

■ Autrice des dias (2023)
Prof. Katrin Beyer

■ Earthquake
Engineering and
Structural Dynamics
Laboratory

■ Prof. E. Denarié (2025)

■ Laboratoire de
comportement et
conception des
structures en béton

Poutres à plan moyen, arcs : Exercices additionnels

Statique

Prof. E. Denarié

A la fin de ce cours, vous saurez :

- Identifier rapidement les incohérences dans les diagrammes NVM et dans le dessin de la déformée
- Utiliser le théorème des 2 moments ou « principe de superposition »
- Comment calculer les efforts NVM sur des poutres cintrées
- Comment calculer les efforts NVM et comment dessiner la déformée de portiques articulés

1. Principe de superposition
2. Poutres courbes – équations différentielles d'équilibre
3. Portiques à trois articulations

- Mercredi 7.5.2025, Début: ~13:15, Durée : 60 min
- Obligatoire, compte pour 25% de la note finale

- Contenu :
 - **Tous les chapitres des semaines 1 à 9**

- Permis :
 - “formulaire” : deux pages manuscrites (= une feuille recto-verso)

- Questions type

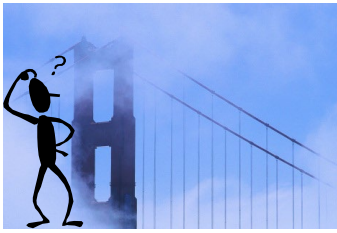
Donné : Système statique avec des charges

- Montrer que la structure est isostatique
- Calculer les réactions d'appuis
- Tracer les diagrammes des efforts intérieurs NVM et calculer toutes leurs valeurs caractéristiques
- Tracer l'allure de la déformée
- Calculer quelques grandeurs statiques par le TdV
- Tracer les diagrammes NVM sans faire de calculs

- Egalement possible

Donné : divers systèmes statiques avec des charges et divers diagrammes de M et V

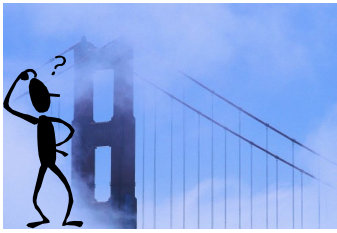
- Quels diagrammes M/V correspondent aux systèmes statiques donnés ?



A votre tour!

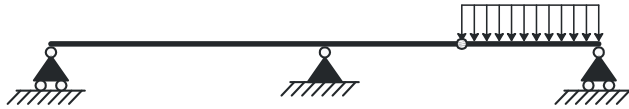
Trouver 7 erreurs dans les diagrammes NVM et la déformée





A votre tour!

