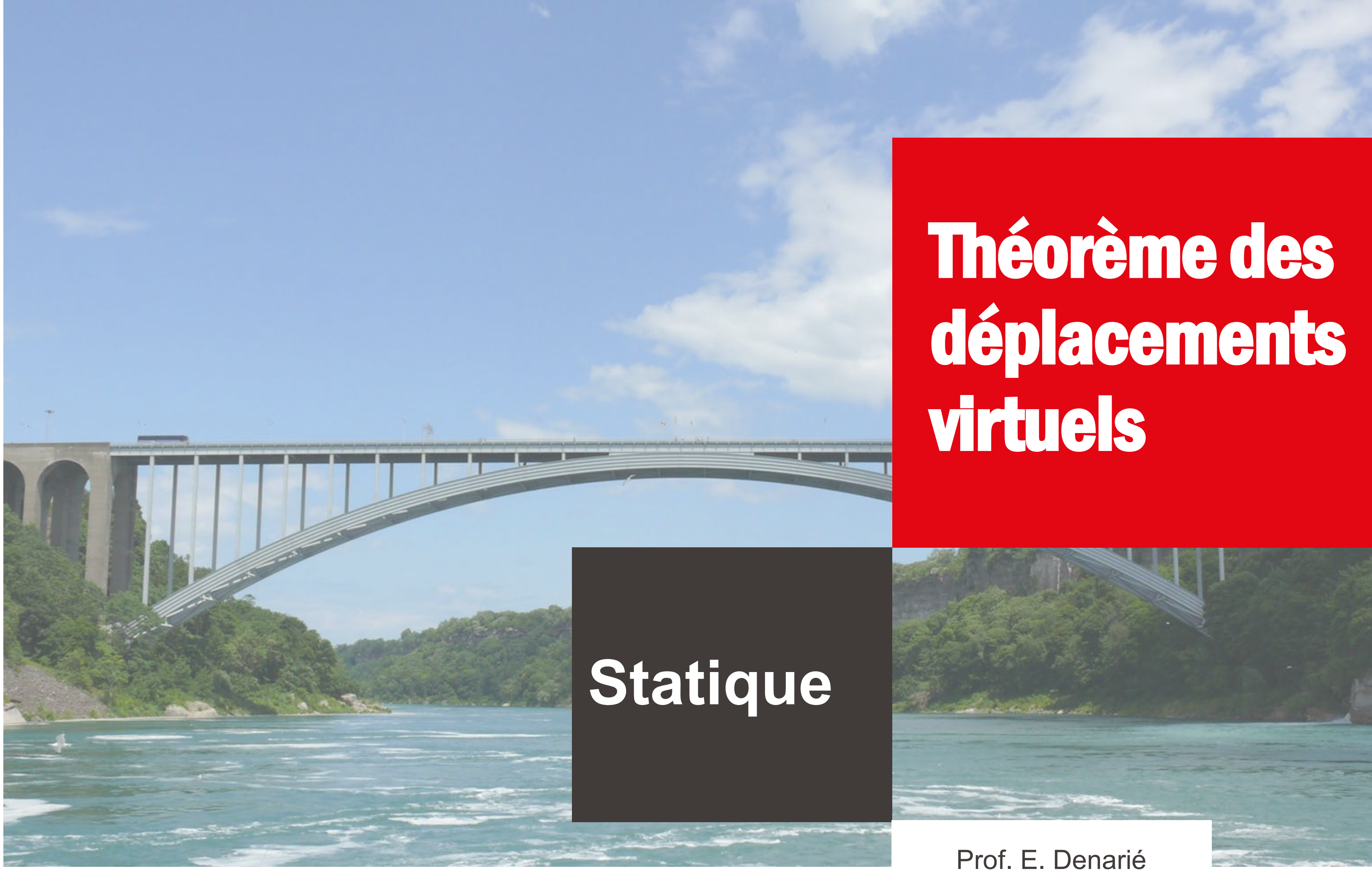
EPFL

- Autrice des dias (2023) Prof. Katrin Beyer
- Earthquake Engineering and Structural Dynamics Laboratory



