

■ Autrice des dias (2023)  
Prof. Katrin Beyer

■ Earthquake  
Engineering and  
Structural Dynamics  
Laboratory

■ Dias supplémentaires  
Prof. E. Denarié (2025)

■ Laboratoire de  
comportement et  
conception des  
structures en béton



# Introduction

Prof. E. Denarié

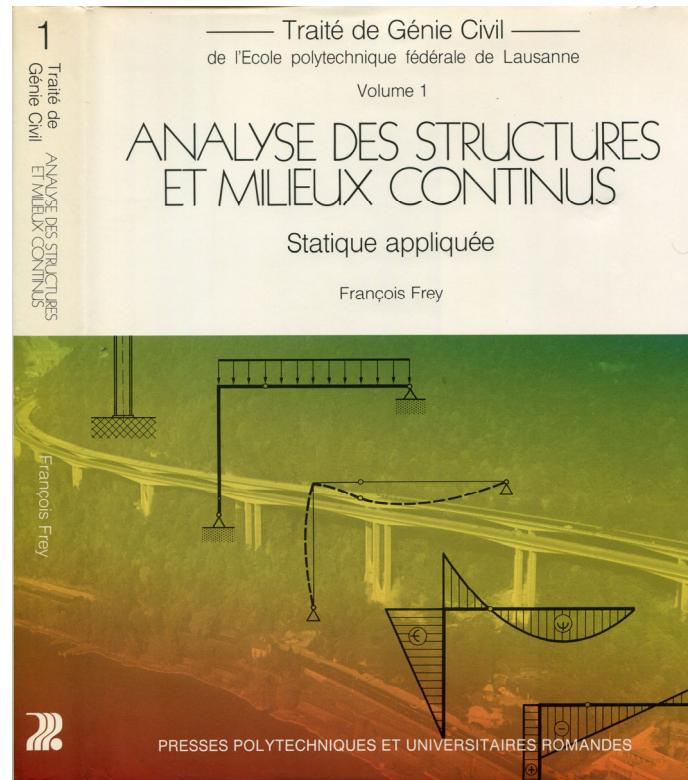
# Qu'est ce que la Statique ?

[2]

- Lois fondamentales de Newton

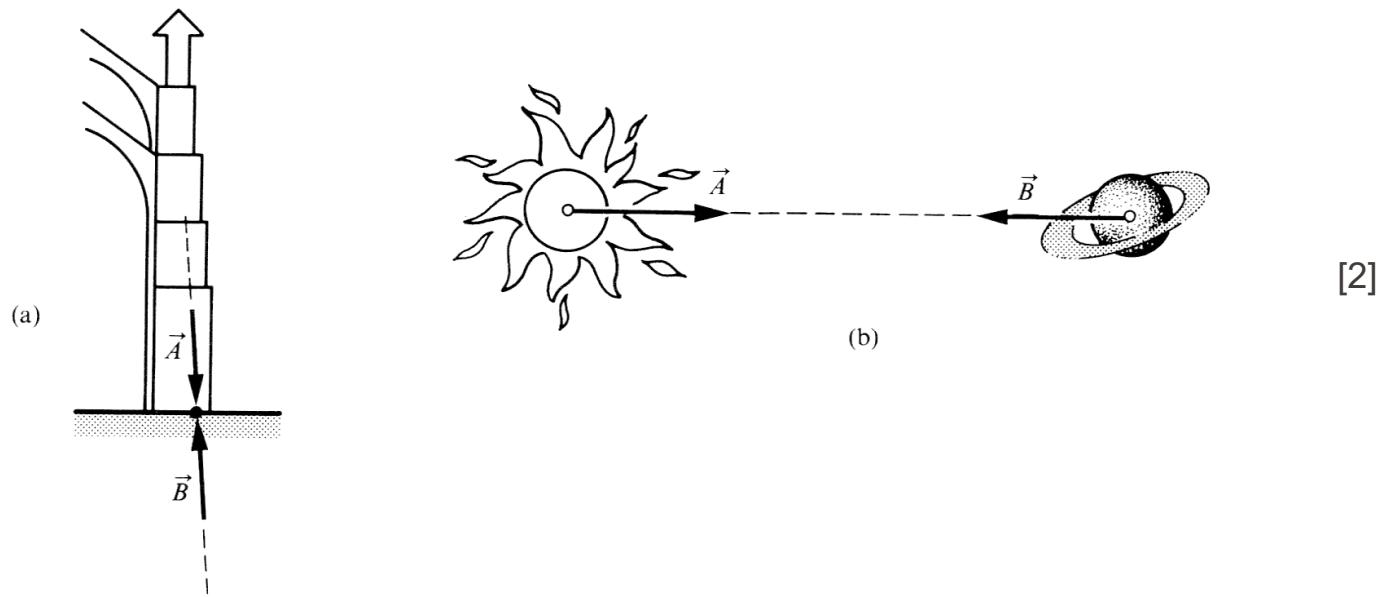
$$\sum F = ma$$

- Etude des forces et déformations dans les structures non accélérées :  $a = 0$
- Hypothèse de petites déformations
- Etude des systèmes mécaniques en équilibre



TGC1 – ancienne édition

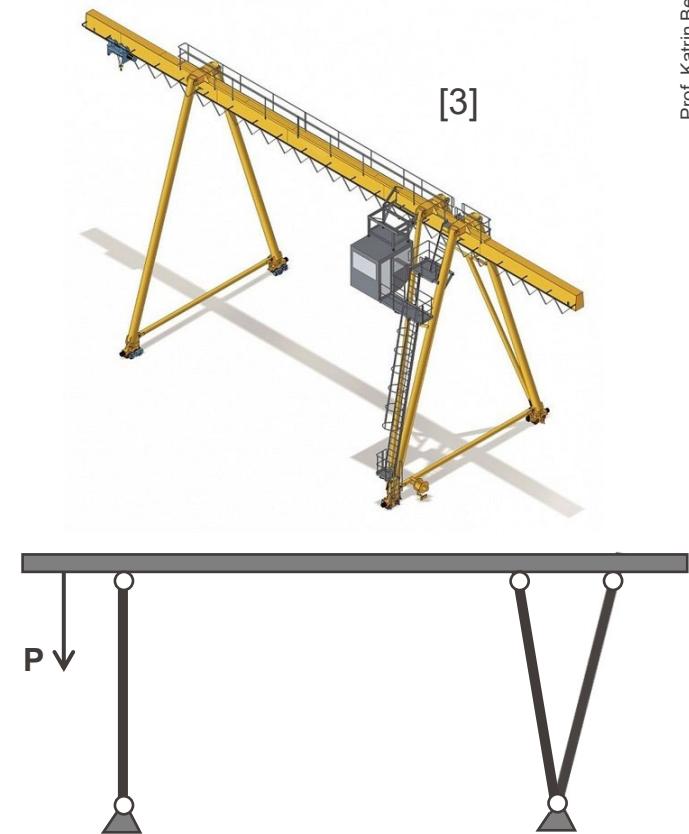
# Exemples - illustrations



**Fig. 2.4** Action-réaction: (a) contrefort de cathédrale ( $A$  = action du contrefort sur le sol;  $B$  = réaction du sol); (b) attraction planétaire.

# Objectifs du cours

- Modéliser les **structures réelles** avec des **éléments de la statique** appropriés (barres, poutres, câbles)
- Analyser par l'**équilibre** les forces de réactions et celles à l'intérieur des structures
- Trouver la position d'une **charge mobile** qui maximise la sollicitation de la structure (ligne d'influence)



# Objectifs du cours

- Buts des calculs statiques « à la main » :
  - Développer un «feeling» des efforts et de leur cheminement à l'intérieur des éléments structuraux
  - Savoir contrôler les calculs effectués par des programmes basés sur des méthodes numériques (éléments finis, etc.).