Trouver 3 erreurs dans les diagrammes NVM et la déformée



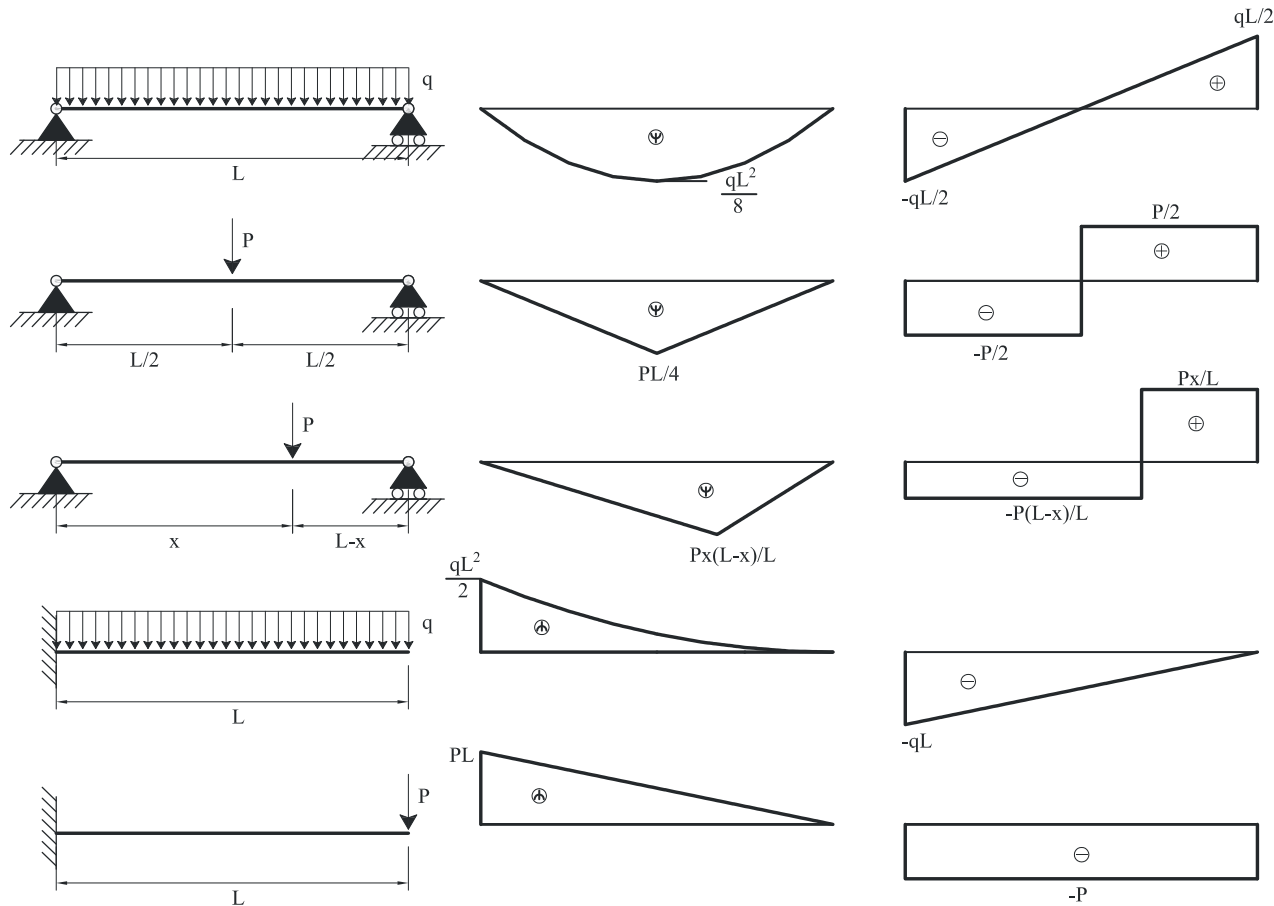
Déformée



3 méthodes pour déterminer les diagrammes NVM

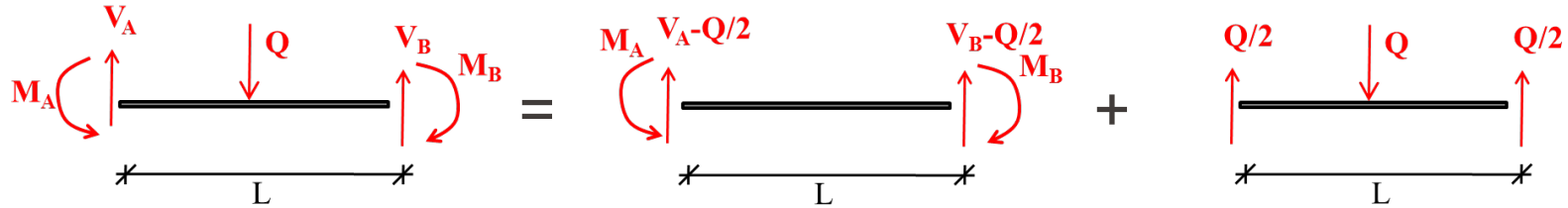
1. Règles pour la construction rapide des diagrammes NVM (poutres droites avec des charges concentrées ou uniformément distribuées)
 2. Equilibre de fragments
 3. Equations différentielles d'équilibre (seulement pour poutres droites)
- Les méthodes 2 et 3 donnent les équations pour $N(x)$, $V(x)$, $M(x)$
 - x est la coordonnée le long de l'axe de la poutre
 - La méthode 1 est la méthode la plus rapide pour les poutres droites avec des charges concentrées ou uniformément réparties
 - Calculer seulement les valeurs caractéristiques
 - Valeurs aux extrémités de poutre
 - Valeurs maximales / minimales
 - Valeurs où des charges concentrées sont appliquées
 - Il faut connaître les trois méthodes.

