

■ Autrice des dias (2023)
Prof. Katrin Beyer

■ Earthquake
Engineering and
Structural Dynamics
Laboratory

■ Prof. E. Denarié (2025)

■ Laboratoire de
comportement et
conception des
structures en béton



Statique

Lignes d'influence

Prof. E. Denarié

Objectif du cours

A la fin de ce cours, vous saurez :

- Comment on définit un train de charges mobiles
- Ce qu'est une ligne d'influence et quelle est son utilité
- Comment calculer une ligne d'influence en utilisant l'équilibre et le TdV
- Quel est le lien entre les diagrammes NVM et les lignes d'influence d'un point de la poutre

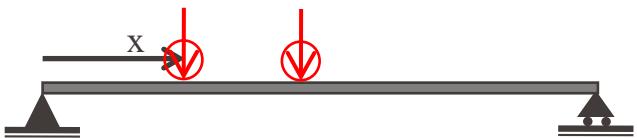
- 1. Définition d'une « ligne d'influence »**
- 2. Calcul des lignes d'influence par l'équilibre**
- 3. Calcul des lignes d'influence par le Tdv**
 - Principe et application aux réactions d'appuis
 - Lignes d'influence des forces de liaison
 - Lignes d'influence des efforts intérieurs
 - Trains de charges

- Exemples de charges mobiles:

- Véhicule sur un pont
 - Pont roulant sur des rails

- Les effets statiques (forces de réaction, forces de liaison et efforts intérieurs) changent avec la position de la charge mobile

- Il faut étudier la variation des effets statiques en fonction de la position de la charge mobile
 - On veut trouver la position de la charge qui maximise un certain effet statique

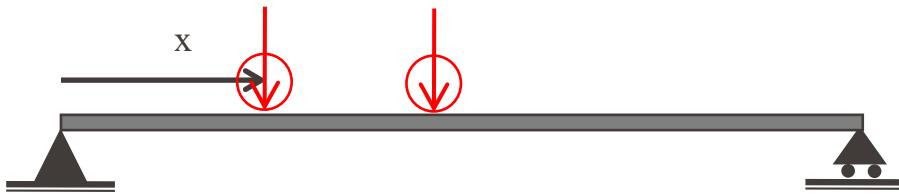


Train de charges :

Un groupe mobile de charges dont les positions relatives et les intensités sont fixes.

Chemin de roulement :

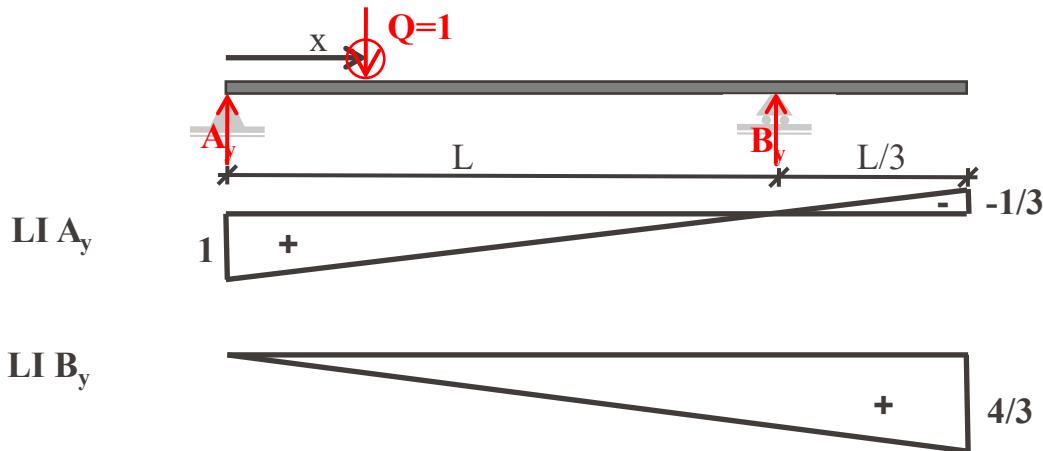
Eléments de structure sur lesquels le train de charges peut agir (ex : tablier de pont).



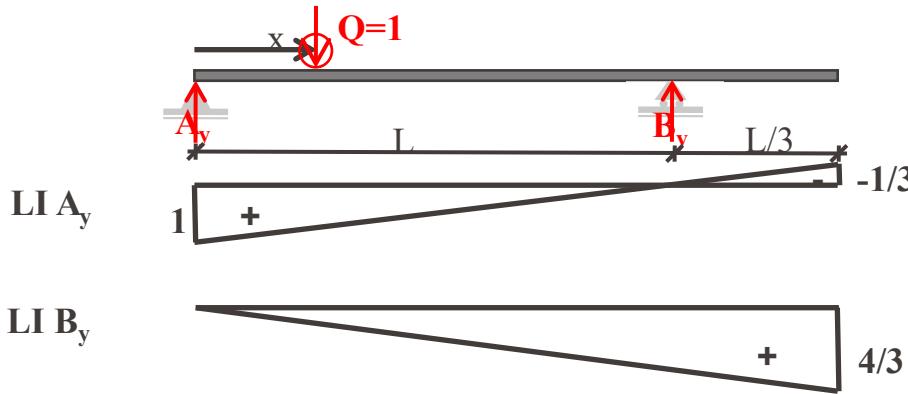
Ligne d'influence :

La courbe qui donne la valeur d'une force de réaction ou d'un effort intérieur à une position fixe pour toutes les positions possibles d'une charge mobile.

- *la ligne d'influence est typiquement calculée pour une charge unitaire*



Exemple : pont avec porte-à-faux



- Pour quelle position de la charge la réaction B_y devient-elle maximale ?
- Si la charge vaut 50 kN , combien vaut cette réaction ?