Théorème des déplacements virtuels

Statique

Prof. E. Denarié

- Prof. E. Denarié (2025)
- Laboratoire de comportement et conception des structures en béton

Objectif du cours

A la fin de ce cours, vous saurez:

- Ce qu’est le travail d’une force ou d’un moment
- Ce qu’est un déplacement virtuel
- Comment effectuer une coupure simple
- Comment utiliser le Théorème des Déplacements Virtuels pour calculer des forces de réaction ou de liaison

Contenu du cours

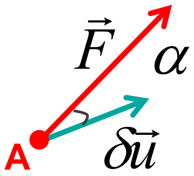
1. Travail d'une force et travail d'un moment
2. Théorème des déplacements virtuels
3. Coupure simple
   - Forces de réaction
   - Forces de liaison

- Motivation pour étudier le théorème des déplacements virtuels
  - Très puissant pour l'analyse des structures composées
  - La base des éléments finis
  - La base des systèmes hyperstatiques

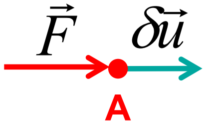
Travail d'une force $\vec{F}$

- Travail δW d'une force $\vec{F}$ dont le point d'application A se déplace de $\delta\vec{u}$

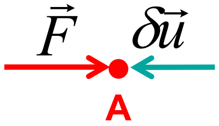
  - $\delta W = \vec{F} \cdot \delta\vec{u}$
  - $\delta W = F \cdot \delta u \cdot \cos(\alpha)$
  - $\delta W = F_x \cdot \delta u_x + F_y \cdot \delta u_y$



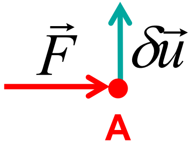
- Cas particuliers :



$\delta W =$



$\delta W =$

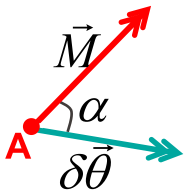


$\delta W =$

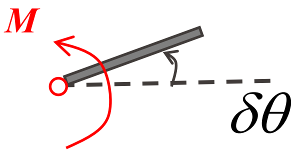
Prof. Katrin Beyer

Travail d'un moment $\vec{M}$

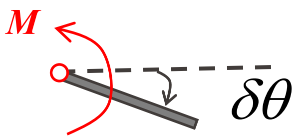
- Travail δW d'une force $\vec{M}$ dont le point d'application A se déplace de $\delta\vec{\theta}$
  - $\delta W = \vec{M} \cdot \delta\vec{\theta}$
  - $\delta W = M \cdot \delta\theta \cdot \cos(\alpha)$



- Cas plan :



