

- Autrice des dias (2023)  
Prof. Katrin Beyer

- Earthquake  
Engineering and  
Structural Dynamics  
Laboratory

- Dias supplémentaires  
Prof. E. Denarié (2025)

- Laboratoire de  
comportement et  
conception des  
structures en béton



# Appuis et organes de liaison, isostaticité, hyperstaticité

## Statique I

Prof. E. Denarié

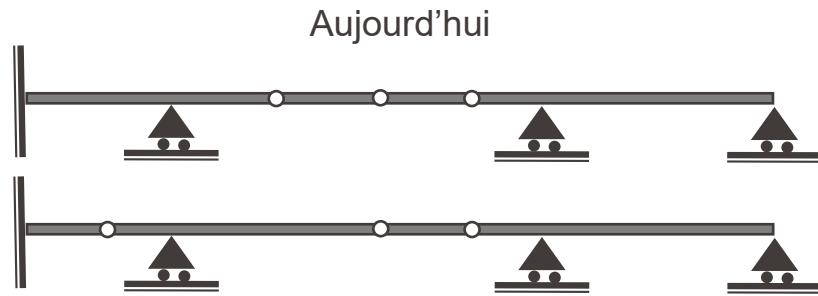
# Objectif du cours

A la fin de ce cours, vous saurez :

- Quels sont les différents types d'appuis et organes de liaison et les composantes qu'ils reprennent
- Calculer les forces de liaison à une articulation
- Distinguer si un système simple ou composé est isostatique, hyperstatique ou un mécanisme
- Différencier l'isostaticité extérieure, intérieure et globale
- Déterminer le degré d'hyperstaticité d'une structure



Semaines 1-3



Aujourd'hui

## 1. Appuis

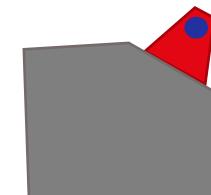
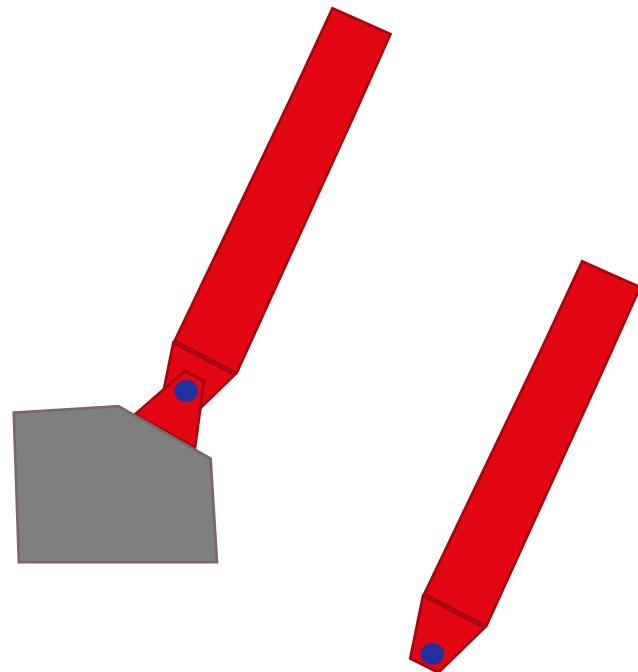
- Définition
- Appuis usuels :
  - Appuis à rouleau
  - Articulation
  - Encastrement
- Résumé des appuis usuels (en plan)

## 2. Conditions d'appui

## 3. Organes de liaison et structures composées

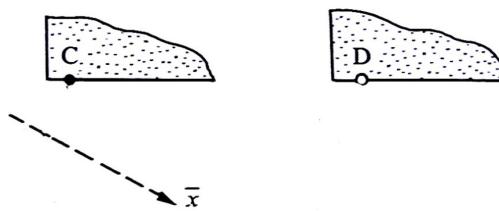
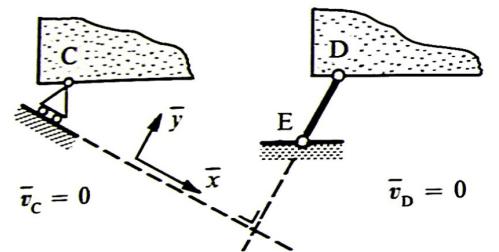
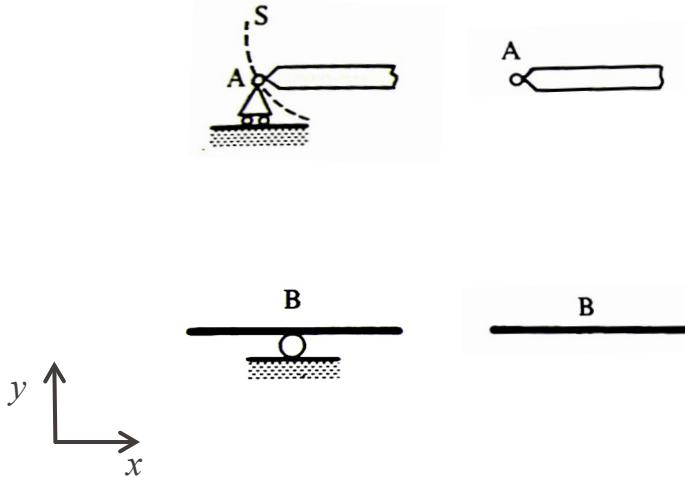
## 4. Degré d'hyperstaticité