1. Définition d'une « ligne d'influence »
2. **Calcul des lignes d'influence par l'équilibre**
3. Calcul des lignes d'influence par le Tdv
 - Principe et application aux réactions d'appuis
 - Lignes d'influence des forces de liaison
 - Lignes d'influence des efforts intérieurs
 - Trains de charges

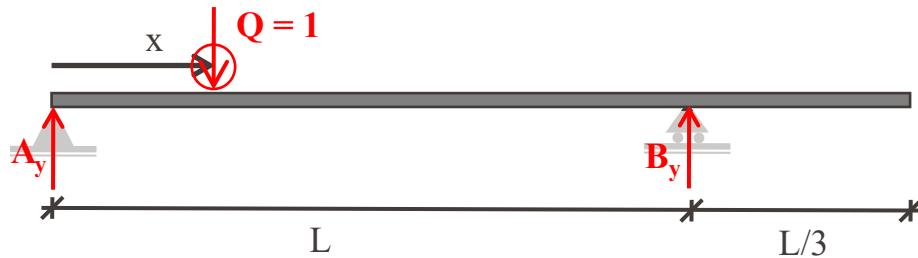
Calcul des lignes d'influence

Marche à suivre pour calculer les lignes d'influence par l'équilibre des fragments :

1. Introduire la position de la charge mobile $Q = 1$ par une variable x
2. Extérioriser l'effet statique recherché en effectuant la coupe appropriée
3. Résoudre l'équilibre en fonction de la position x de la charge

Exemple 1 : charge mobile sur une poutre simple avec un porte-à-faux

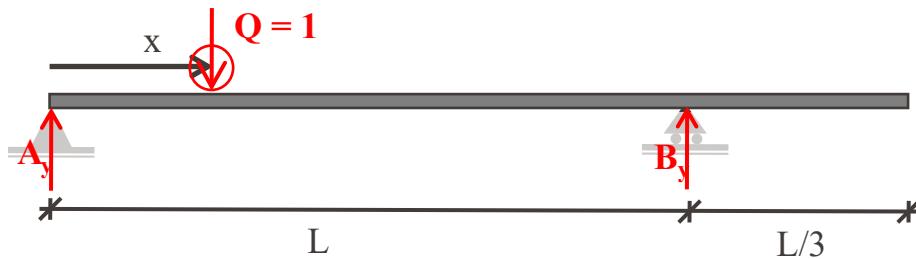
Calculer la réaction A_y en fonction de la position x de Q .



LI A_y

Exemple 1 (suite)

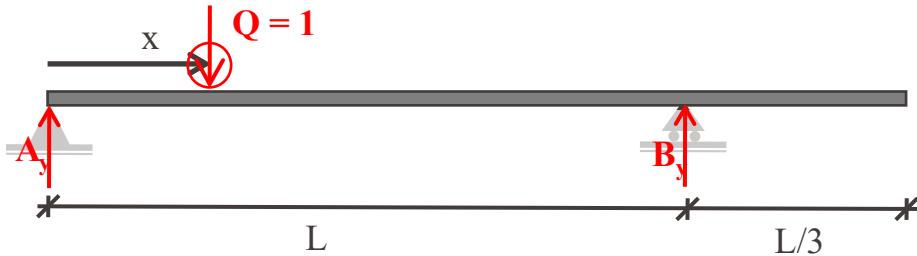
Calculer la réaction B_y en fonction de la position x de Q .



LI B_y

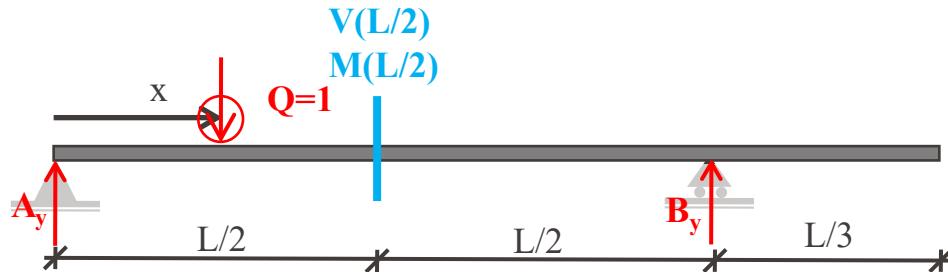
Exemple 1 (suite)

Remarque : somme des réactions



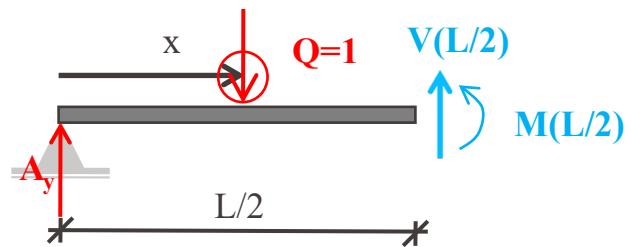
Exemple 2 : lignes d'influences des efforts intérieurs

Calculer les lignes d'influences de M et V à mi-portée de la poutre



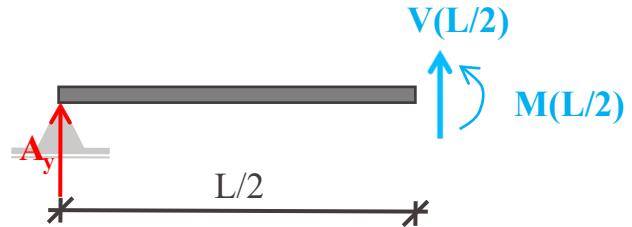
Exemple 2 (suite)

Cas 1 : $x < L/2$



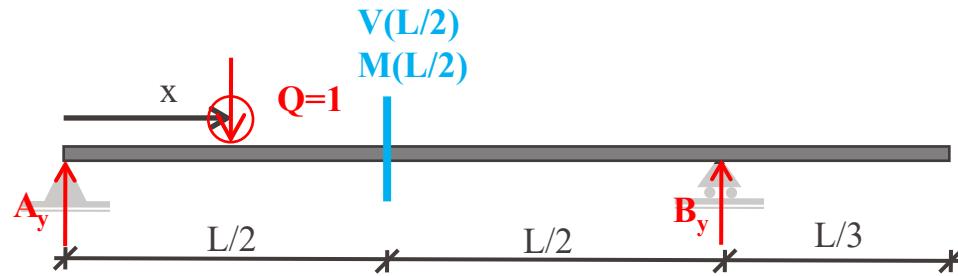
Exemple 2 (suite)