Cas à connaître par cœur



Théorème des 2 moments (superposition)

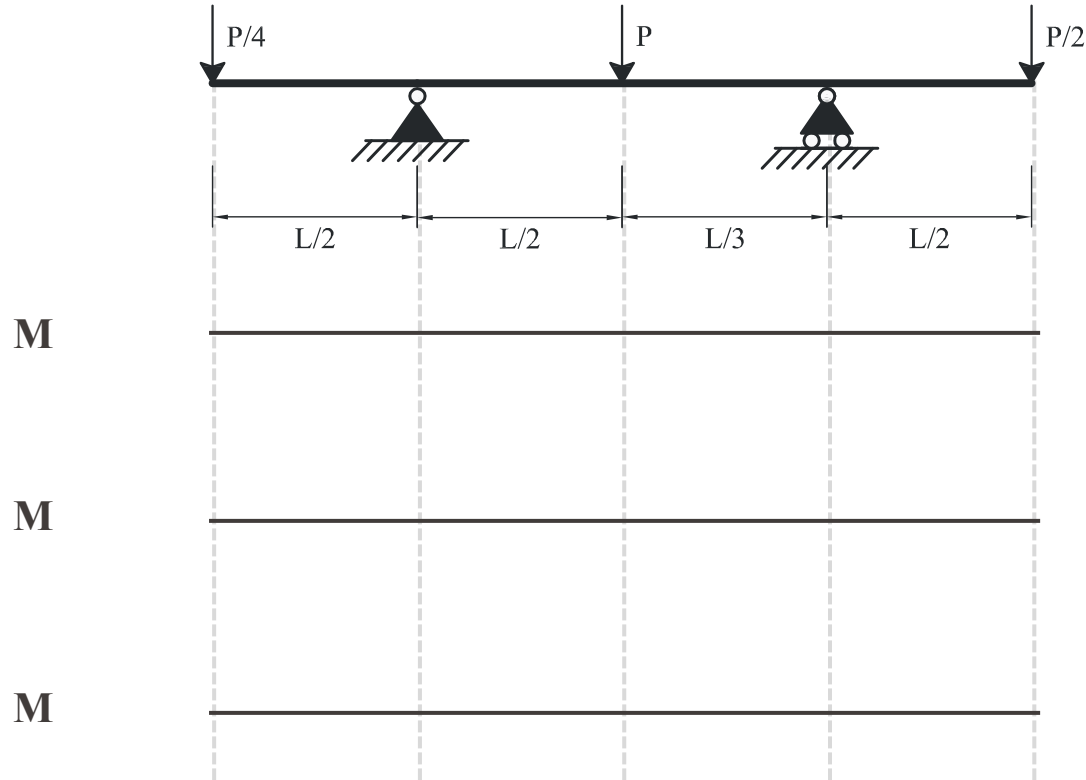
Fragment en équilibre (efforts intérieurs sont montrés dans leur sens actuels, pas dans le sens positif):