- Organes de liaison de la structure avec la fondation
- Au droit d'un appui, certaines composantes du déplacement relatif à la fondation (ou degrés de liberté) sont bloquées
- Les liaisons imposées par les appuis font naître des réactions d'appuis
- Pour les faire apparaître
  - Couper la structure au droit de ses appuis
  - Disloquer les appuis et la structure
  - Les réactions d'appuis apparaissent comme action et réaction

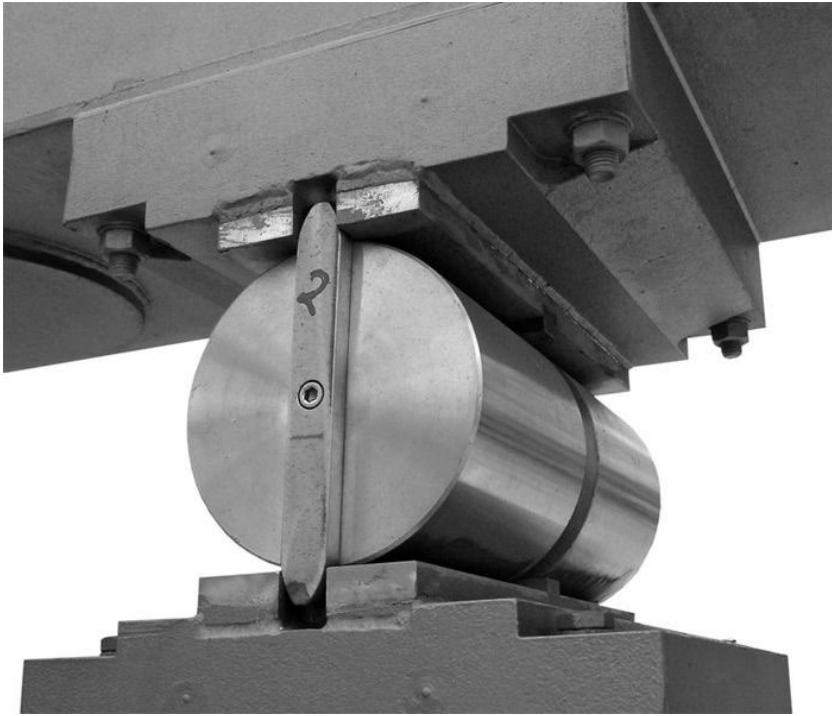


# Appui à rouleau

- Imposse un seul blocage de translation (les autres DDL sont libres)
  - La ligne d'action de la réaction d'appui est définie. Elle est **orthogonale** au plan d'appui
  - Seulement la composante de la réaction d'appui est inconnue
  - 1 inconnue
- Symboles graphiques :

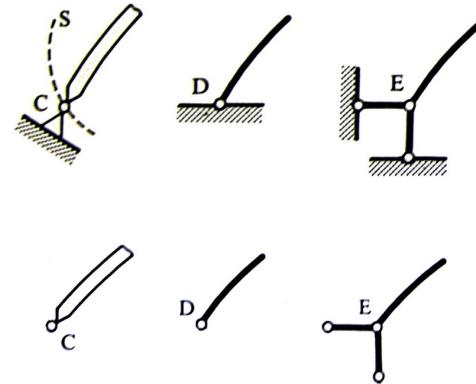
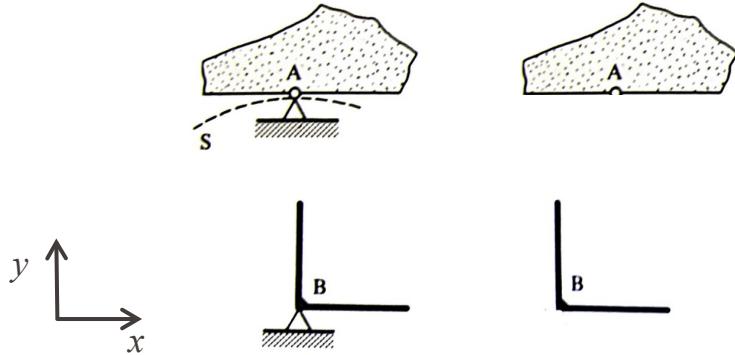