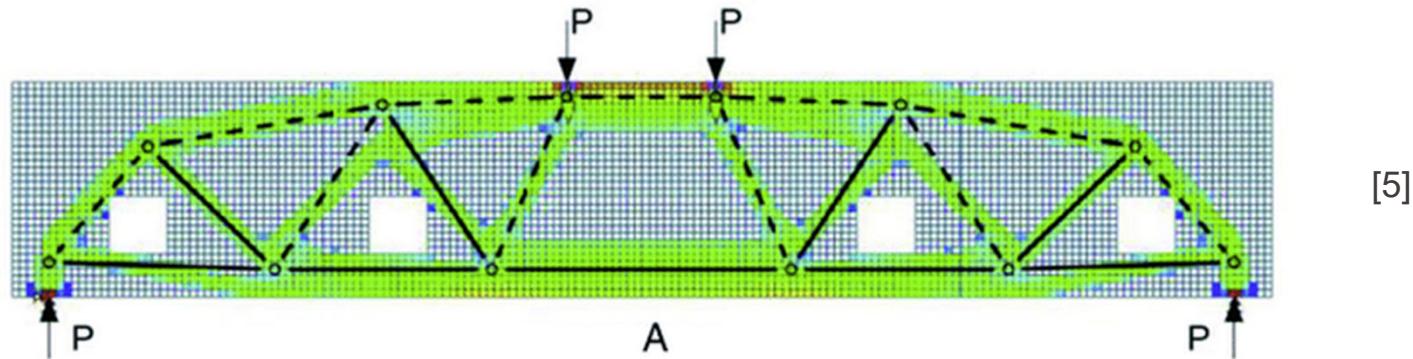
[4]

*Sleipner A : Plateforme pétrolière qui s'est abîmée à cause d'erreurs dans les calculs par éléments finis*

(voir <http://www.ima.umn.edu/~arnold/disasters/sleipner.html>)

# Objectifs du cours

- Les modèles statiques permettent également de représenter et calculer des éléments de structure continus, notamment en béton armé
- Modèles arc-câbles pour les poutres
- Modèles bielles et tirants (treillis) très utilisés pour les calculs de béton armé



Eléments tendus : traits pleins = tirants (ties)

Eléments comprimés : traits pointillés = bielles (struts)

# Contexte du cours (PE 2024/2025 )

Année propédeutique		Bachelor Année 1			Bachelor Année 2 + cours à option		Master
Sem 1	Sem 2	Sem 3	Sem 4	Sem 5	Sem 6 + projet GC	Cours à option	
Analyse I	Analyse II	Analyse III	Analysis IV	Numerical analysis	Signals, instruments and systems		
Algèbre linéaire	Eléments de géomatique	Probabilités et statistiques	Introduction to Machine Learning for engineers	Hydrology for engineers	Heat and mass transfer		
Physique générale (Mécanique)	Physique générale (Thermodynamique)	Introduction to optimization and operations research	Introduction to transportation systems	Méthodes d'estimation	Urban public transport systems	Engineering of existing structures	
Chimie générale	Programming and software development for engineers	Engineering a sustainable built environment	Mécanique des fluides	Ouvrages et aménagements hydrauliques	Représentation numérique / BIM	Non linear analysis of structures	
Information, Calcul, Communication	Statique	Mécanique des milieux continus	Structural mechanics	Dimensionnement des constructions en bois	Modélisation numériques des solides et structures	Dynamique des structures	
Drawing structures	Matériaux	Géologie	Soil mechanics and flow through porous media	Reinforced concrete structures	Structures en métal	Structural stability	
		Fundamentals of indoor climate		Mécanique des roches et ouvrages souterrains	Ouvrages géotechniques	Continuum mechanics and applications	
				Traffic engineering	Systèmes d'Information Géographique (SIG)	Materials and Structures	
				Urban thermodynamics	Data science for infrastructure condition monitoring		

Année propédeutique		Bachelor Année 1		Bachelor Année 2		Master
Semestre 1	Semestre 2	Semestre 3	Semestre 4	Semestre 5	Semestre 6 + projet GC	Cours à option

“Isostaticité”

Structures simples,  
équilibre, accélération nulle

“Hyperstaticité”

Structures complexes  
Déformations

■ STATIQUE – COURS 1

## Statique

Mécanique des  
milieux continus

Structural mechanics

Drawing structures

Bases  
milieux continus

Représentation

Modélisation numériques  
des solides et structures

Engineering of  
existing structures

Non linear  
analysis of  
structures

Dynamique des  
structures

Structural  
stability

Continuum  
mechanics and  
applications

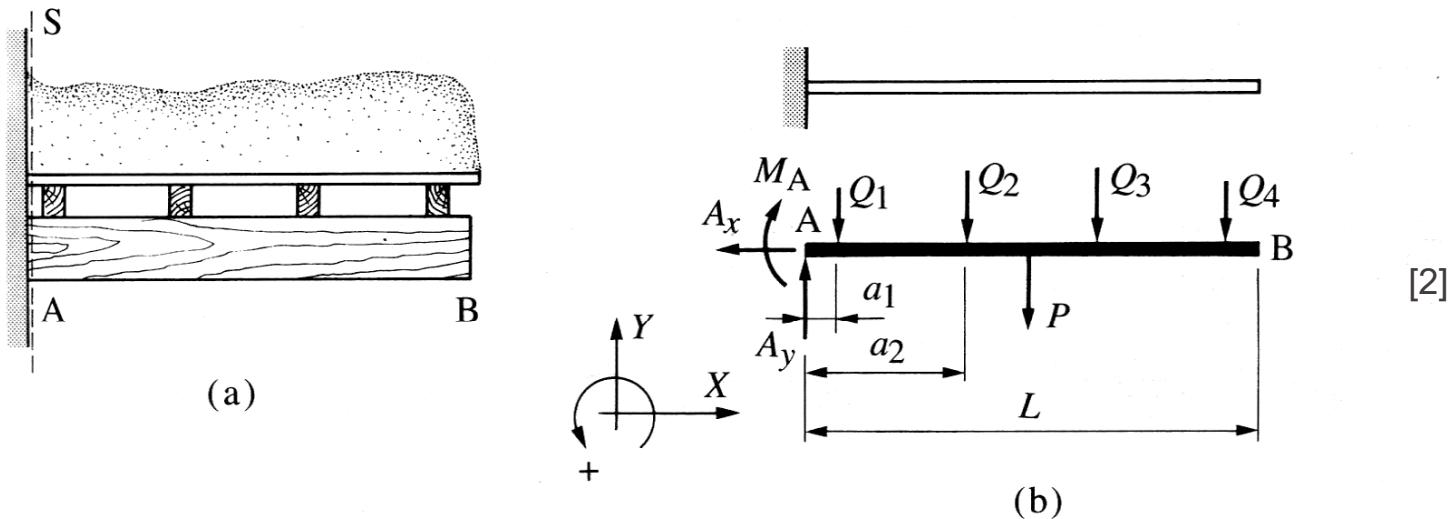
Materials and  
Structures

→ L'ingénierie des Structures dans le cursus GC EPFL 2024-2025

# Objectifs du cours et contexte

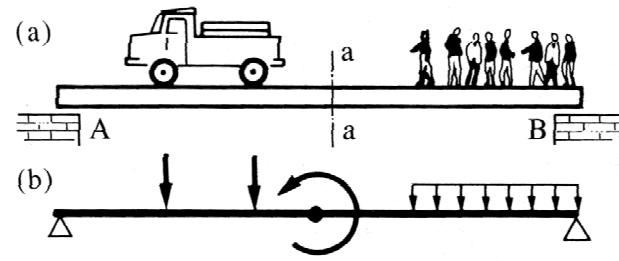
- L'étude des systèmes hyperstatiques et la prédition quantitative de la déformation des structures fait l'objet des cours de Mécanique des Milieux Continus (CIVIL-225) BA3, et Mécanique des Structures (CIVIL-238) BA4.
- L'approfondissement de l'analyse des structures dans les cas de grandes déformations et/ou de sollicitations dynamiques, ainsi qu'au niveau de la stabilité est traité dans les cours suivants (optionnels) au niveau Master : CIVIL-449, CIVIL-468, CIVIL-369.
- L'étude des structures existantes (maintenance et évaluation de la capacité portante) est traitée dans le cours Master (option) CIVIL-511.
- L'approfondissement des connaissances sur les bétons traditionnels et à Ultra Hautes Performances (BFUP) est offert dans le cours Master (option) CIVIL-532.

# Exemples d'applications dans le cadre du cours



**Fig. 5.11** Modéliser pour résoudre : (a) auvent réel (élévation simplifiée); (b) modélisation de l'auvent (schéma statique et extériorisation des forces).