Cas 2 : $x > L/2$



Exemple 2 (suite)

Lignes d'influence



LI $V(L/2)$ ——————

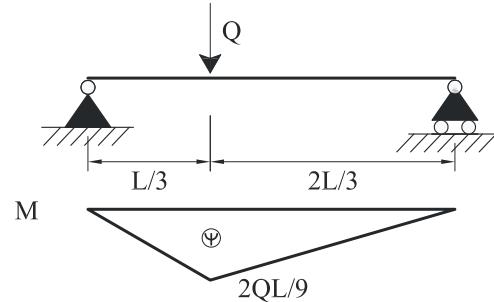
LI $M(L/2)$ ——————

Remarque

Il ne faut pas confondre les diagrammes NVM avec les lignes d'influence des efforts intérieurs.

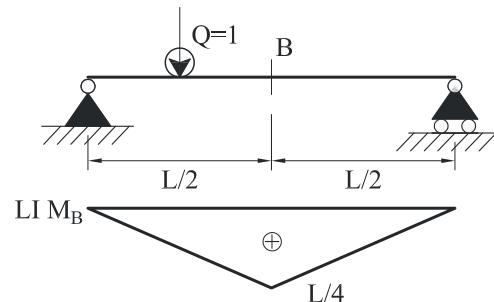
- Diagrammes NVM

*Donnent les valeurs NVM le long de l'axe de la poutre pour un **système de charges fixe***



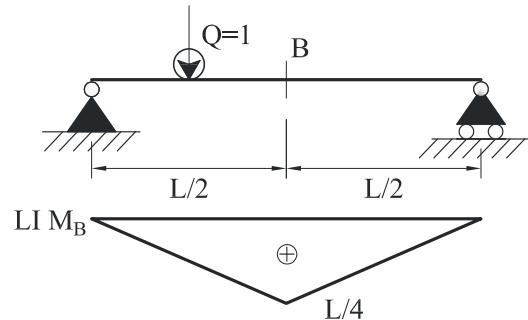
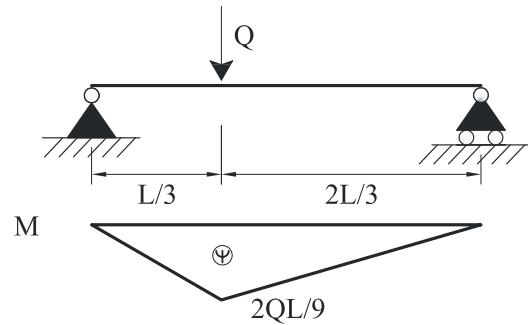
- Lignes d'influence des efforts intérieurs NVM

*Donnent les valeurs NVM pour une section spécifiée et pour un **système de charges mobiles** (position des charges varie le long de l'axe de la poutre)*



Exercice

Trouver un point commun entre les deux diagrammes.



1. Définition d'une « ligne d'influence »
2. Calcul des lignes d'influence par l'équilibre
3. **Calcul des lignes d'influence par le Tdv**
 - Principe et application aux réactions d'appuis
 - Lignes d'influence des forces de liaison
 - Lignes d'influence des efforts intérieurs
 - Trains de charges

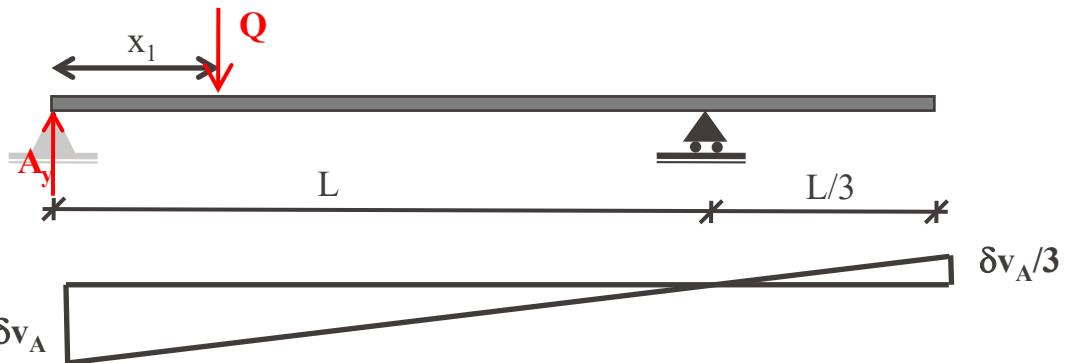
Lignes d'influence par le Tdv

Calculer par le Tdv

1. La force de réaction A_y pour Q en $x = x_1$
2. La ligne d'influence de A_y

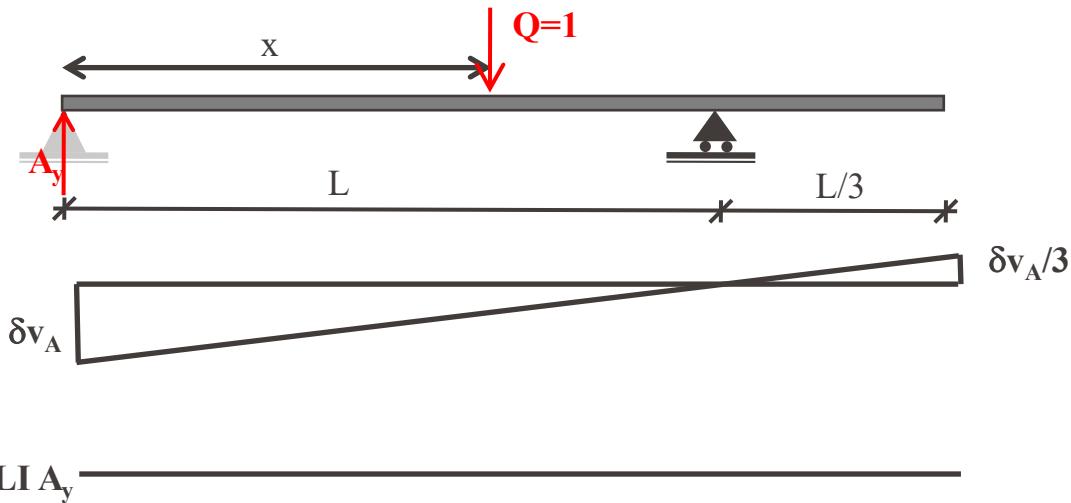
1. Q à $x = x_1$

Tdv :