# Appui à rouleau



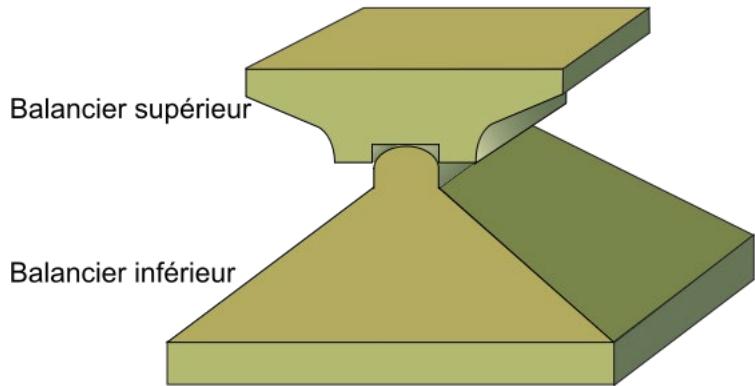
# Articulation

- S'oppose à **toutes translation** du point d'appui mais laisse libre les rotations autour de ce point
  - La ligne d'action de la réaction d'appui n'est pas définie
  - Dans le plan : 2 inconnues
  - Dans l'espace : 3 inconnues
- D'autres termes équivalents : rotule, appui articulé
- Symboles graphiques :



# Articulations

- Appui à balanciers à contact linéaire

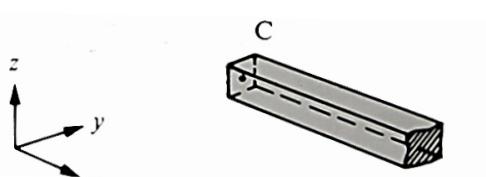
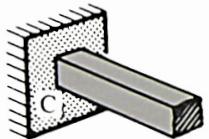
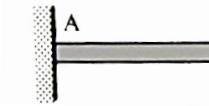


- Articulation



# Encastrement

- S'oppose à **toute translation et toute rotation du point d'appui**
  - Dans le plan : 3 inconnues
  - Dans l'espace : 6 inconnues
- Symboles graphiques :



# Encastrement



Tour TV Stuttgart (D) – F. Leonhardt (1956)

<https://fernsehturm-stuttgart.de/en/fernsehturm/>

# Résumé des appuis usuels (en plan)

	Rouleau			Articulation			Encastrement		
Grandeur cinématique	$u \neq 0$	$v = 0$	$\theta \neq 0$	$u = 0$	$v = 0$	$\theta \neq 0$	$u = 0$	$v = 0$	$\theta = 0$
Grandeur statique	$A_x = 0$	$A_y \neq 0$	$M = 0$	$A_x \neq 0$	$A_y \neq 0$	$M = 0$	$A_x \neq 0$	$A_y \neq 0$	$M \neq 0$

TGC 1

L'appui réel a toujours des imperfections :

- Frottement qui gêne le roulement des rouleaux
- Frottement qui gêne la rotation des articulations
- Du jeu qui empêche de faire un encastrement parfait

→ L'ingénieur doit juger comment on peut modéliser l'appui (c'est-à-dire trouver sa fonction principale)

1. Appuis
2. Conditions d'appui
  - Définition
  - 3 conditions d'appui :
    - Isostaticité des appuis
    - Hyperstaticité des appuis
    - Mécanisme
3. Organes de liaison et structures composées
4. Degré d'hyperstaticité

# Conditions d'appuis

- **L'ensemble des appuis d'une structure (ou conditions d'appui) doit empêcher tout déplacement de corps rigide de cette structure**
- Nombre de degrés de liberté (DDL) d'un solide :
  - Dans le plan : 3 DDL
  - Dans l'espace : 6 DDL
  - Il faut au moins 3 (2D) ou 6 (3D) blocages pour immobiliser le solide complètement
- On distingue 3 familles de conditions d'appui :
  - Isostaticité des appuis
  - Hyperstaticité des appuis
  - Mécanisme