$\delta W = \delta\theta \cdot M$

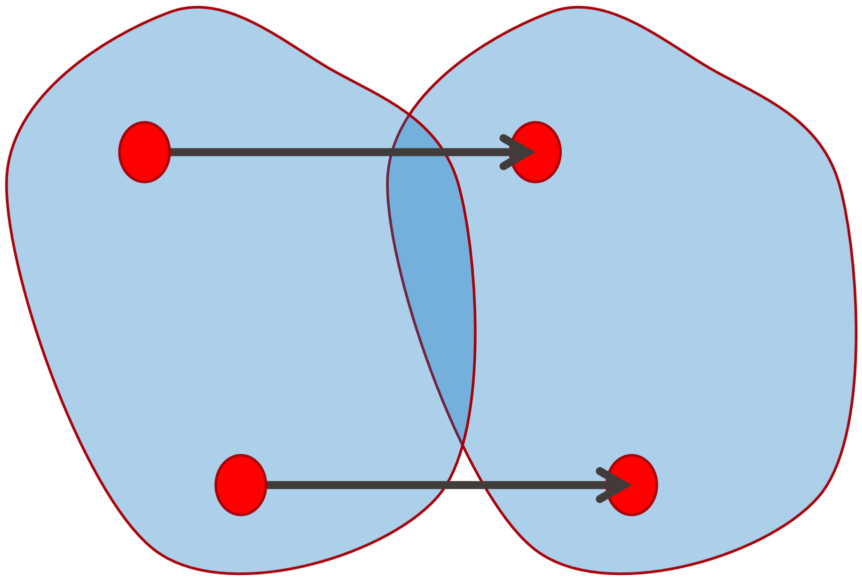


$\delta W = -\delta\theta \cdot M$

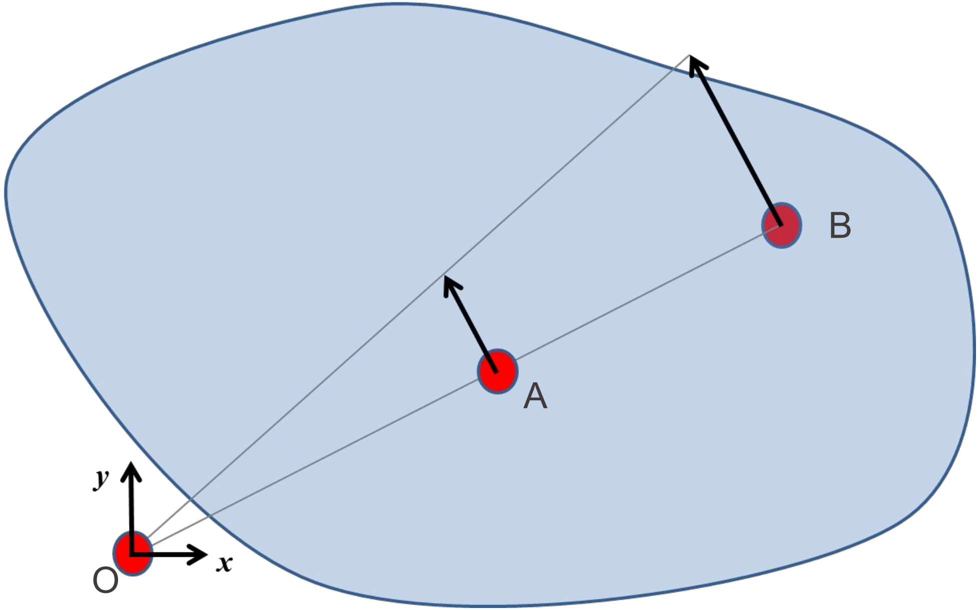
Déplacements virtuels des structures

- Petits déplacements virtuels des corps rigides
- «Virtuels» : déplacements hypothétiques qui respectent les appuis et les organes de liaison
- «Corps rigide» : la distance entre 2 points quelconques du corps reste constante
- «Petits déplacements» : linéarisation géométrique
  - $\cos(\delta\varphi) \sim 1$
  - $\sin(\delta\varphi) \sim \delta\varphi$