Lignes d'influence par le Tdv

2. Ligne d'influence de A_y

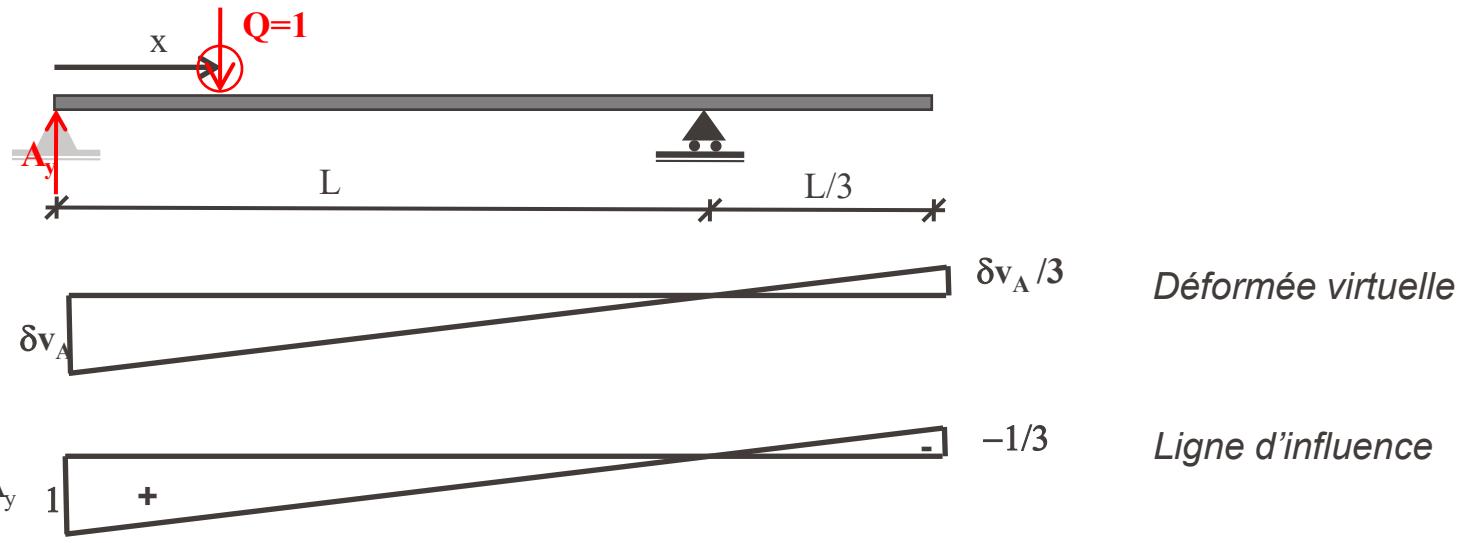


- Si $\delta v_A = 1$:
 - La valeur de A_y lorsque la charge est positionnée en x est la valeur de la déformée virtuelle en x
 - La ligne d'influence **correspond** à la déformée virtuelle

Lignes d'influence par le Tdv

Tracer la ligne d'influence de A_y par le Tdv

- Ligne d'influence de la reaction A_y = déformée virtuelle associée à la coupure simple qui extériorise A_y avec $\delta v_A = 1$



Pour trouver la ligne d'influence d'un effet statique par le théorème des déplacements virtuels :

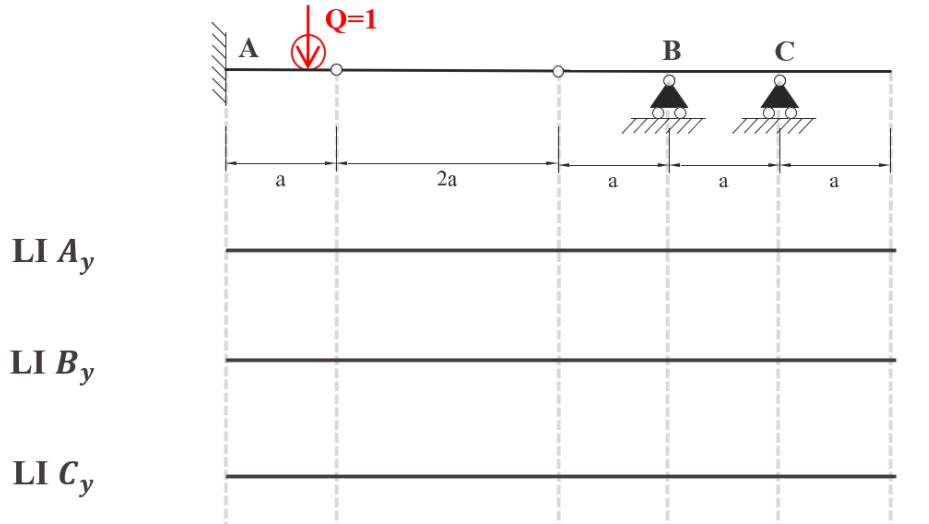
- Coupure simple relative à l'effet statique recherché
- Trouver la déformée virtuelle compatible avec les appuis tel que le déplacement virtuel associé à l'effet statique recherché soit égal à 1
- La ligne d'influence correspond à la déformée virtuelle

Cette méthode permet de tracer les lignes d'influence sans calculs



A votre tour!