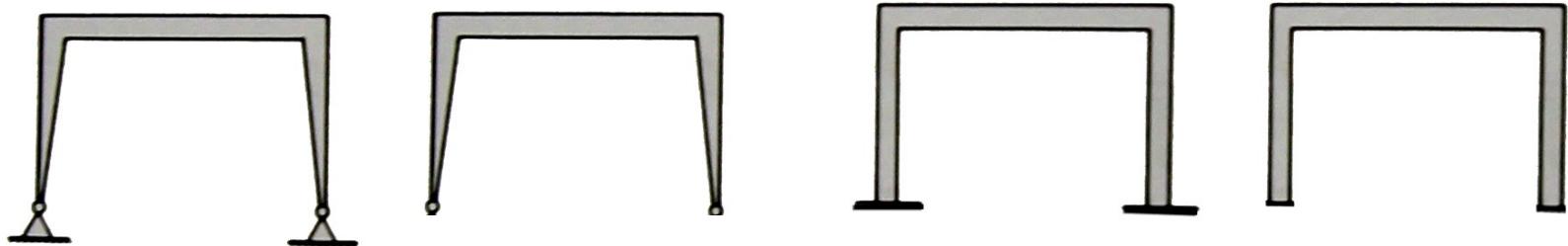
# Isostaticité des appuis

- Les conditions d'appui sont **isostatiques/statiquement déterminées** si la structure n'est pas un mécanisme et si les réactions d'appui d'un solide (soumis à un groupe d'actions quelconques) peuvent être calculées par les seules équations d'équilibre
- Exemple de conditions d'appui isostatiques :

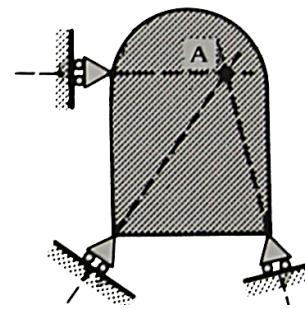
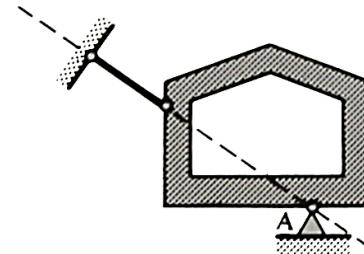
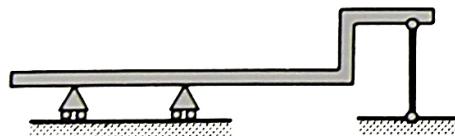


# Hyperstaticité des appuis

- Lorsque, dans une structure qui n'est pas un mécanisme, le nombre des blocages est supérieur au nombre strictement nécessaire, les conditions d'appui sont **hyperstatiques** ou **statiquement indéterminées**
- Exemples de conditions d'appui hyperstatiques :

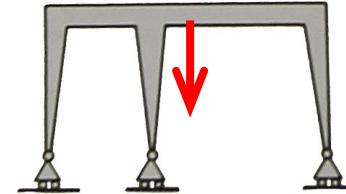
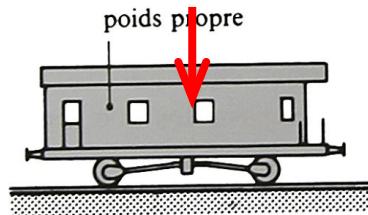


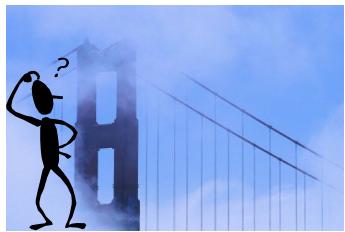
- Une structure qui n'est pas complètement immobilisée par ses appuis est un **mécanisme**
- Exemples de mécanismes :



# Mécanisme, cas particuliers

- Si les charges laissent la structure immobile, on peut calculer les réactions d'appuis pour les degrés de liberté qui sont bloqués
- Pour les degrés de liberté qui ne sont pas bloqués on obtient une équation indéterminée du type  $0 = 0$
- Pour une structure qui n'est pas complètement immobilisée mais qui est immobile sous certaines charges, on distingue entre :
  - Mécanisme plan isostatique
  - Mécanisme plan hyperstatique

