilibre du fragment Ω_1 ou Ω_2
4. Attention aux charges concentrées (appuis ou forces externes) et aux changements des charges distribuées → différents cas



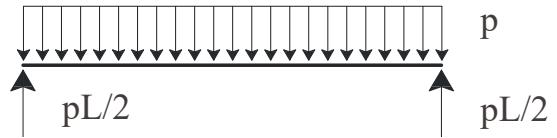
Exemple : calculer les diagrammes NVM d'une poutre simple uniformément chargée par l'équilibre des fragments



Exemple (suite)



Exemple (suite)



M
A horizontal line representing the bending moment diagram for the beam. It is zero at both ends and has a constant negative value along the entire length of the beam.

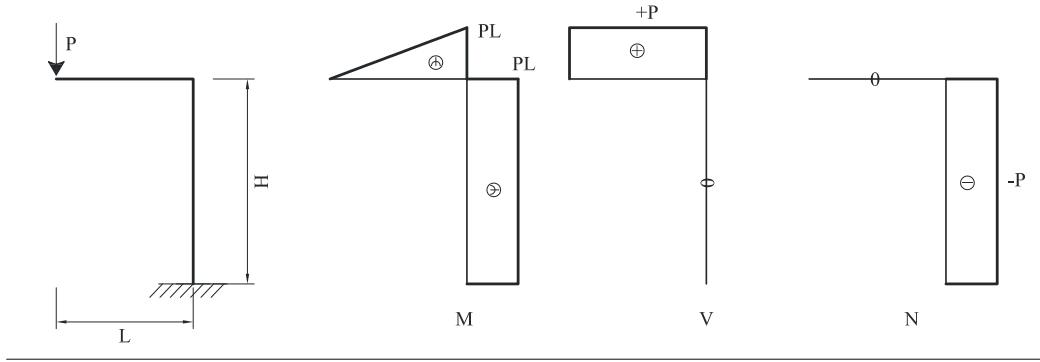
V
A horizontal line representing the shear force diagram for the beam. It is zero at both ends and has a constant negative value along the entire length of the beam.

N
A horizontal line representing the normal force diagram for the beam. It is zero at both ends and has a constant negative value along the entire length of the beam.

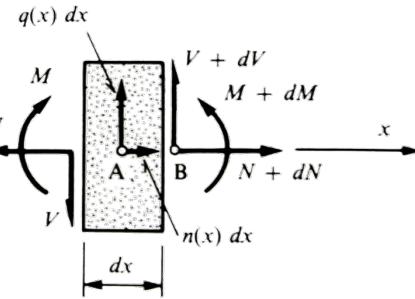
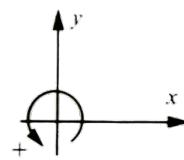
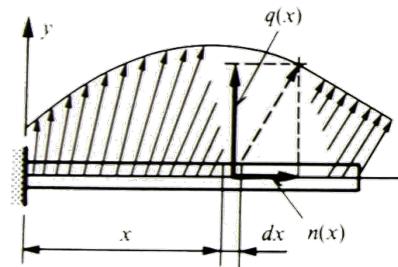
Diagrammes des efforts intérieurs

Les diagrammes de NVM sont dessinés

- par-dessus le schéma statique de la structure
- perpendiculairement à l'axe de chaque poutre
- à une échelle convenable
- avec un signe
- avec une indication des valeurs caractéristiques



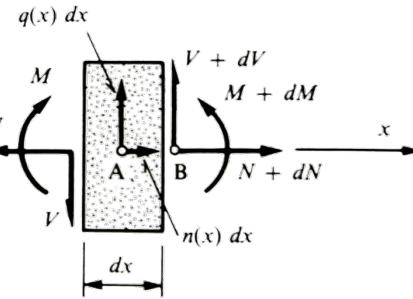
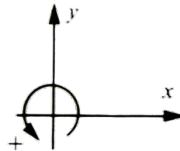
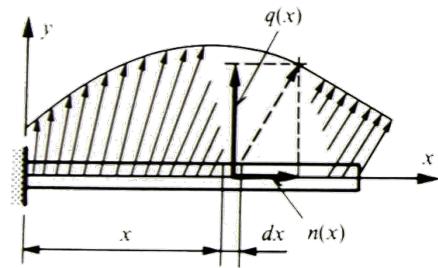
Équations différentielles d'équilibre d'une poutre rectiligne à plan moyen



Equilibre du petit élément avec longueur dx :

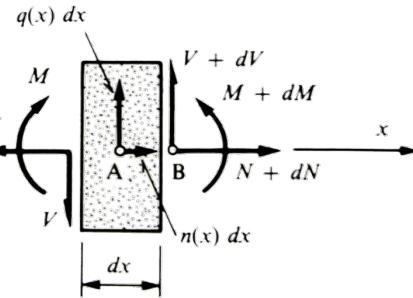
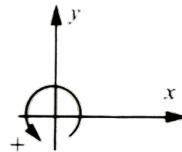
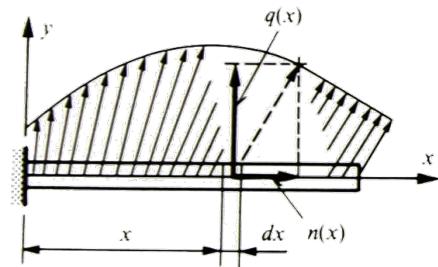
- $\sum F_x = 0$

Équations différentielles d'équilibre d'une poutre rectiligne à plan moyen (suite)