Trouver l'allure (sans calculs) des lignes d'influence des réactions d'appuis pour une charge mobile $Q = 1$ (négliger le signe)

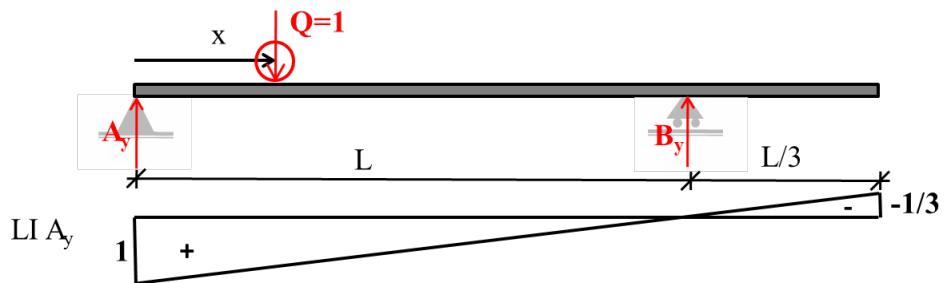


Signe de la ligne d'influence

Si le déplacement virtuel associé à l'effet statique recherché est dans le sens opposé de celui de l'effet statique, *le signe du travail de la charge unitaire donne le signe de la ligne d'influence*.

Les lignes d'influence sont normalement calculées pour des charges qui résultent du poids propre des véhicules

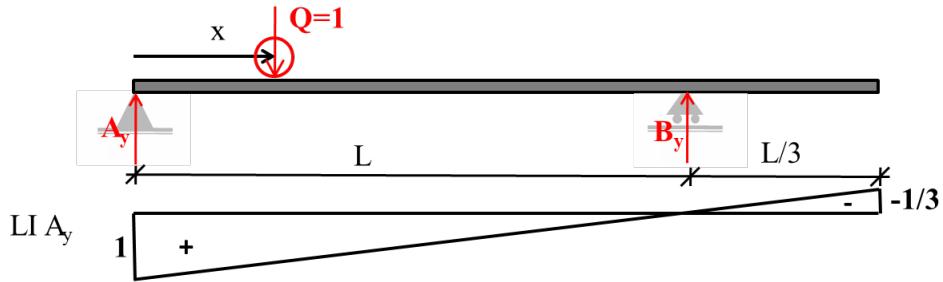
- Charges verticales vers le bas
- Les valeurs positives sont les valeurs en dessous de la ligne repère



Signe de la ligne d'influence

Recommandations :

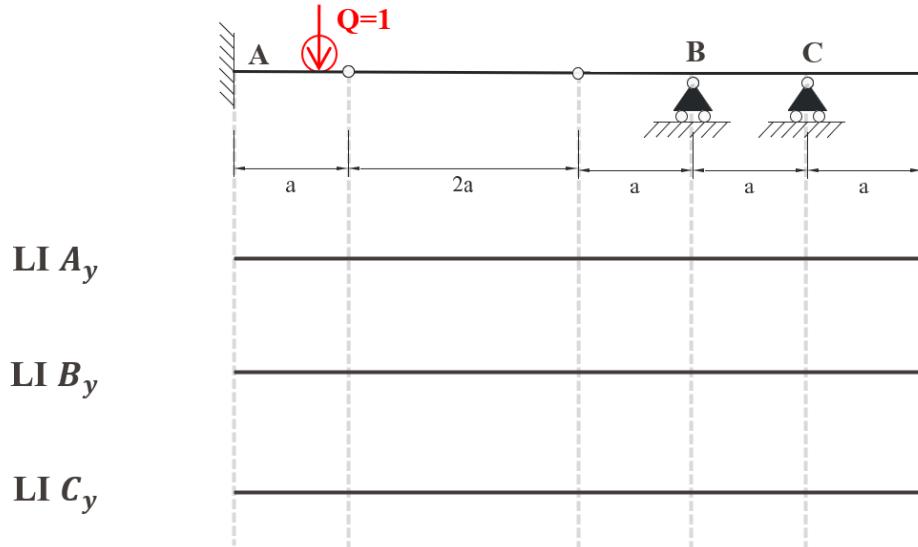
- Contrôler l'équilibre pour une position de la force unitaire
- Contrôler le signe de l'effet statique recherché (ici A_y) pour cette position
- Les autres signes suivent automatiquement





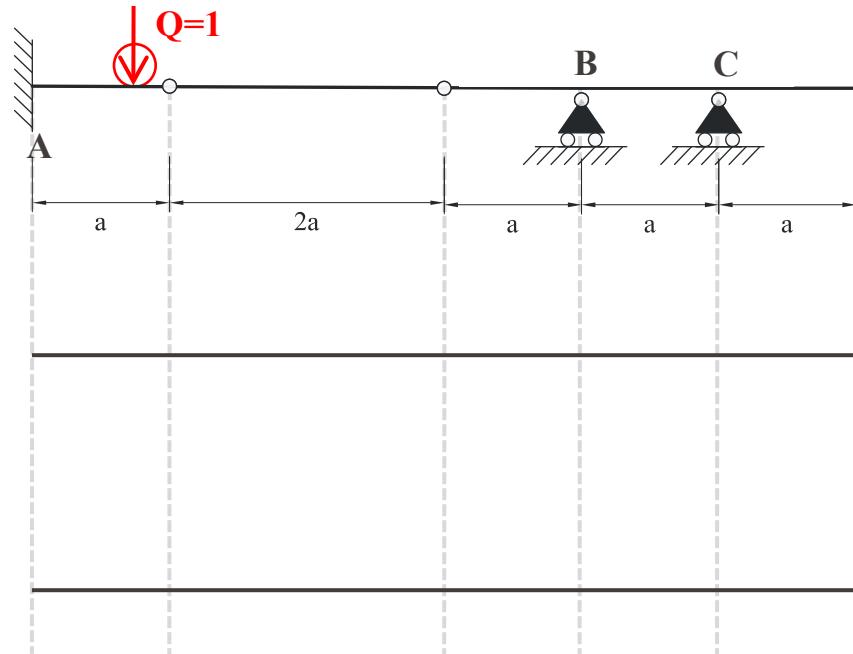
A votre tour!