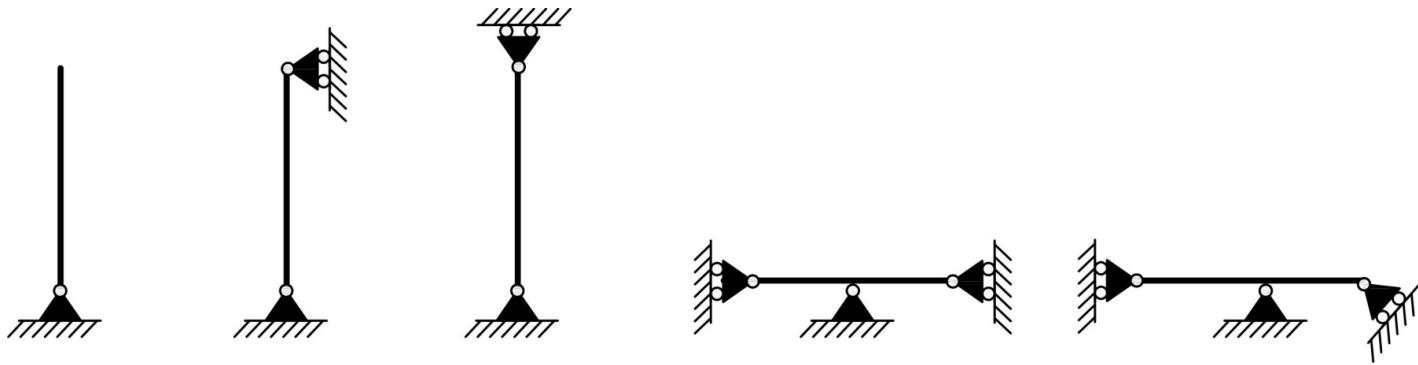




# A votre tour!

Les conditions d'appui des structures sont-elles :

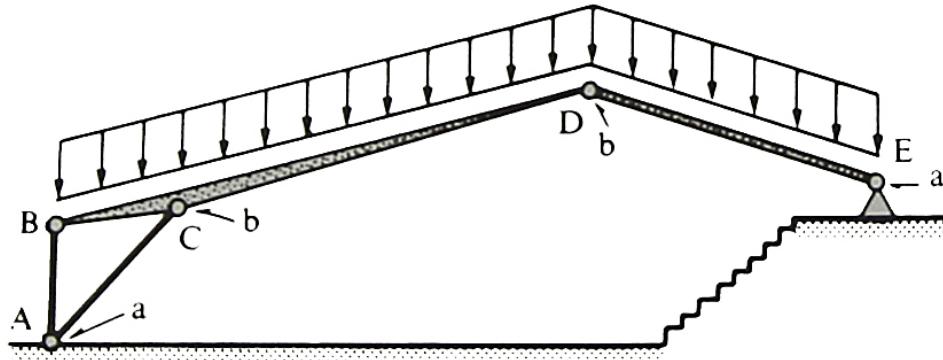
- isostatiques (I)
- hyperstatiques (H)
- forment un mécanisme (M)



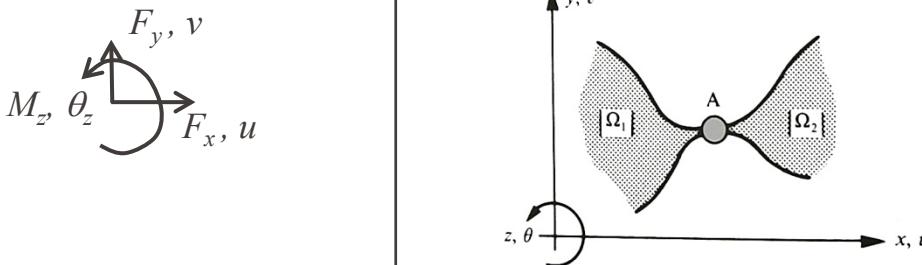
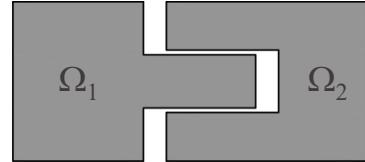
1. Appuis
2. Conditions d'appui
3. **Organes de liaison et structures composées**
  - Organes de liaison :
  - Définitions
  - Types des organes de liaison
  - Calculer les forces de liaison
  - Isostaticité des appuis et liaisons
4. Degré d'hyperstaticité

# Organes de liaison et structures composées

- **Organes de liaison:** Dispositifs semblables aux appuis qui relient deux éléments structuraux (appui: un élément structural avec la fondation)  
Les organes de liaison **bloquent certains degrés de liberté d'un élément par rapport à l'autre**
- **Structures composées:** Un ensemble d'éléments structuraux assemblés par des organes de liaison



a: appui, b: organe de liaison

	Articulation			Articulation axiale		
						
Grandeur cinématique	$u = 0$	$v = 0$	$\theta_z \neq 0$	$u \neq 0$	$v = 0$	$\theta_z \neq 0$
Grandeur statique	$A_x \neq 0$	$A_y \neq 0$	$M_{Az} = 0$	$A_x = 0$	$A_y \neq 0$	$M_{Az} \neq 0$