# Exemples d'applications dans le cadre du cours



madrier de chêne

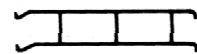


profilé laminé en acier

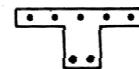


[6]

extrudé en aluminium



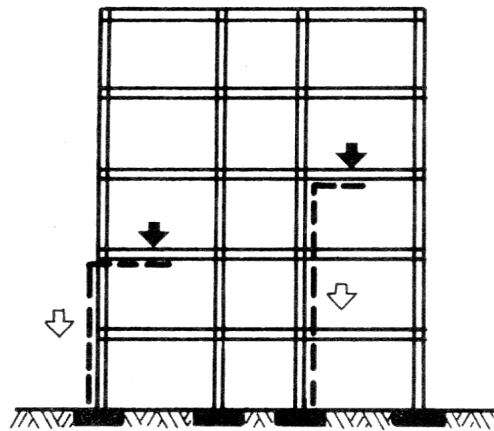
poutre en béton armé



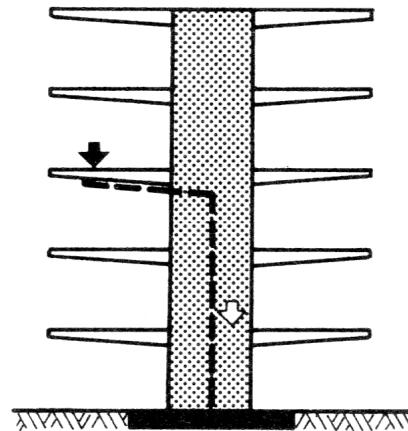
(c)

Fig. 4.2 Poutre : (a) élévation d'une poutre; (b) schéma; (c) coupes aa diverses.

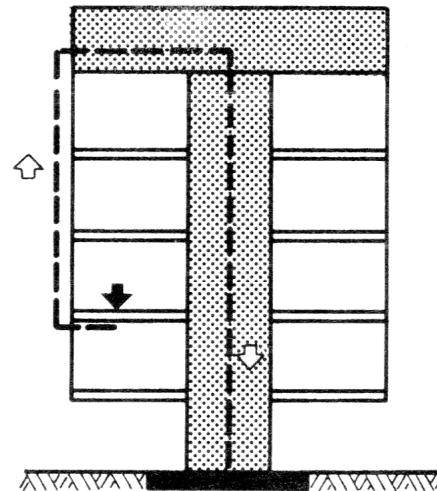
# Exemples d'applications



a) systèmes traditionnels



b) dalles en console

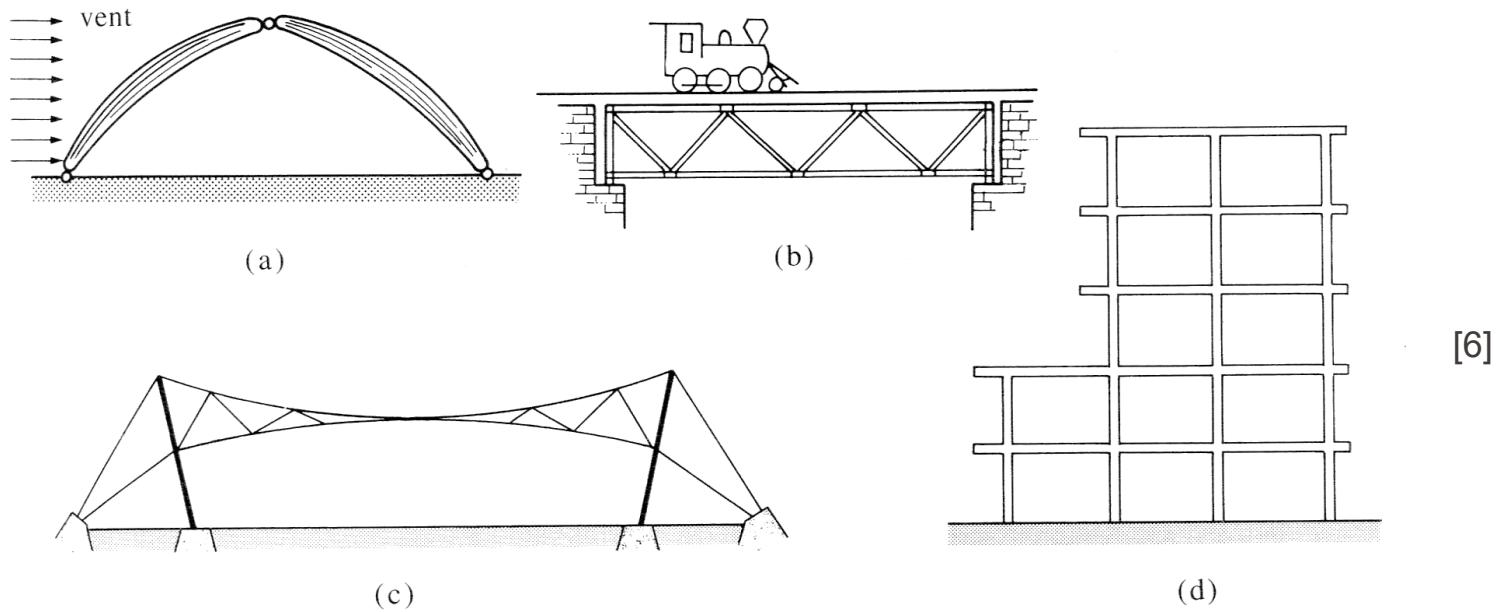


c) dalles suspendues

[7]

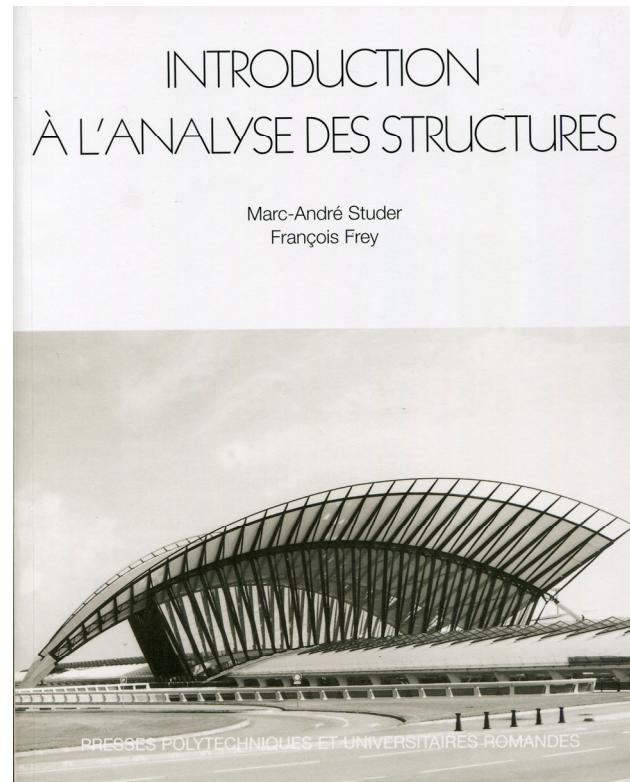
- Descente de charges vers les fondations

# Exemples - illustrations



**Fig. 3.1** Structures planes : (a) arc en bois lamellé-collé; (b) pont métallique en treillis; (c) toiture en câbles; (d) cadre en béton armé.