M

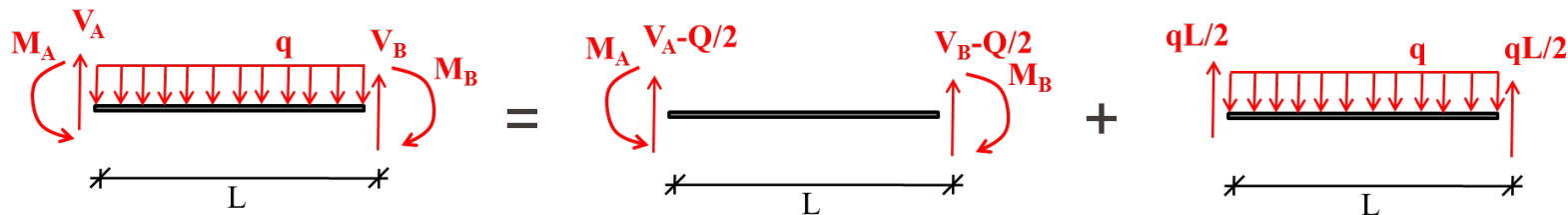


Exemple 1 : Application du théorème des 2 moments



Théorème des 2 moments (superposition)

Fragment en équilibre (efforts intérieurs sont montrés dans leur sens actuels, pas dans le sens positif):