L'articulation est l'organe de liaison le plus usuel

# Exemples d'articulations

- Articulation



- Joint Gerber (considéré comme une articulation)

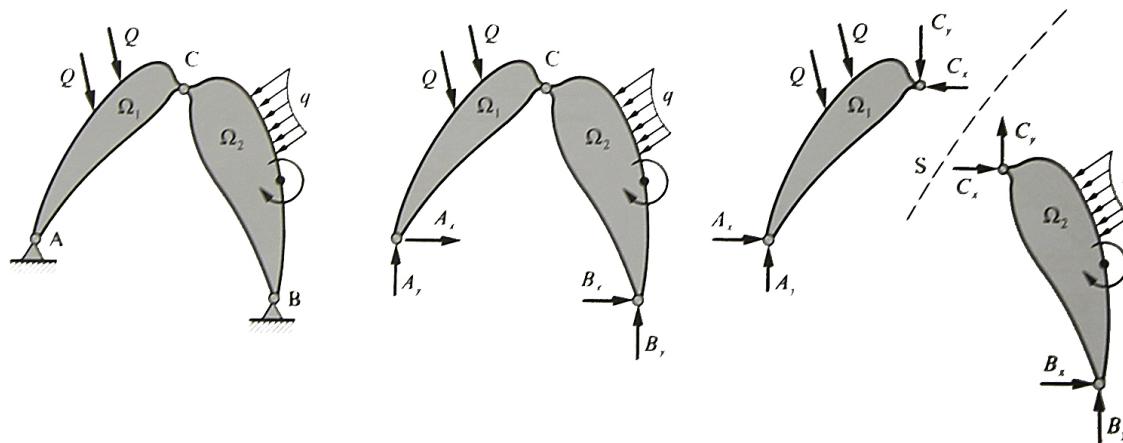


# Calculer les forces de liaison

Méthode de résolution :

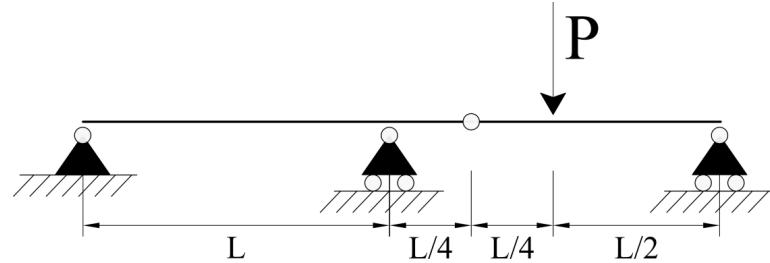
1. Couper et disloquer
2. Aux coupes : pour chaque liaison coupée on doit introduire une force/un moment
3. Pour calculer les forces de liaison, on formule l'équilibre de  $\Omega_1$  ou de  $\Omega_2$

→ Exactement la même procédure que pour les forces internes



# Exemple

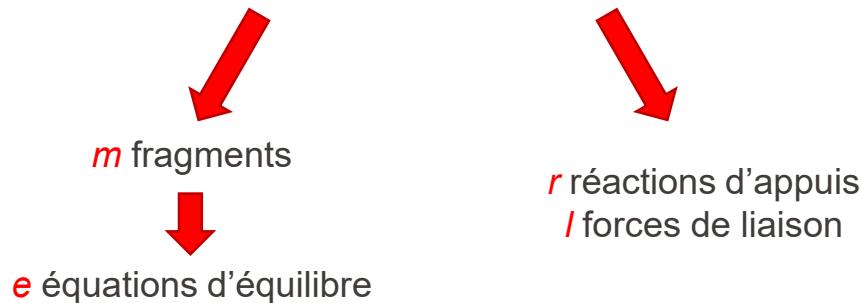
- Montrer que le système est isostatique
- Calculer les forces de réaction et de liaison



# Exemple (suite)

# Isostaticité des appuis et liaisons

Couper - Disloquer



- La structure est isostatique dans ses appuis et liaisons si les réactions d'appui et les forces de liaison peuvent être calculées par les seules équations d'équilibre.
- Critères mathématiques :
  1. La structure est isostatique dans ses appuis et liaisons si  $e = l + r$
  2. La structure est hyperstatique dans ses appuis et liaisons si  $e < l + r$
  3. La structure est un mécanisme si  $e > l + r$
- **Attention : les critères 1 et 2 ne sont pas suffisants. On doit aussi contrôler que la structure ne forme pas un mécanisme.**