# Exemples - illustrations



[6]

# Contenu et programme du cours

No	Date	Cours	Exercices
1	18.02.2025	Introduction : Forces et moments	En groupes
2	25.02.2025	Actions agissant sur les structures, réduction et équilibre	En groupes
3	04.03.2025	Principes, déplacements, coupes et forces internes	En groupes
4	11.03.2025	Modélisation, appuis et organes de liaison	En groupes
5	18.03.2025	Théorème des déplacements virtuels (TDV)	En groupes
6	25.03.2025	Treillis & isostaticité des structures composées de poutres et de barres	En groupes
7	01.04.2025	Poutres : équations différentielles d'équilibre	Examen 1
8	08.04.2025	Poutres : construction rapide des diagrammes MVN	En groupes
9	15.04.2025	Poutres : déformée, poutres cantilever et portiques	En groupes
	22.04.2025	Vacances	
10	29.04.2025	Poutres à plan moyen : exercices additionnels, révision TDV	En groupes
11	06.05.2025	Poutres dans l'espace	Examen 2
12	13.05.2025	Lignes d'influence & trains de charges	En groupes
13	20.05.2025	Câbles et arcs	En groupes
14	27.05.2025	Récapitulation – Révisions/exercices - Préparation examen	En groupes

- Organisation du cours
  - 3 h de cours par semaine
  - 2 h d'exercices par semaine
- Moodle
  - Présentation sur Moodle : **lundi après-midi**
  - Exercices sur Moodle : **lundi après-midi**
  - Corrigés des exercices sur Moodle : **jeudi soir**
- Présentations
  - Il y a des trous à remplir et des petits exercices à faire
- Vidéos du cours (ancienne version à 4 ECTS)
  - Vidéo plateforme Kaltura (voir site Moodle)

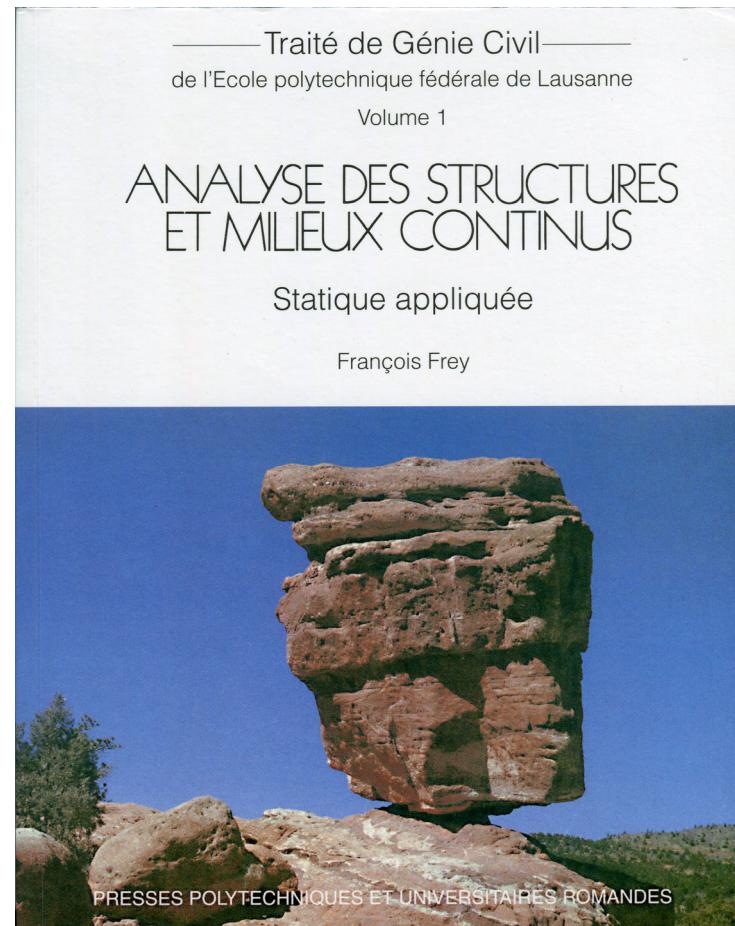
## ■ Exercices

- Les exercices se font par groupes de maximum 20 étudiant(e)s avec un(e) assistant(e) étudiant(e) par groupe
- **Inscription aux groupes via Moodle jusqu'au 19 février 2025**
- Responsable des exercices : **Qianqing Wang** ([qianqing.wang@epfl.ch](mailto:qianqing.wang@epfl.ch)) remplaçant Yuhan Zhu ([yuhan.zhu@epfl.ch](mailto:yuhan.zhu@epfl.ch))

Groupe	Assistant étudiant	Salle
1	Michael Nehme	GRA330
2	Elias Rafoul	À confirmer
3	Lil Sarah Alya Jost-Dalifard	À confirmer
4	Nicolas Wakim	GRA331

# Documentation

- Livre : « Statique appliquée (TGC Volume 1) – Analyse des structures et milieux continus » de François Frey (édition 2018)



- Examens pendant le semestre
  - 1<sup>er</sup> «examen» : facultatif, ne compte pas, durée 1h
  - 2<sup>ème</sup> «examen» : obligatoire, compte pour 25% de la note finale, durée 1h
- Examen pendant la session d'examens
  - Obligatoire
  - Durée : 3 h
- Ressources
  - Tous les examens sont des épreuves à livre fermé mais des formulaires manuscrits sont autorisés :
    - Pour le 1<sup>er</sup> examen : 1 page
    - Pour le 2<sup>ème</sup> examen : 2 pages (1 page recto-verso)
    - Pour l'examen final : 2 pages (1 page recto-verso)
  - Les formulaires photocopiés ou imprimés **ne sont pas autorisés**
  - Les formulaires sous forme de notes manuscrites sur tablette, imprimées, sont autorisés.
  - Calculatrice non-programmable autorisée

# Le secret de la réussite pour ce cours

- Suivre activement le cours (prendre des notes, poser des questions, répondre aux questions, résoudre les exercices).
- Faire les exercices chaque semaine (la première tentative sans regarder la solution).
- Ecrire les solutions des exercices avec soin pour faciliter la répétition avant les examens.
- Préparer soigneusement les formulaires, vous en bénéficierez pendant toutes vos études.

■ Autrice des dias (2023)  
: Prof. Katrin Beyer

■ Earthquake  
Engineering and  
Structural Dynamics  
Laboratory

■ Dias supplémentaires  
Prof. E. Denarié (2025)

■ Laboratoire de  
comportement et  
conception des  
structures en béton



# Forces et moments

Prof. E. Denarié

# Objectifs du cours

A la fin de ce cours, vous saurez :

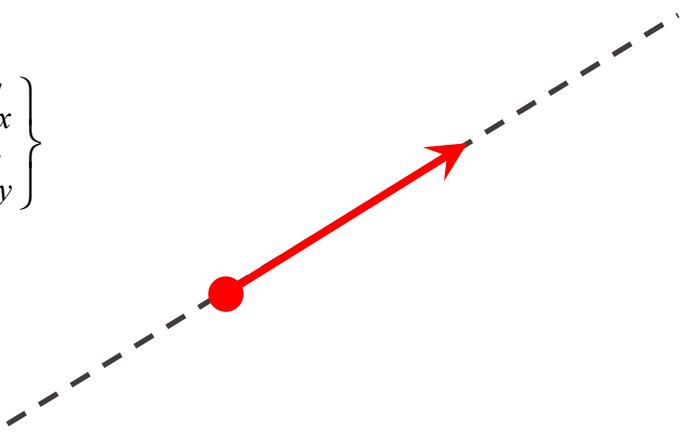
- Comment sont caractérisés une force et un moment
- Comment calculer le moment provoqué par une force autour d'un axe
- Ce qu'est l'équivalence statique
- Remplacer une force répartie par une force concentrée telle que la force concentrée soit statiquement équivalente à la force répartie

1. Forces
  - Caractéristiques d'une force
  - Association force-translation
  - Notation des forces dans la statique appliquée
  - Forces réparties sur des lignes
2. Moments de forces
  - Le moment d'un couple
  - Association moment-rotation
  - Le moment d'une force par rapport à un axe (cas plan/cas 3D)
  - Le moment d'une force par rapport à un point
3. Notion d' «équivalence statique»

- Les caractéristiques d'une force sont:

- Le point d'application
- La ligne d'action ou le support
- Le sens
- La grandeur ou l'intensité

- La force a le caractère d'un vecteur:  $\vec{F} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix}$



- Une force est associée a une translation (même si la translation ne se produit pas).
- Une force provoque un changement
  - De la vitesse de translation du solide
  - De la direction du mouvement du solide

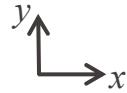
- Unité de force : le Newton

- $1\text{ N} = 1\text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$
- $1\text{ kN} = 1000\text{ N}$
- $1\text{ MN} = 1000\text{ kN} = 1 \cdot 10^6\text{ N}$