Trouver l'allure (sans calculs) des lignes d'influence des réactions d'appuis pour une charge mobile $Q = 1$



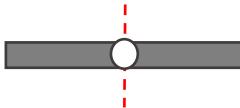
Exemple

Trouver l'allure de la ligne d'influence du moment d'encastrement M_A pour une charge mobile $Q = 1$

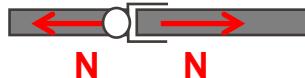
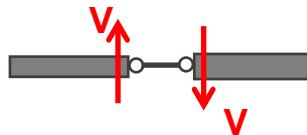


Ligne d'influence d'une force de liaison

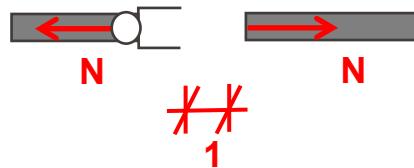
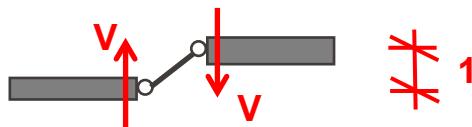
Coupure relative à l'axe suivant



Coupure simple pour extérioriser V et N dans l'articulation



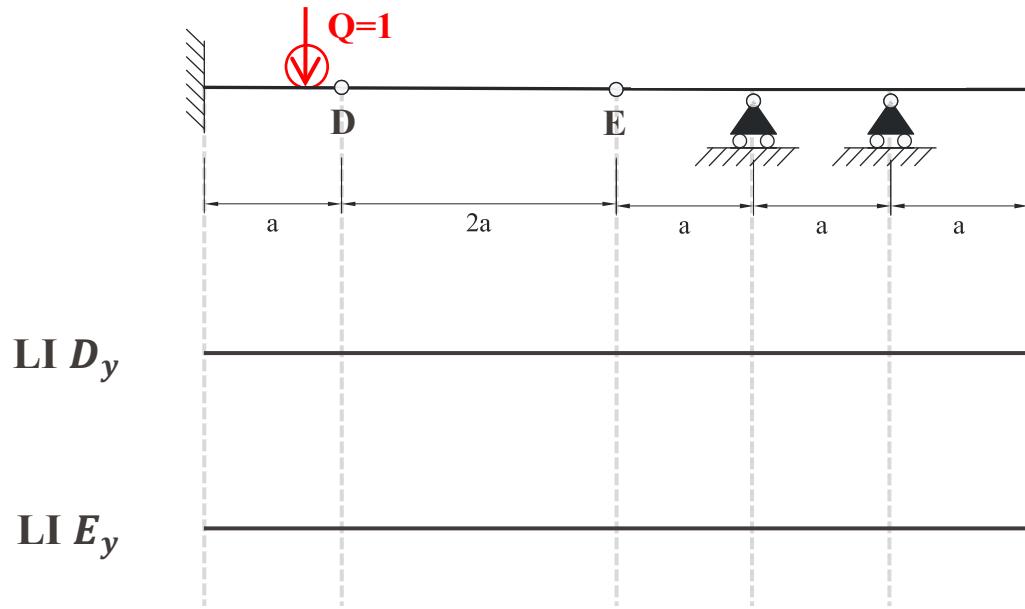
Déplacements virtuels dans le sens opposé des effets statiques extériorisés





A votre tour!

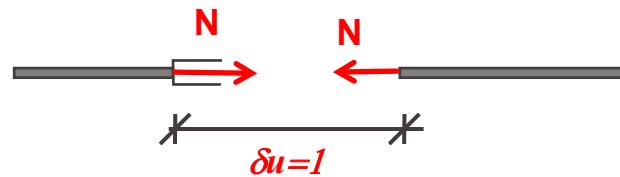
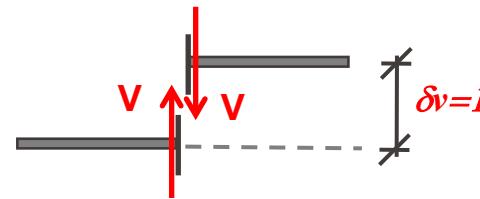
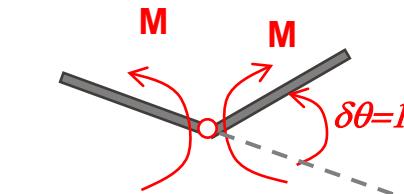
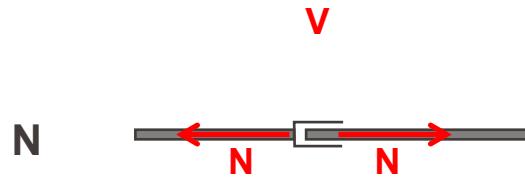
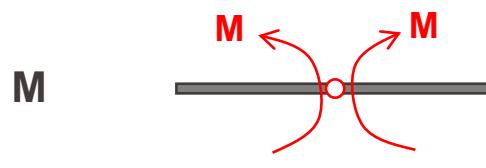
Tracer les lignes d'influence des forces de liaison verticales en D et E pour une charge mobile $Q = 1$