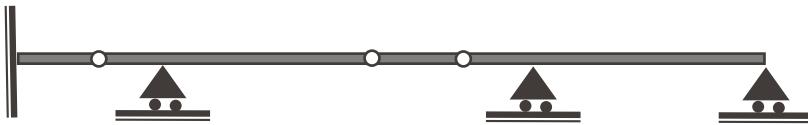
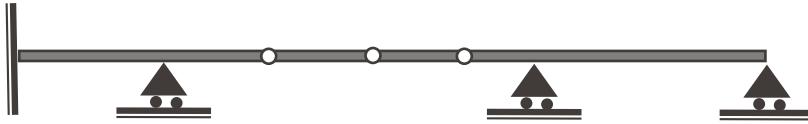
Dans le cours Statique :

- Analyse des structures isostatiques
- Première étape de toutes les analyses : contrôler si les conditions d'appui et liaison sont isostatiques

Deux étapes pour déterminer l'isostaticité

- Vérifier et constater que la structure ne forme pas un mécanisme
- Compter le nombre des réactions d'appui et forces de liaison inconnues et le comparer au nombre d'équations linéairement indépendantes (pas un critère suffisant)

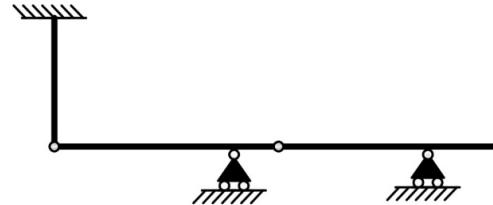
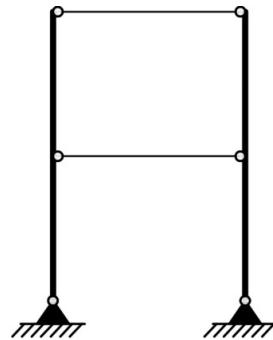
# Exemples





# A votre tour!

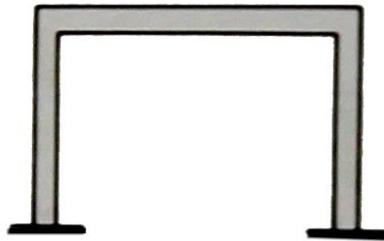
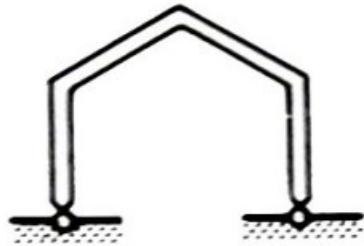
Déterminer si les structures planes suivantes sont des mécanismes (M), isostatiques (I) ou hyper-statiques (H) quant à leurs appuis et à leurs liaisons



1. Appuis
2. Conditions d'appui
3. Organes de liaison et structures composées
4. Degré d'hyperstaticité

- Une structure immobile est hyperstatique, si on ne peut pas l'analyser complètement par les seules équations d'équilibre. Le nombre d'inconnues surabondantes est appelé *le degré d'hyperstaticité*.
- Pour déterminer le **degré d'hyperstaticité** d'une structure, on introduit les coupures simples nécessaires pour la transformer en une structure isostatique. Le nombre de coupures simples nécessaires est le degré d'hyperstaticité.
- Note : Il existe une infinité de manières de rendre isostatique une structure par l'introduction de coupures simples. On doit seulement faire attention à ne pas aboutir à un mécanisme.

# Exemples



Isostaticité : on arrive à calculer les grandeurs statiques recherchées seulement avec les équations d'équilibre.

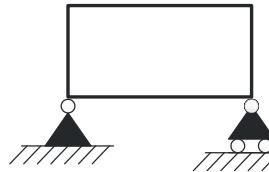
On distingue 3 types d'isostaticité :

- Isostaticité **extérieure** : isostaticité des réactions d'appui et forces de liaison
- Isostaticité **intérieure** : isostaticité des efforts intérieurs dans tous les éléments et en toute section
- Isostaticité **globale** : isostaticité extérieure et intérieure (la structure est isostatique globalement si elle est isostatique extérieurement et intérieurement)

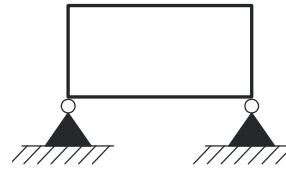
# Tester l'isostaticité extérieure et intérieure

## 1. Isostaticité extérieure : tester les appuis et liaisons

- Détacher des appuis, couper aux organes de liaison
- Isoler les fragments. Pour chaque liaison coupée, introduire une force ou un moment sur les deux faces de coupe (principe action – réaction)



*Isostatique*



*Hyperstatique*

## 2. Isostaticité intérieure

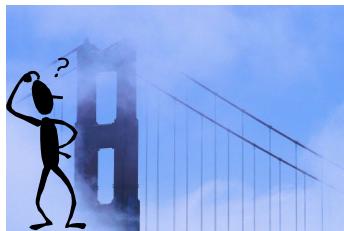
Après avoir coupé et disloqué la structure à tous les appuis et organes de liaison, une structure est isostatique intérieurement, si une coupe produit toujours deux fragments séparés (3 inconnus dans le plan, 6 dans l'espace).