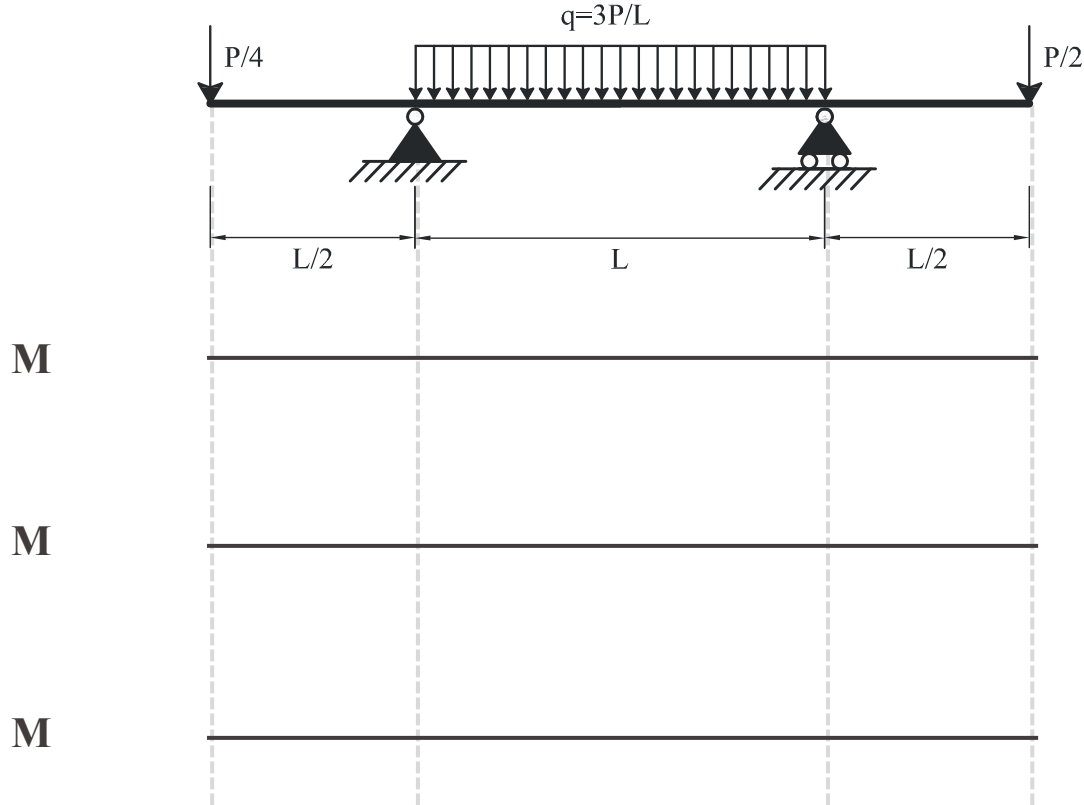


M

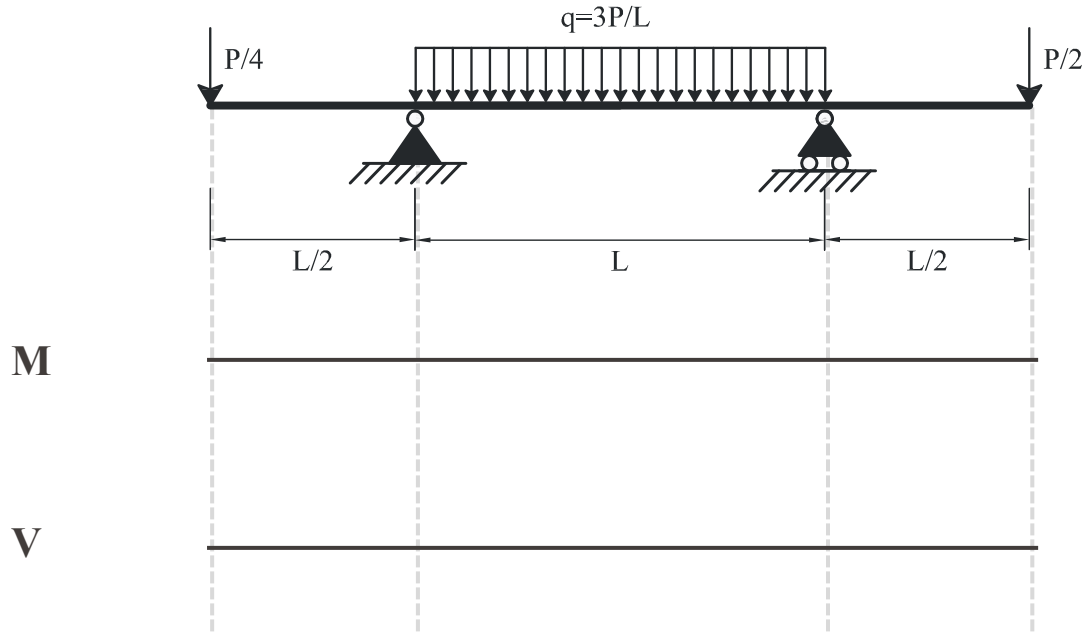
=

+

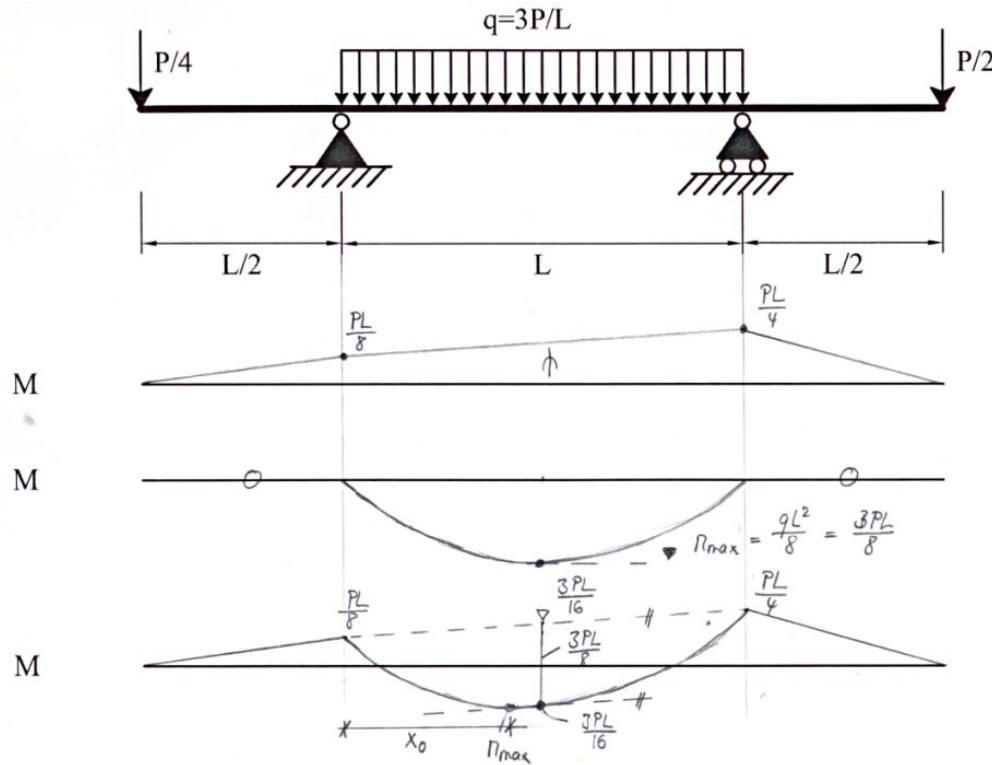
Exemple 2 : Application du théorème des 2 moments