Ligne d'influence des efforts intérieurs



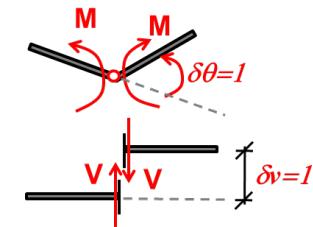
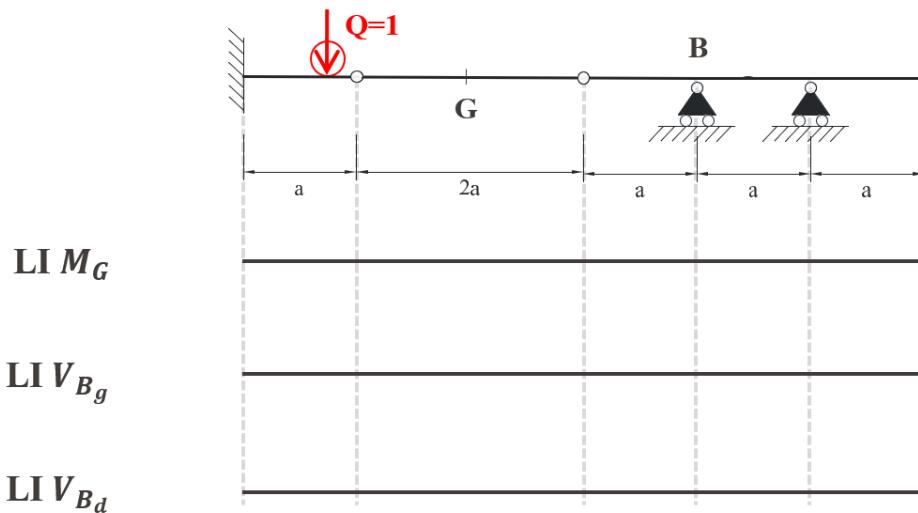
Avec une déformation virtuelle unitaire dans le sens opposé à l'effort intérieur extériorisé



Exemple

Tracer les lignes d'influence des efforts intérieurs suivants pour une charge mobile $Q = 1 : M_G, V_{B_g}$ et V_{B_d}

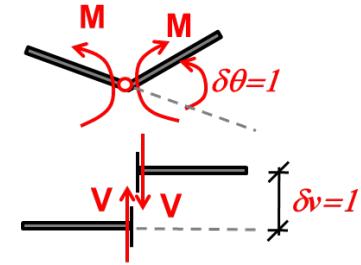
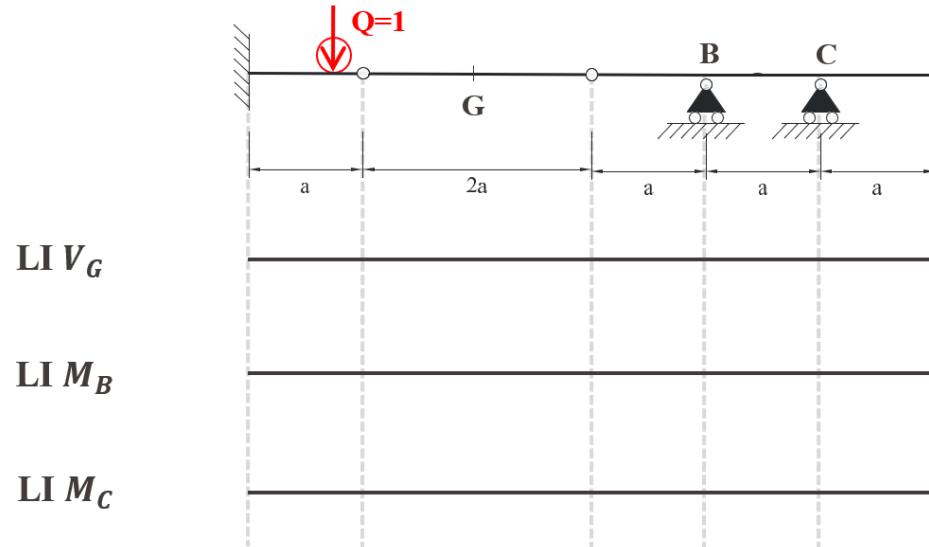
- B_g et B_d sont les sections juste à gauche et juste à droite de l'appui B





A votre tour!

Tracer les lignes d'influence des efforts intérieurs suivants pour une charge mobile $Q = 1 : V_G, M_B$ et M_C

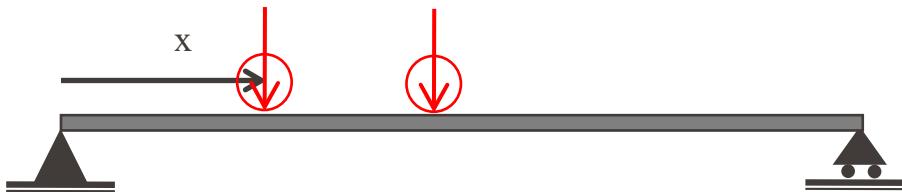


1. Définition d'une « ligne d'influence »
2. Calcul des lignes d'influence par l'équilibre
3. **Calcul des lignes d'influence par le Tdv**
 - Principe et application aux réactions d'appuis
 - Lignes d'influence des forces de liaison
 - Lignes d'influence des efforts intérieurs
 - **Trains de charges**

Train de charges

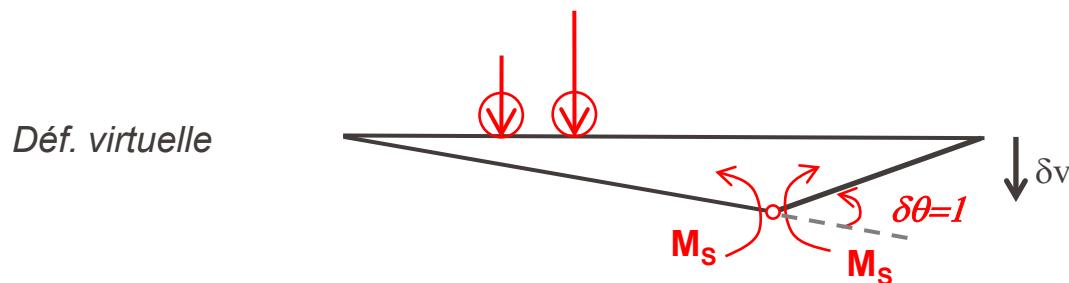
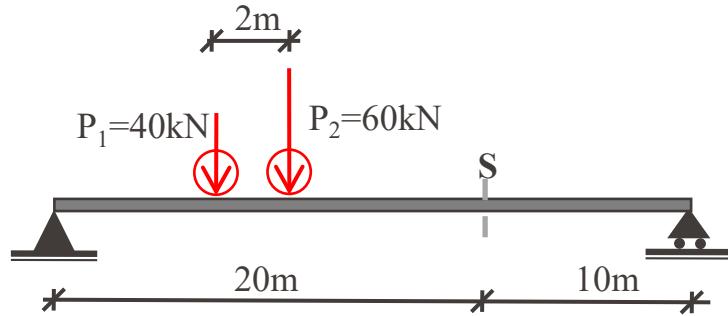
Un groupe mobile de charges dont les positions relatives et les intensités sont fixes.