*Isostatique*

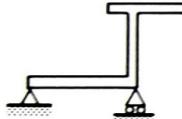
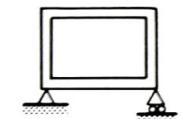
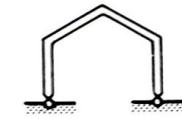
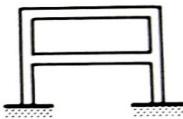


*Hyperstatique*



# A votre tour!

Est-ce que les structures planes en poutres suivantes sont isostatiques ou hyperstatiques intérieurement et extérieurement? Si la structure est hyperstatique, déterminer aussi le degré d'hyperstaticité.

				
<i>Extérieurement (appuis)</i>				
<i>Intérieurement (poutre)</i>				
<i>Globalement</i>				
<i>Degré d'hyperstaticité (globalement)</i>				

# Chapitres à étudier dans le TGC 1

- **Chapitre 5:** Appuis et modélisation 5.1 à 5.5
- **Chapitre 6:** Organes de liaison et structures composées (en entier)

## Références des illustrations par ordre d'apparition

- [1] [Rainbow Bridge](#) © Ad Meskens, [CC BY-SA 3.0](#)
- [2] Symboles des appuis à rouleau: Frey, François. Statique appliquée (TGC volume 1) – Analyse des structures et milieux continus. EPFL Press, 2005
- [3] [Appui à rouleau](#) © KMJ, [CC BY-SA 3.0](#)
- [4] Symboles des articulations: Frey, François. Statique appliquée (TGC volume 1) – Analyse des structures et milieux continus. EPFL Press, 2005
- [5] [Appuis à balanciers](#) © Roulex\_45, [CC BY-SA 3.0](#)
- [6] [Articulation du pont d'Henriou](#) © Sébastien Thébault, [CC BY-SA 3.0](#)
- [7] Symboles des encastrements: Frey, François. Statique appliquée (TGC volume 1) – Analyse des structures et milieux continus. EPFL Press, 2005
- [8] [Stuttgarter Fernsehturm](#) © Taxiarchos228, [FAL](#)
- [9] Avec l'autorisation of Jacques Rudaz © Etat du Valais, DMTE-INFRA cellule ouvrage d'art.
- [10] Exemples de conditions d'appui isostatique : Frey, François. Statique appliquée (TGC volume 1) – Analyse des structures et milieux continus. EPFL Press, 2005
- [11] Exemples de conditions d'appuis hyperstatiques : Frey, François. Statique appliquée (TGC volume 1) – Analyse des structures et milieux continus. EPFL Press, 2005

# Références (suite)

- [12] Exemples de mécanismes: Frey, François. Statique appliquée (TGC volume 1) – Analyse des structures et milieux continus. EPFL Press, 2005
- [13] Exemples de cas particuliers de mécanismes: Frey, François. Statique appliquée (TGC volume 1) – Analyse des structures et milieux continus. EPFL Press, 2005
- [14] Exemple de structure composée: Frey, François. Statique appliquée (TGC volume 1) – Analyse des structures et milieux continus. EPFL Press, 2005
- [15] [Viaduc du Viaur](#) © Хрюша, [CC BY 3.0](#)
- [16] [Gerber beam Bridge](#) © Katorisi, [CC BY-SA 3.0](#)
- [17] Calcul des forces du liaison: Frey, François. Statique appliquée (TGC volume 1) – Analyse des structures et milieux continus. EPFL Press, 2005
- [18] Structures exercies “A votre tour”: Frey, François. Statique appliquée (TGC volume 1) – Analyse des structures et milieux continus. EPFL Press, 2005
- [19] Icône exercices: [Figure](#) © Dukesy68, [CC BY-SA 4.0](#) ; [Pont du Golden Gate](#), [CC0 1.0](#)

- The presentations are published under license CC BY-NC 4.0
- If reusing the entire presentation or parts of it, please cite as «Beyer K, Statique 1, Lecture notes, School of Architecture, Civil and Environmental Engineering, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Switzerland, 2023, with additional material from Denarié E. (2025)»