Exemple 2 (suite)



Exemple d'application



$$M_{max} = 0.19 PL$$

$$x_0 = \frac{11}{24} L \quad (M_{max} \text{ ou } V=0)$$

Exemple d'application (suite)

Diagram of a beam of length L with a uniformly distributed load $q = 3P/L$. The beam is supported by a pin at A (left) and a roller at B (right). The distance from A to the start of the distributed load is $L/2$, and the distance from the end of the distributed load to B is $L/2$. The total length of the beam is L . The load q is applied over a length of L . The reaction forces are A_y and B_y .

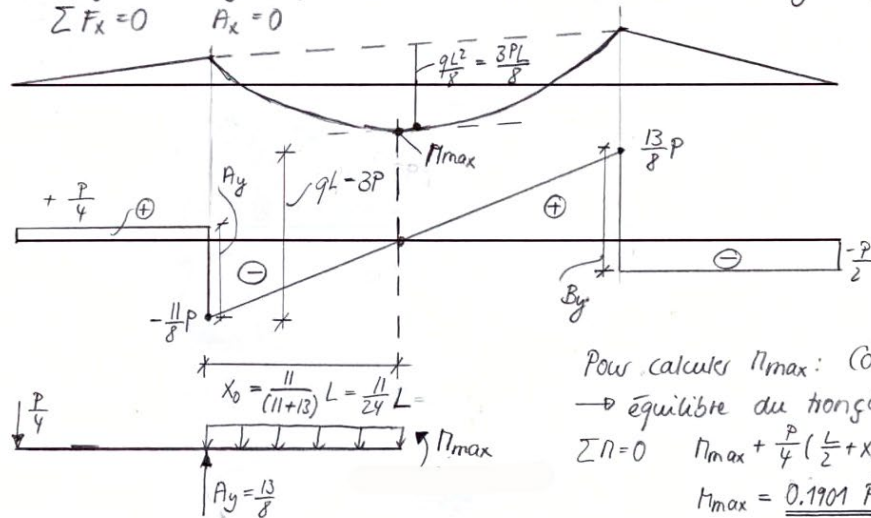
Forces de réaction:

$$\begin{aligned} \sum \mathcal{M}_A = 0 & \quad \frac{P}{4} \cdot \frac{L}{2} - q \cdot L \cdot \frac{L}{2} - \frac{P}{2} \cdot \frac{3L}{2} + B_y \cdot L = 0 & B_y = \frac{17}{8} P \\ \sum F_y = 0 & \quad A_y + B_y - \frac{P}{4} - qL - \frac{P}{2} = 0 & A_y = \frac{13}{8} P \\ \sum F_x = 0 & \quad A_x = 0 \end{aligned}$$

M

V

Calculer \mathcal{M}_{\max} :