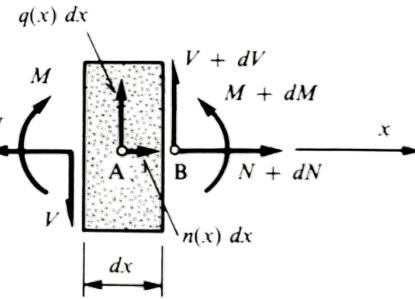
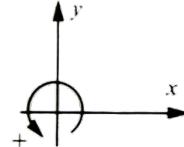
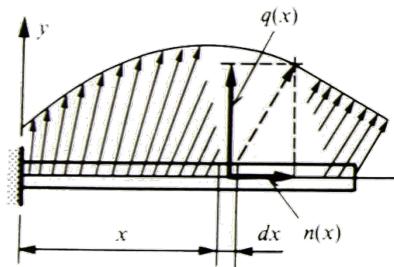
- $\sum F_y = 0$

Équations différentielles d'équilibre d'une poutre rectiligne à plan moyen (suite)



- $\sum M_{A,Z} = 0$

Équations différentielles d'équilibre d'une poutre rectiligne à plan moyen (suite)



$$N'(x) = -n(x)$$

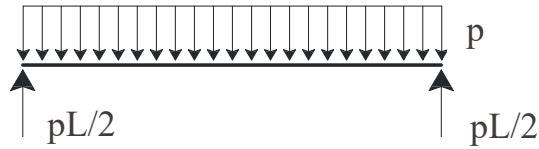
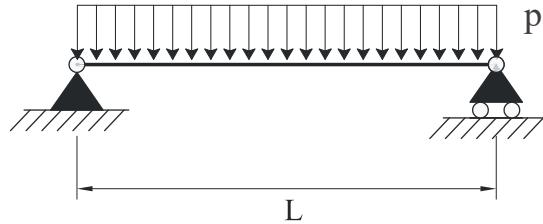
$$V'(x) = -q(x)$$

$$M'(x) = -V(x)$$

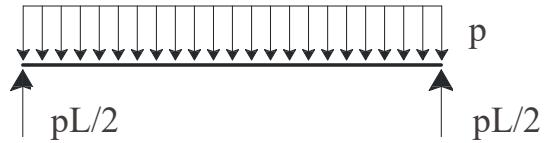
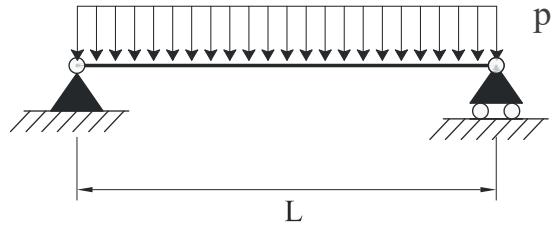
$$\left. \begin{aligned} N'(x) &= -n(x) \\ V'(x) &= -q(x) \\ M'(x) &= -V(x) \end{aligned} \right\} M''(x) = q(x)$$

Exemple 1

Calculer les diagrammes NVM d'une poutre simple uniformément chargée par les équations différentielles d'équilibre

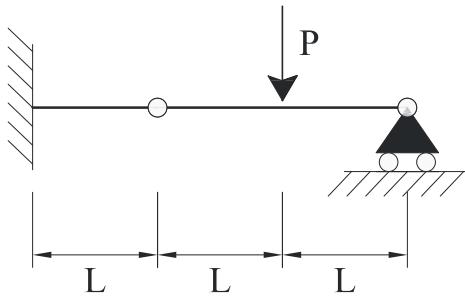


Exemple 1 (suite)

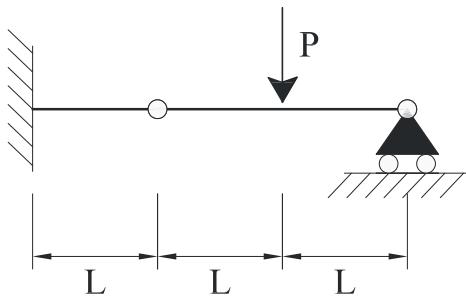


Exemple 2

Calculer les diagrammes NVM d'une poutre Gerber avec une charge concentrée par les équations différentielles d'équilibre



Exemple 2 (suite)



Exemple 2 (suite)



M



V



N



Chapitres à étudier dans le TGC 1

- **Chapitre 8** : Poutres (en entier)
- **Chapitre 9** : Poutres à plan moyen 9.2.1

Références des illustrations par ordre d'apparition

- [1] [Rainbow Bridge](#) © Ad Meskens, [CC BY-SA 3.0](#)
- [2] Icone exercices: [Figure](#) © Dukesy68, [CC BY-SA 4.0](#) ; [Pont du Golden Gate](#), [CC0 1.0](#)
- [3] Exemples de poutres et de sections: Frey, François. Statique appliquée (TGC volume 1) – Analyse des structures et milieux continus. EPFL Press, 2005
- [4] Arbre: Frey, François. Statique appliquée (TGC volume 1) – Analyse des structures et milieux continus. EPFL Press, 2005
- [5] Sections de poutre dans l'espace et dans le plan moyen: Frey, François. Statique appliquée (TGC volume 1) – Analyse des structures et milieux continus. EPFL Press, 2005
- [6] Faces positives et signe: Frey, François. Statique appliquée (TGC volume 1) – Analyse des structures et milieux continus. EPFL Press, 2005
- [7] Exemples de poutres isostatiques: Frey, François. Statique appliquée (TGC volume 1) – Analyse des structures et milieux continus. EPFL Press, 2005

- The presentations are published under license CC BY-NC 4.0

- If reusing the entire presentation or parts of it, please cite as «Beyer K, Statique I, Lecture notes, School of Architecture, Civil and Environmental Engineering, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Switzerland, 2023.»