- Forces réparties

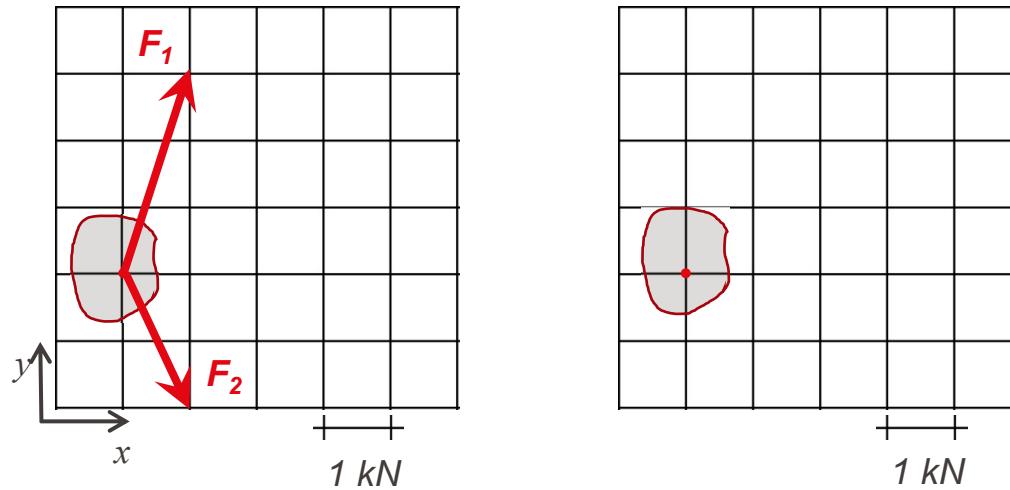
- Sur une ligne :  $\text{N/m}$  ;  $\text{kN/m}$  ;  $\text{MN/m}$
- Sur une surface :  $\text{N/m}^2 = \text{Pa}$  ;  $\text{kN/m}^2 = \text{kPa}$  ;  $\text{MN/m}^2 = \text{N/mm}^2 = \text{MPa}$
- Sur un volume (poids) :  $\text{N/m}^3$  ;  $\text{kN/m}^3$  ;  $\text{MN/m}^3$

- Convention dans la statique appliquée
  - Lettre **majuscule** pour une force **concentrée**
  - Lettre **minuscule** pour une force **distribuée**

	Vecteur	Intensité	Composante (Intensité + Signe)
			
			

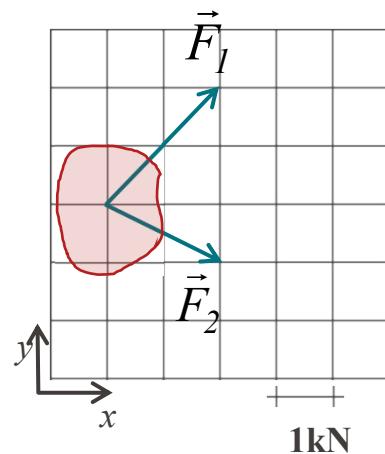
# Résultante de forces

- Trouver la résultante  $R$  des deux forces  $F_1$  et  $F_2$

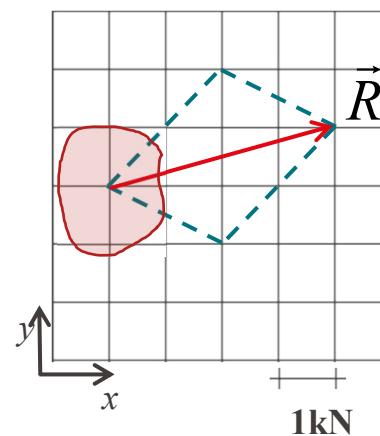


# Équivalence statique

- Définition d' «équivalence statique»
  - Deux groupes de forces sont **statiquement équivalents** s'ils ont le même effet global sur un solide du point de vue de la statique et en particulier de l'équilibre
- Exemple : principe du parallélogramme
  - *Le principe du parallélogramme s'applique tant aux forces qu'aux moments*



Statiquement  
équivalent à  
(  $\vec{F}_1, \vec{F}_2 \sim \vec{R}$  )



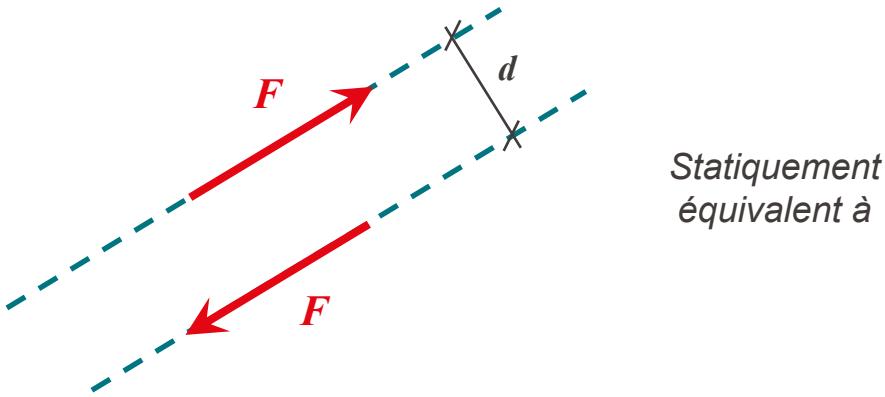
# Les moments des forces



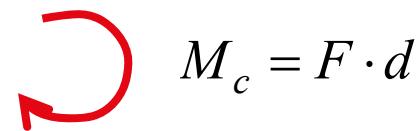
- Un moment est associé à une rotation (même si la rotation ne se produit pas)
- Un moment provoque un changement
  - De la vitesse de rotation du solide
  - De l'orientation de l'axe de rotation du solide

# Le moment d'un couple

- Couple : 2 forces égales et opposées
  - $d$  = bras de levier du couple
- Unité du moment (force · longueur) :  $Nm$  ;  $kNm$  ;  $MNm$
- Notation graphique d'un moment :
  - Flèche tournante
  - Double-flèche

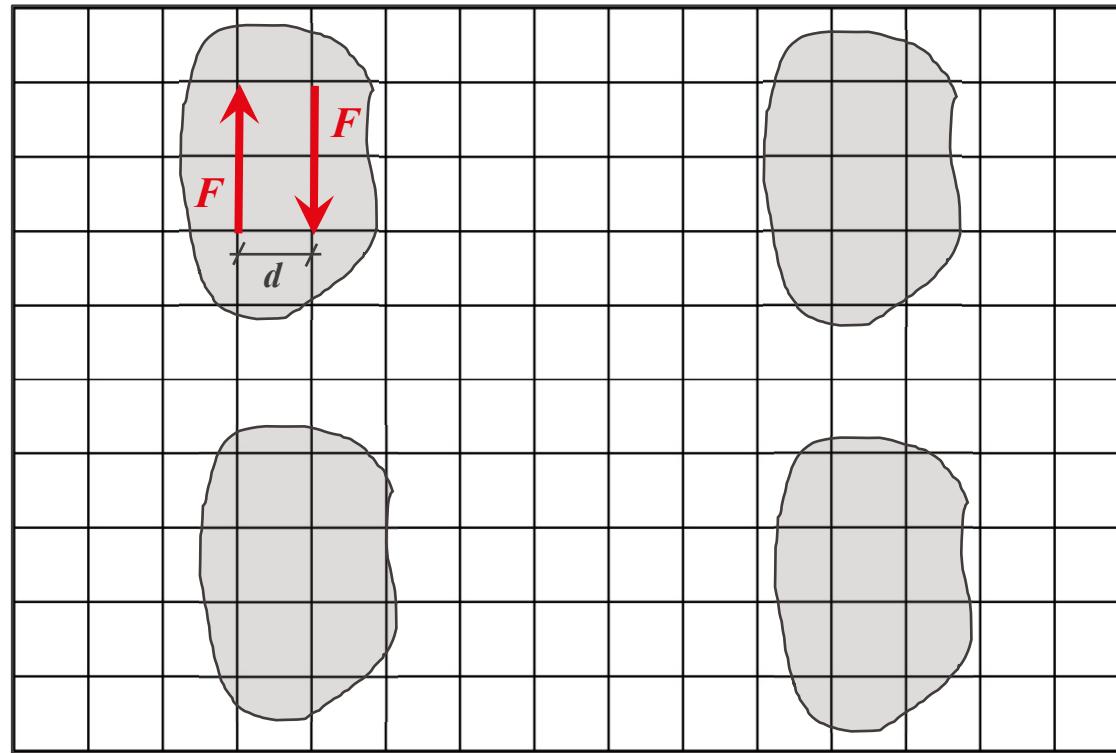


Statiquement  
équivalent à



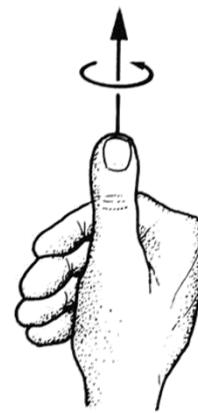
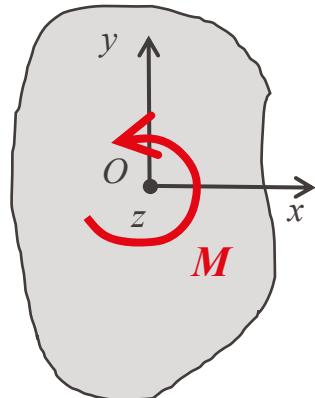
# Exemple