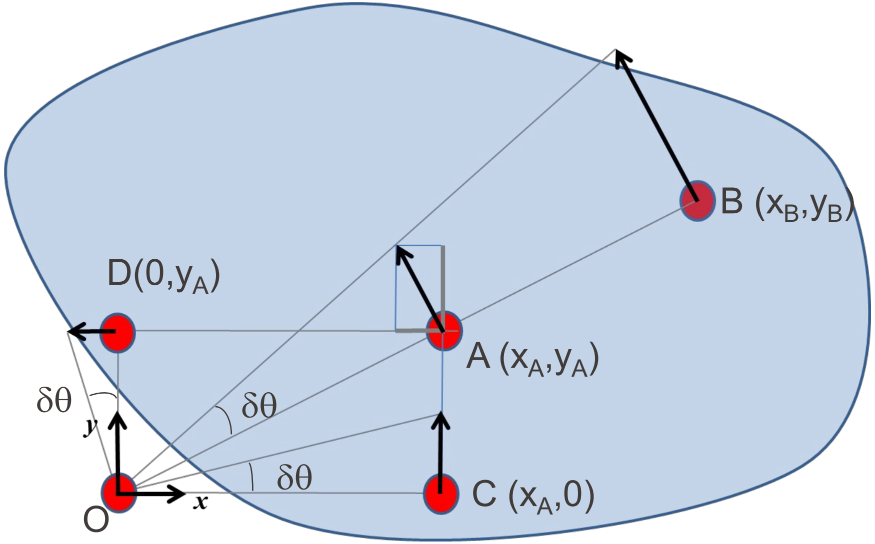
Translation d'un corps rigide



Rotation d’un corps rigide



Rotation d'un corps rigide



- C bouge de $x_A \cdot d\theta$ dans la direction y
- Pour que la distance entre C et A reste constante, A doit aussi faire une translation selon y de $x_A \cdot d\theta$
- Similaire pour la direction x (translation de A selon x: $-y_A \cdot d\theta$)

Théorème des déplacements virtuels

Si un solide est en équilibre, le travail virtuel est nul pour tout déplacement rigide virtuel : $\delta W = 0$

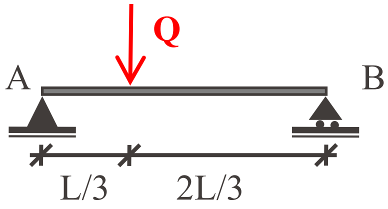
- Travail virtuel : somme des travaux de toutes les forces et moments agissant sur le solide
- Ce théorème n'est qu'une autre manière d'exprimer les 3 (plan) ou 6 (espace) équations d'équilibre

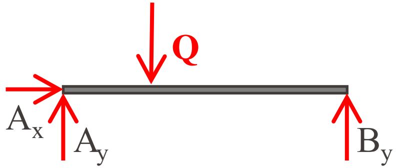
Prof. Katrin Beyer

Exemple: Poutre simple

Calculer les 3 forces de réaction par le théorème des déplacements virtuels

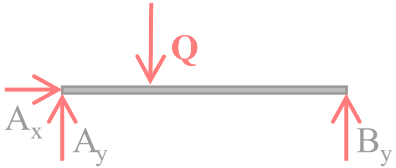
1. Couper toutes les liaisons & extérioriser les forces et moments
2. Introduire des déplacement δu, δv, $\delta\theta$ et formuler l'équilibre



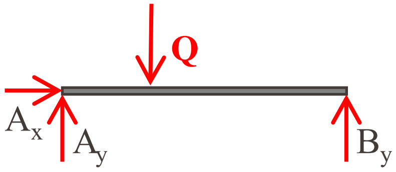


Corps libre avec toutes les forces de réaction extériorisées

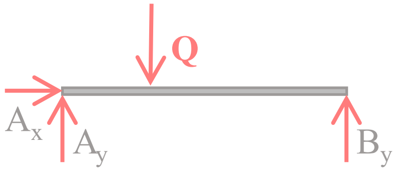
- δu :



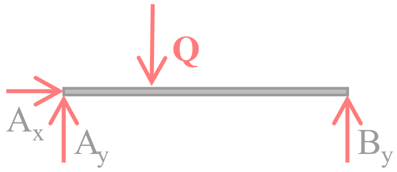
Exemple : Poutre simple (suite)



- δv :



- $\delta \theta$:



Coupure simple

Coupure simple = Suppression d'*une liaison* (un seul degré de liberté—translation ou rotation) qui fait naître un effort

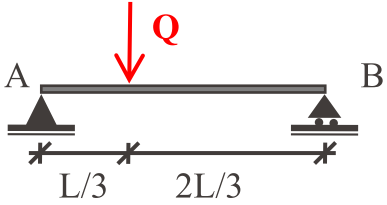
Idée : si on supprime seulement une liaison, il n'y a qu'une seule inconnue

Dans le cas d'une structure isostatique :

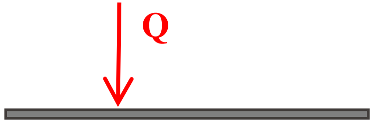
- Introduire la coupure simple qui extériorise la force qu'on veut calculer (force de réaction, force de liaison ou effort intérieur)
  - la structure est maintenant un mécanisme
- Trouver un champs de déplacement qui **respecte toutes les autres liaisons**
- Calculer cette force par le théorème des déplacements virtuels