Intéressant : trouver la position d'un train de charges qui maximise l'effort statique



Exemple

Trouver la position du train de charges qui maximise le moment en S

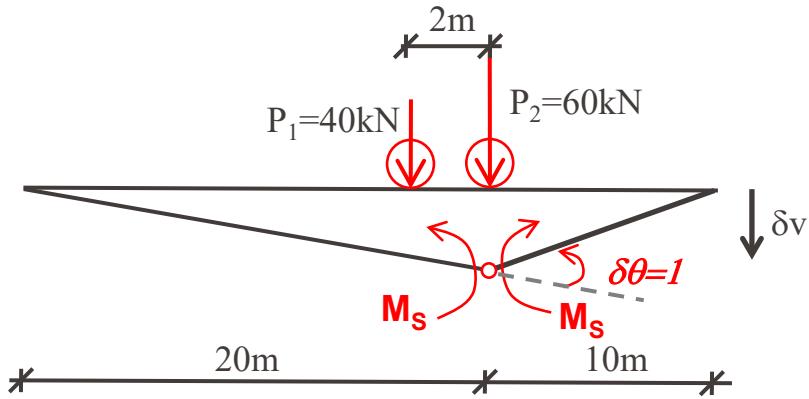


$$\delta W = -M_s \cdot I + P_1 \cdot \delta v_{P1} + P_2 \cdot \delta v_{P2} = 0$$

Il faut trouver la position des charges P_1 et P_2 qui maximise leur travail virtuel

Exemple (suite)

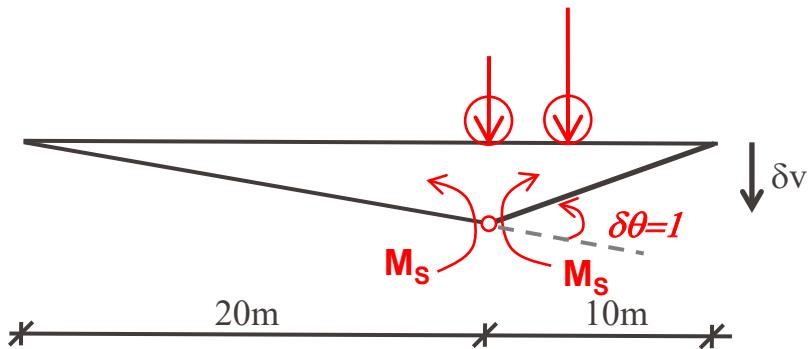
- Possibilité 1



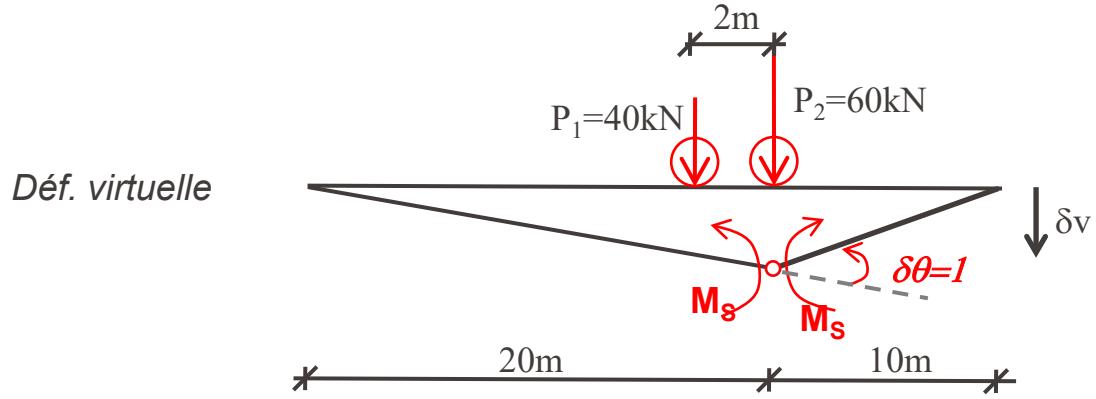
Indication :

pour un train de charges formé de charges concentrées, le **maximum** d'un effet se produit toujours **lorsqu'une charge se trouve au droit d'un sommet de la déformée virtuelle**.

- Possibilité 2



Exemple (suite)



$$\delta W = -M_s \cdot I + P_1 \cdot \delta v_{P1} + P_2 \cdot \delta v_{P2} = 0$$

Moment maximal en S :

$$M_s = P_1 \cdot \delta v_{P1} + P_2 \cdot \delta v_{P2} =$$

Chapitres à étudier dans le TGC 1

- **Chapitre 12:** Lignes d'influence 12.1 à 12.3 et 12.5

Références des illustrations par ordre d'apparition

- [1] [Rainbow Bridge](#) © Ad Meskens, [CC BY-SA 3.0](#)
- [2] Icone exercices: [Figure](#) © Dukesy68, [CC BY-SA 4.0](#) ; [Pont du Golden Gate](#), [CC0 1.0](#)

- The presentations are published under license CC BY-NC 4.0
- If reusing the entire presentation or parts of it, please cite as «Beyer K, Statique I, Lecture notes, School of Architecture, Civil and Environmental Engineering, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Switzerland, 2023.»