- Groupes de forces statiquement équivalents



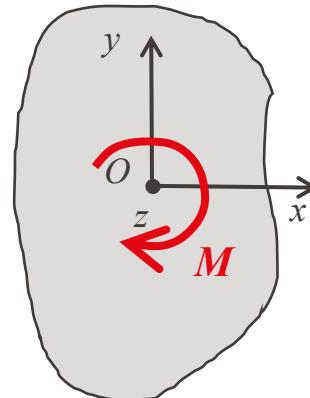
# Signe d'un moment

- Le moment est positif autour de l'axe z, si le moment tourne dans la même direction que les quatre doigts quand le pouce pointe dans la direction **positive** de l'axe z.



$$M > 0$$

- Le moment est négatif autour de l'axe z, si le moment tourne dans la même direction que les quatre doigts quand le pouce pointe dans la direction **négative** de l'axe z.



# Moment d'une force par rapport à un axe

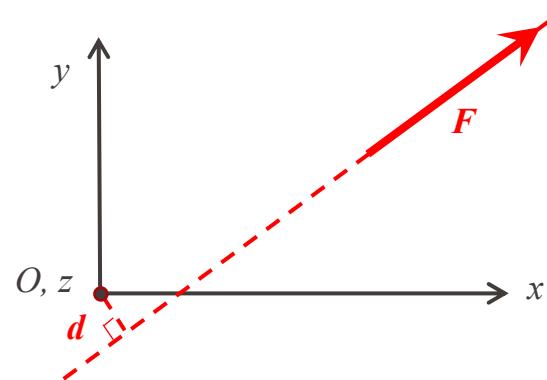
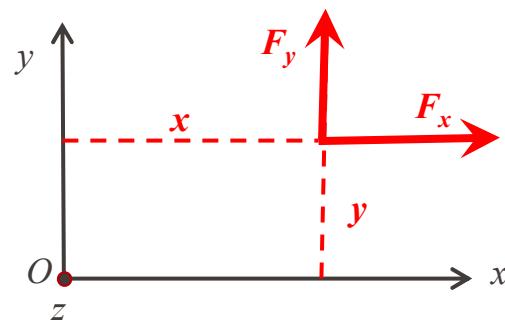
- Le cas plan

- Via les composantes

$$M_{O,z} = x \cdot F_y - y \cdot F_x$$

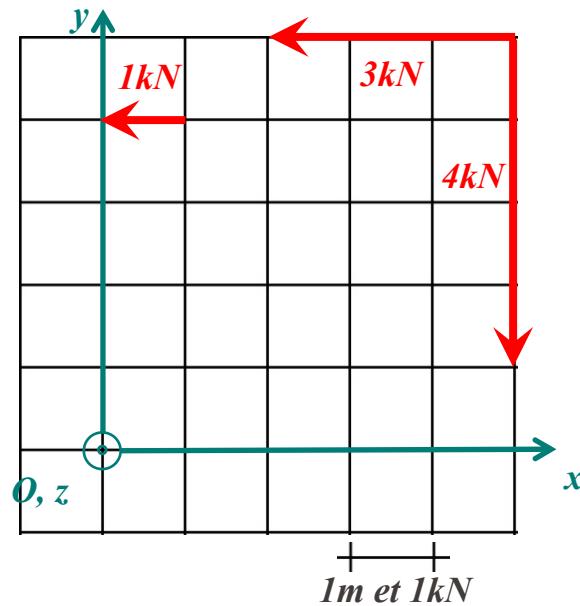
- Via la résultante

$$M_{O,z} = d \cdot F$$



# Exemple

- Calculer le moment  $M_{Oz}$  des 3 forces par rapport à l'axe z

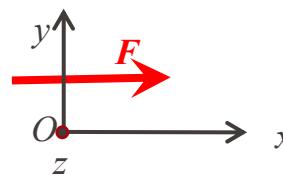




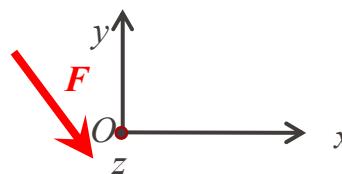
## A votre tour!

Le moment provoqué par  $\mathbf{F}$  autour de l'axe z est :

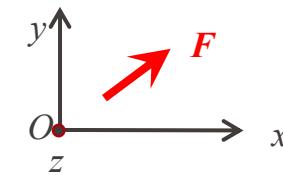
- $M_{Oz} > 0$  le moment autour de l'axe z est positif
- $M_{Oz} < 0$  le moment autour de l'axe z est négatif
- $M_{Oz} = 0$  le moment autour de l'axe z est nul