Pour calculer \mathcal{M}_{\max} : Couper où $V = 0$

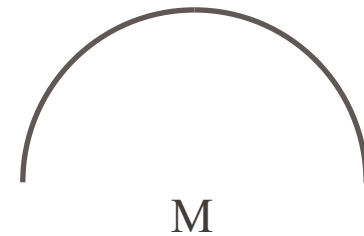
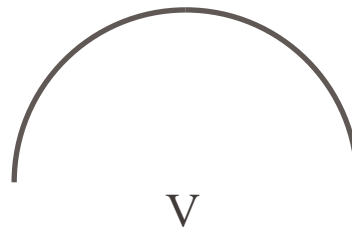
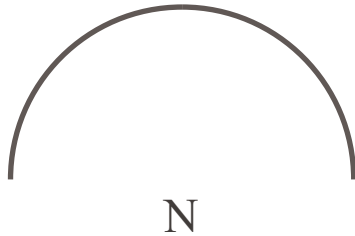
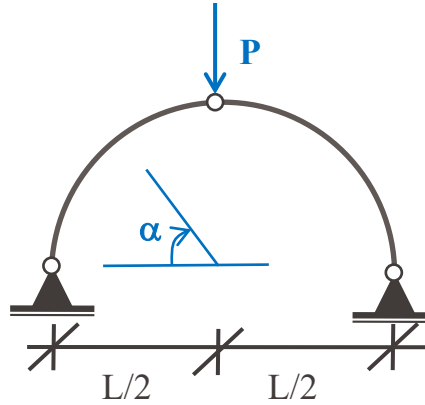
→ équilibre du tronçon

$$\sum \mathcal{M} = 0 \quad \mathcal{M}_{\max} + \frac{P}{4} \left(\frac{L}{2} + x_0 \right) - A_y \cdot x_0 + q \cdot \frac{x_0^2}{2} = 0$$

$$\mathcal{M}_{\max} = \underline{\underline{0.1901 PL}}$$

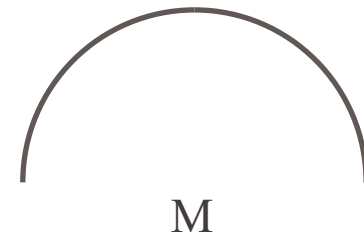
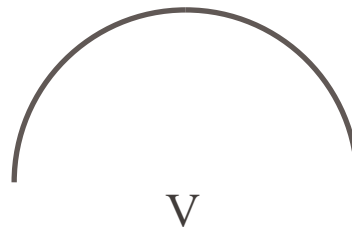
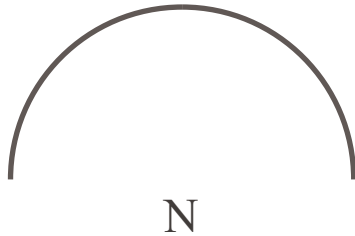
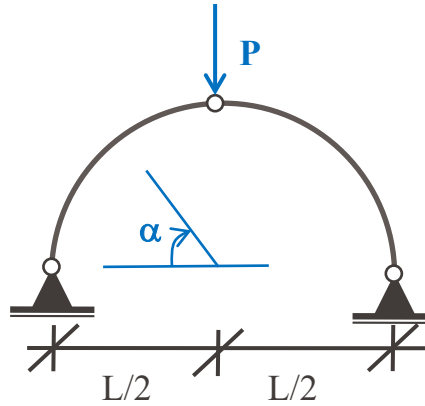
Exemple 3 : arc à trois articulations en forme de demi-cercle

Calculer les efforts NVM en fonction de α et dessiner l'allure des diagrammes NVM