Exemple: Poutre simple

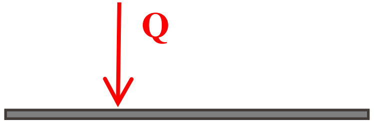
Calculer les 3 forces de réaction par des coupures simples et le théorème des déplacements virtuels



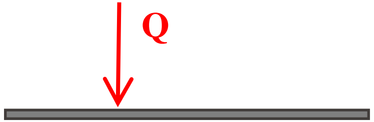
- B_y :



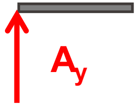
- A_y :

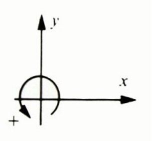
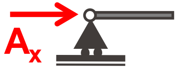
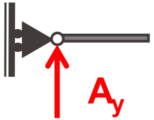


- A_x :



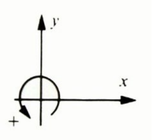
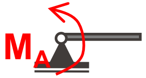
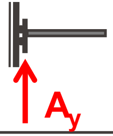
Exemples : coupures simples relatives aux appuis

<table>
<tr><td>Appui à rouleau
</td><td>Coupure simple supprime la liaison en y (trans. vert.)</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Articulation

</td><td>Coupure simple supprime la liaison en x (trans. horiz.)</td><td></td></tr>
<tr><td>Coupure simple supprime la liaison en y (trans. vert.)</td><td></td></tr>
</table>

Exemples : coupures simples relatives aux appuis (suite)

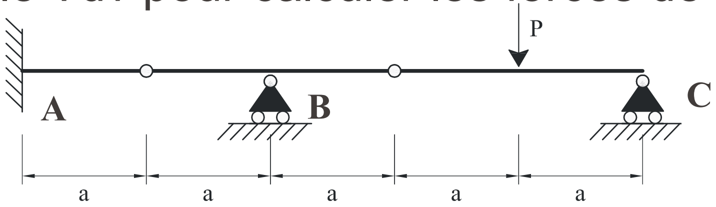
Prof. Katrin Beyer

Encastrement  	Coupure simple supprime la liaison de rotation	
	Coupure simple supprime la liaison en x (transl. horiz.)	
	Coupure simple supprime la liaison en y (trans. vert.)	

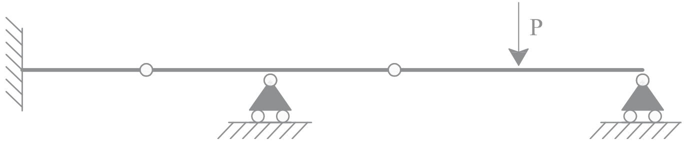
Prof. Katrin Beyer

Exemple : utiliser le Tdv pour calculer les forces de réaction

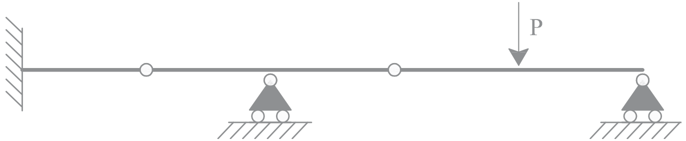
- Utiliser le Tdv pour calculer les forces de réaction C_y, A_y, B_y et M_A.

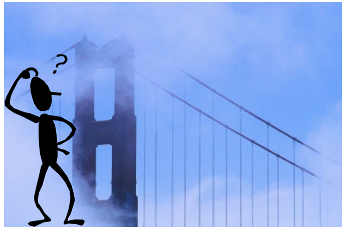


- C_y :



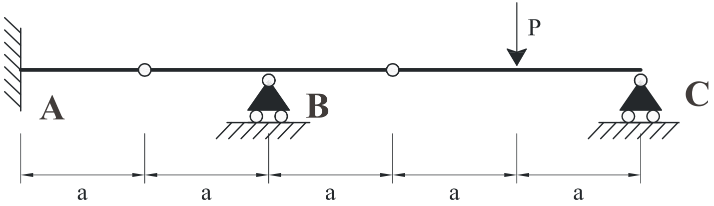
- A_y :



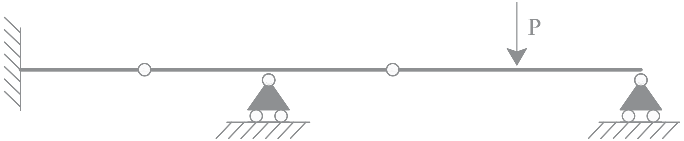


A votre tour!