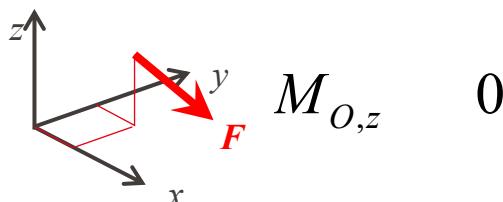
$$M_{O,z} \quad 0$$



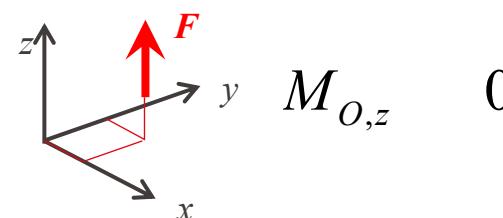
$$M_{O,z} \quad 0$$



$$M_{O,z} \quad 0$$

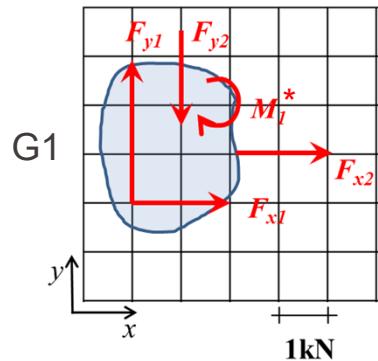


$$M_{O,z} \quad 0$$

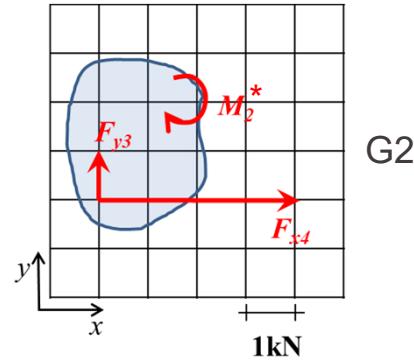


$$M_{O,z} \quad 0$$

# Équivalence statique



Statiquement  
équivalent à

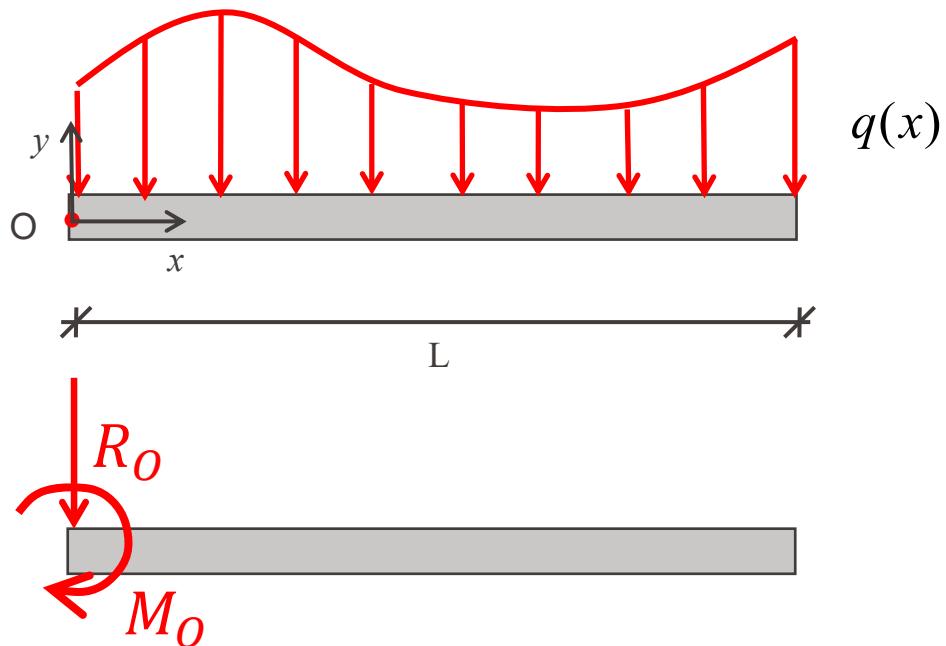


- En termes mathématiques, 2 groupes de forces G1 et G2 sont statiquement équivalents si :

(cas plan : toutes les forces agissent dans le plan x-y)

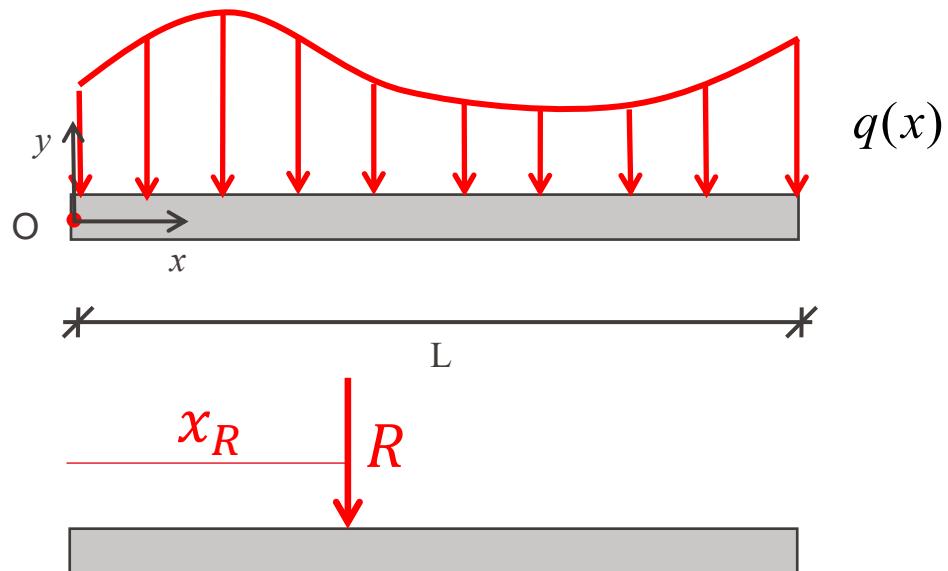
# Forces réparties sur une ligne

- Remplacer  $q(x)$  par une force en  $O$  et un moment en  $O$  qui sont statiquement équivalents à  $q(x)$



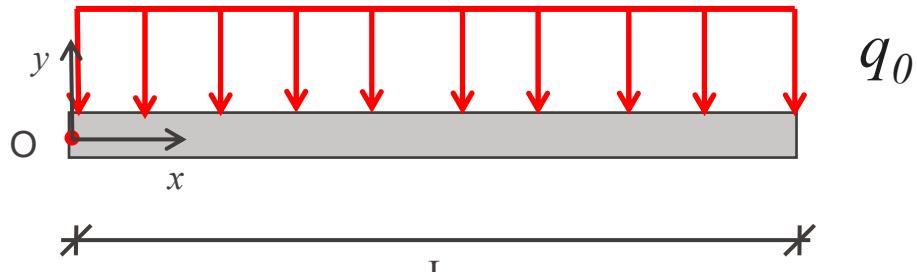
# Forces réparties sur une ligne

- Remplacer  $q(x)$  par une seule force statiquement équivalente à  $q(x)$



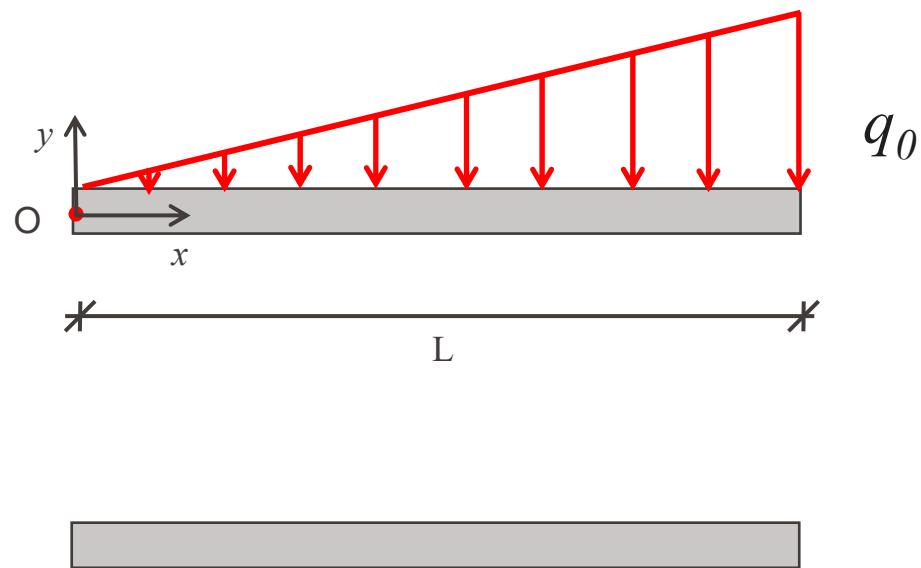
# Charge uniforme/uniformément répartie

- Remplacer  $q(x)=q_0$  par une force concentrée statiquement équivalente à  $q(x)$



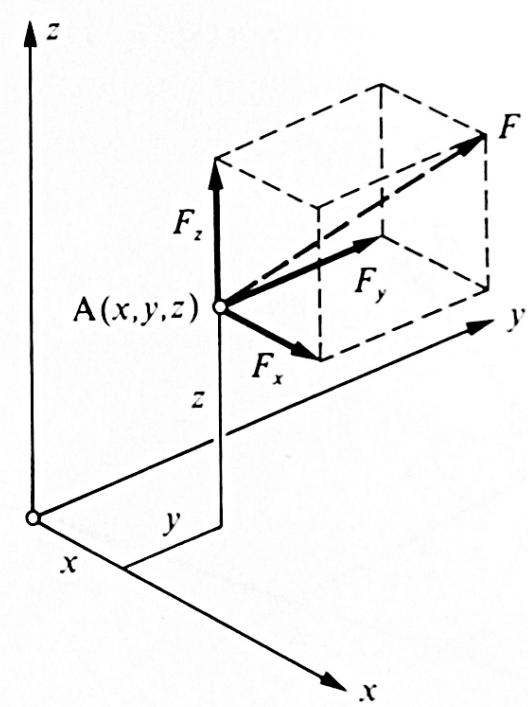
# Charge triangulaire

- Remplacer  $q(x)$  par une force concentrée statiquement équivalente à  $q(x)$

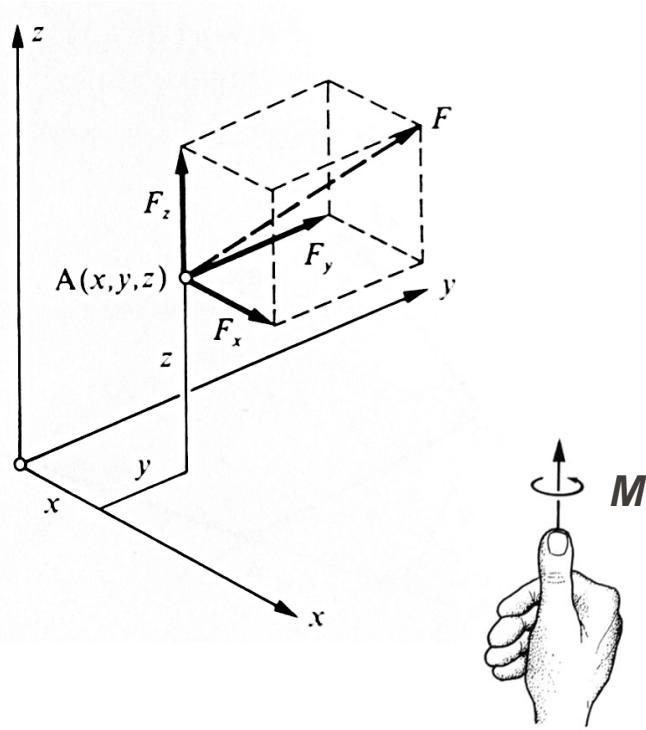


- Composantes cartésiennes d'une force :