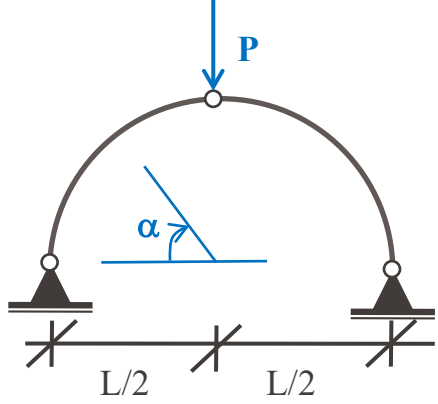


Exemple 3 : arc à trois articulations en forme de demi-cercle

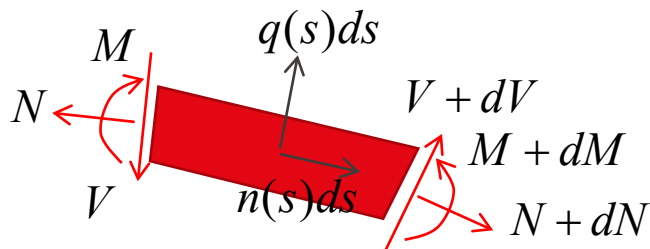
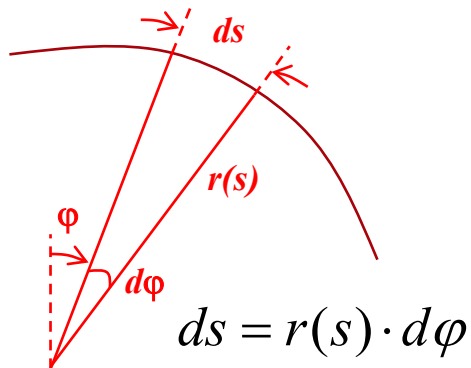
Calculer les efforts NVM en fonction de α et dessiner l'allure des diagrammes NVM



Exemple 3 (suite)



Poutres courbes – équations différentielles d'équilibre

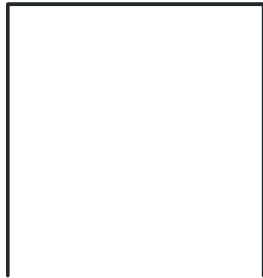
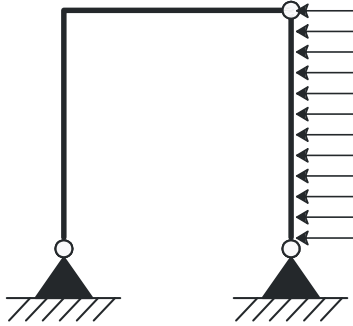


$$\frac{dN}{ds} + \frac{V}{r} + n = 0$$

$$\frac{dV}{ds} - \frac{N}{r} + q = 0$$

$$\frac{dM}{ds} + V = 0$$

Exemple 4 : dessiner l'allure des diagrammes MV et de la déformée



M

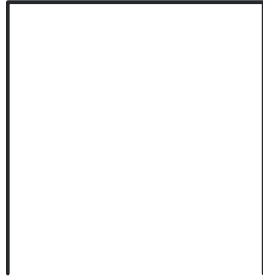
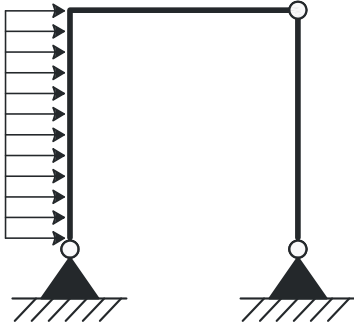


V



Déformée

Exemple 5 : dessiner l'allure des diagrammes MV et de la déformée



M



V



Déformée

Chapitres à étudier dans le TGC 1

- **Chapitre 9** : Poutres à plan moyen 9.5, 9.6, 9.2.2

Références des illustrations par ordre d'apparition

- [1] [Rainbow Bridge](#) © Ad Meskens, [CC BY-SA 3.0](#)
- [2] Icône exercices: [Figure](#) © Dukesy68, [CC BY-SA 4.0](#) ; [Pont du Golden Gate](#), [CC0 1.0](#)

- The presentations are published under license CC BY-NC 4.0
- If reusing the entire presentation or parts of it, please cite as «Beyer K, Statique I, Lecture notes, School of Architecture, Civil and Environmental Engineering, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Switzerland, 2023.»