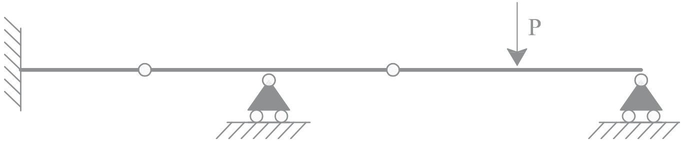
Utiliser le Tdv pour calculer les forces de réaction C_y, A_y, B_y et M_A.



- B_y :

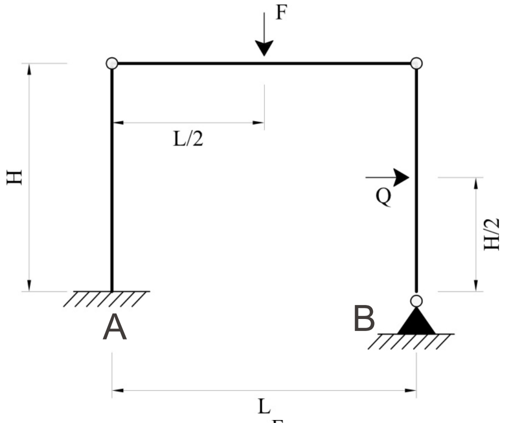


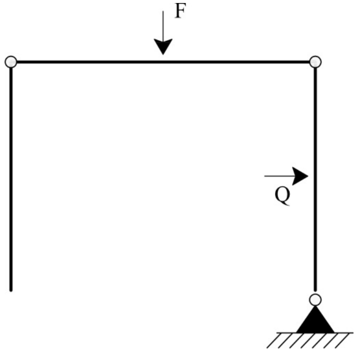
- M_A :



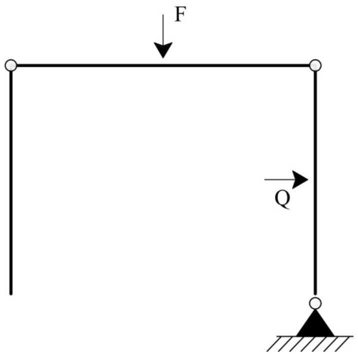
Exemple : portique à 3 articulations

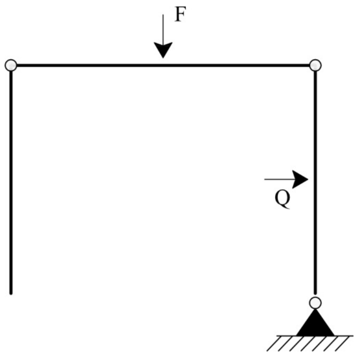
Calculer les réactions d'appuis en A: A_x, A_y, M_A (Ex. 11.9.4)





Exemple : portique à 3 articulations (suite)