$$\vec{F} = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix}$$



# Moments autour des axes x, y, z



■ STATIQUE – COURS 1

Règle de la main droite

- Le moment de la force  $\vec{F}$  autour de l'axe x :

$$M_x = -z \cdot F_y + y \cdot F_z$$

- Le moment de la force  $\vec{F}$  autour de l'axe y :

$$M_y = z \cdot F_x - x \cdot F_z$$

- Le moment de la force  $\vec{F}$  autour de l'axe z :

$$M_z = -y \cdot F_x + x \cdot F_y$$

Le moment d'une force par rapport à un axe est **nul** si la force et l'axe sont coplanaires, soit :

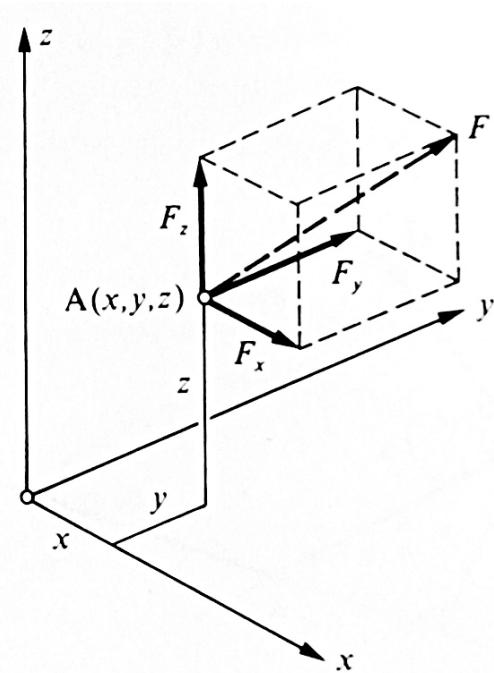
- Si la ligne d'action de la force **coupe** l'axe
- Si la ligne d'action de la force et l'axe sont **parallèles**.

# Moment d'une force par rapport à un point

- Force  $\vec{F}$  avec point d'application  $A(x, y, z)$ :  $\vec{F} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix}$

- Moment de  $\vec{F}$  par rapport au point O ( $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ ) :

$$\vec{M}_O = \vec{a} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \times \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} yF_z - zF_y \\ zF_x - xF_z \\ xF_y - yF_x \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix}$$



# Important

- Le moment par rapport à un **axe** a le caractère d'un **scalaire**.
- Le moment par rapport à un **point** a le caractère d'un **vecteur**. Les composantes de ce vecteur correspondent aux moments autour des axes.

# Chapitres à étudier dans le TGC 1

- **Chapitre 1** : Concept de force et actions 1.1 à 1.5
- **Chapitre 2** : Forces, moments et principes 2.1, 2.2, 2.4, 2.5 et 2.6

- Théorèmes du cosinus

- Généralisation du théorème de Pythagore

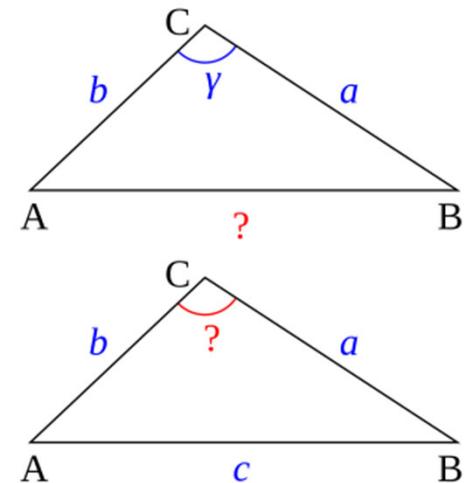
- le troisième côté d'un triangle dont on connaît un angle et les côtés adjacents :

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma};$$

- les angles d'un triangle dont on connaît les trois côtés :

$$\gamma = \arccos \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

[https://fr.wikipedia.org/wiki/Loi\\_des\\_cosinus](https://fr.wikipedia.org/wiki/Loi_des_cosinus)



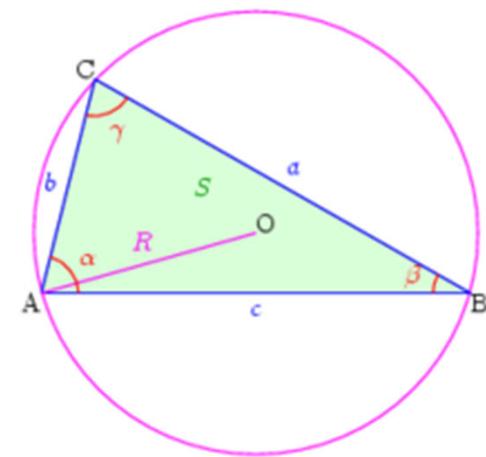
### ■ Théorèmes du sinus

- $a = BC$  et  $\alpha = \text{angle formé par } [AB] \text{ et } [AC]$  ;
- $b = AC$  et  $\beta = \text{angle formé par } [BA] \text{ et } [BC]$  ;
- $c = AB$  et  $\gamma = \text{angle formé par } [CA] \text{ et } [CB]$ .

La formule dite des sinus est alors :

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma},$$

[https://fr.wikipedia.org/wiki/Loi\\_des\\_sinus](https://fr.wikipedia.org/wiki/Loi_des_sinus)



# Références

## Références des illustrations par ordre d'apparition

- [1] [Rainbow Bridge](#) © Ad Meskens, [CC BY-SA 3.0](#)
- [2] Frey, François, Statique appliquée (TGC volume 1) – Analyse des structures et milieux continus, EPFL Press, 2005, 2018.
- [3] [Grue portique](#) © Dkzavod, [CC BY-SA 4.0](#)
- [4] [Plateforme Sleipner A](#) © Aftenposten, [CC BY-NC-SA 4.0](#)
- [5] Hardjasaputra, Harianto. (2015). Evolutionary Structural Optimization as Tool in Finding Strut-and-tie-models for Designing Reinforced Concrete Deep Beam. Procedia Engineering. 125. 995-1000. 10.1016/j.proeng.2015.11.153. [CC BY-NC-ND 4.0](#)
- [6] Studer, Marc-André, Frey, François, Introduction à l'Analyse des Structures, EPFL Press, 1997.
- [7] Favre, R., Cours d'Introduction au Génie Civil – 2<sup>ème</sup> partie – Construction des Bâtiments, EPFL/DGC/ISS, 1980.
- [8] [Volant](#) © Alessandro Suraci, [CC BY 3.0](#)
- [9] [Tire-bouchon](#) © Slicon, [CC BY 3.0](#)
- [10] Icône exercices : [Figure](#) © Dukesy68, [CC BY-SA 4.0](#) ; [Pont du Golden Gate](#), [CC0 1.0](#)

- The presentations are published under license CC BY-NC 4.0
- If reusing the entire presentation or parts of it, please cite as «Beyer K, Statique 1, Lecture notes, School of Architecture, Civil and Environmental Engineering, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Switzerland, 2023, with additional material from Denarié E. (2025)»