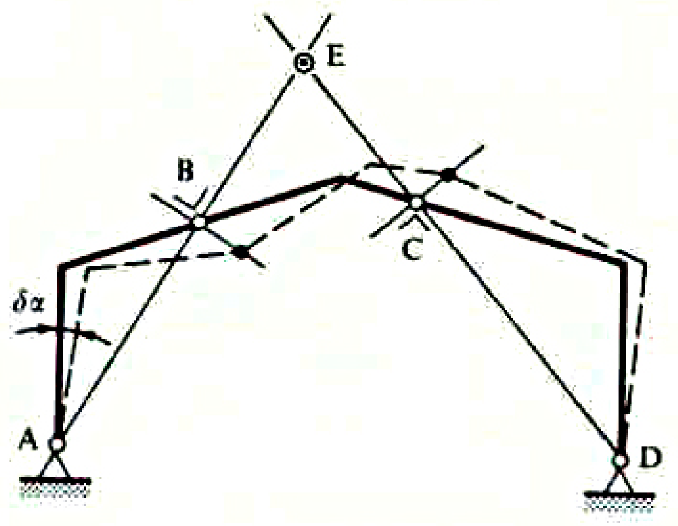


Déplacements virtuels

- Lorsqu’on coupe au moins une liaison à une structure isostatique, celle-ci se transforme en un mécanisme
- Les déplacements associés à ce mécanisme sont appelés **déplacement virtuels**
- Ils sont hypothétiques et très petits (respectent l’hypothèse de linéarisation géométrique)
- Les éléments structuraux ne se déforment pas
    - Le mouvement d’un mécanisme est un mouvement de corps rigides
    - Il n’a aucun rapport avec les déplacements réels de la structure

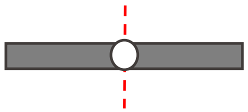
Centre instantané de rotation

Il s’agit du centre de rotation pour de très petits déplacements $d\theta$

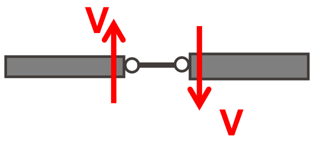


Coupure simple d'une articulation

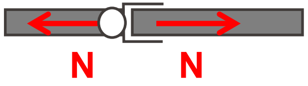
Coupure relative à l'axe suivant



Coupure pour faire apparaitre l'effort tranchant V



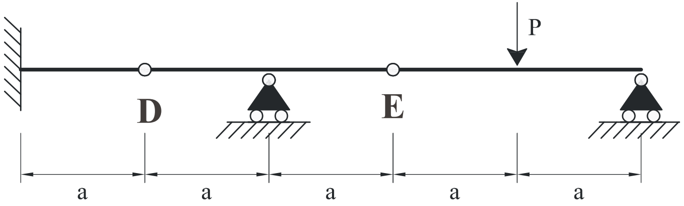
Coupure pour faire apparaitre l'effort normal N



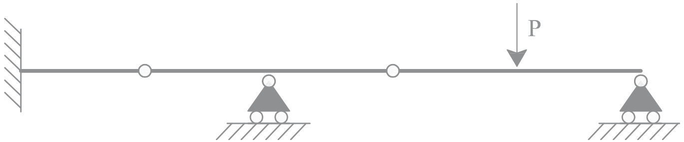
Coupure simple et naissance d'une force de liaison :

1. Introduire un degré de liberté en supprimant la liaison associée à ce degré
2. Extérioriser cet effort intérieur
3. Un effort intérieur apparait sur **chaque face** de la coupure (soit une **paire** d'efforts par coupure)

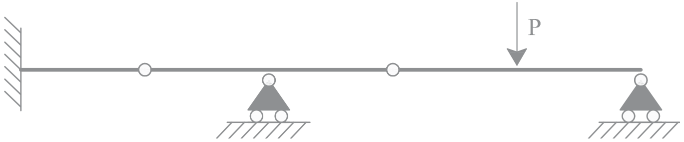
Exemple: Utiliser le TdV pour calculer les forces de liaison D_y et E_y.



- D_y:



- E_y:



Chapitres à étudier dans le TGC 1

- **Chapitre 11 :** Coupure simple, hyperstaticité et théorème des déplacements virtuels (en entier)

Références

Références des illustrations par ordre d'apparition

- [1] Rainbow Bridge © Ad Meskens, CC BY-SA 3.0
- [2] Icone exercices: Figure © Dukesy68, CC BY-SA 4.0 ; Pont du Golden Gate, CC0 1.0
- [3] Centre instanté de rotation: Frey, François. Statique appliquée (TGC volume 1) – Analyse des structures et milieux continus. EPFL Press, 2005.
- [4] Exemples structures hyperstatiques: Frey, François. Statique appliquée (TGC volume 1) – Analyse des structures et milieux continus. EPFL Press, 2005.

License