Série 8

Dans cette série, on utilise les résultats du cours sur le gaz d'électrons pour étudier un capteur de pH à base de graphène et mettre en évidence sa *capacité quantique*.

Le graphène est un matériau bidimensionnel, constitué d'atomes de carbone arrangés dans un réseau en nid d'abeille. Les niveaux d'énergie des électrons libres d'un flocon de graphène de taille $L \times L$ sont donnés par $\epsilon_{\mathbf{k}} = \hbar\gamma|\mathbf{k}|$, où $\gamma \approx 10^6$ m $\cdot$ s^{-1} et $k_i = n_i\pi/L, n_i \in \mathbb{N}$. Ils ont chacun une dégénérescence $g = 4$.

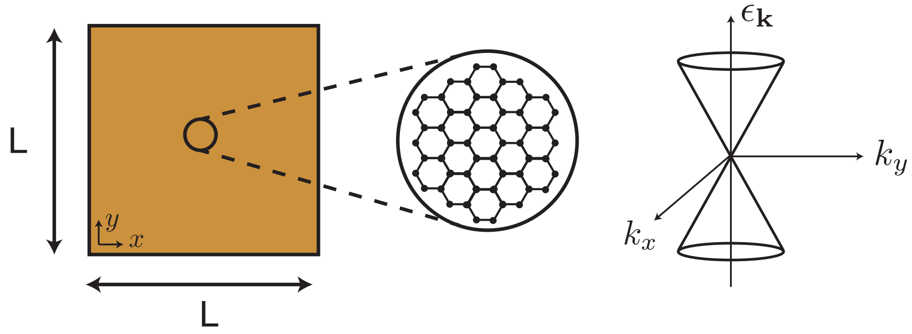

FIGURE 1

1. Les électrons du graphène sont maintenus à un potentiel chimique μ. Exprimer leur densité surfacique $n = N/L^2$ comme une intégrale sur $\mathbf{k}$, en faisant intervenir la distribution de Fermi-Dirac.
2. Montrer que
$$n = \int_0^\infty \mathrm{d}\epsilon \, \frac{\rho(\epsilon)}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1} \tag{1}$$
et exprimer la densité d'états $\rho(\epsilon)$.

Pour faire agir le graphène comme un capteur de pH, on le dépose sur un substrat isolant de permittivité diélectrique κ et d'épaisseur d. De l'autre côté du substrat, on place une électrode métallique. Lorsque le graphène est mis en contact avec une solution d'intérêt, l'adsorption d'ions H^+ ou OH^- à sa surface modifie la densité électronique. On peut alors relier le pH de la solution à la tension V_g aux bornes du condensateur formé par le graphène et l'électrode métallique.

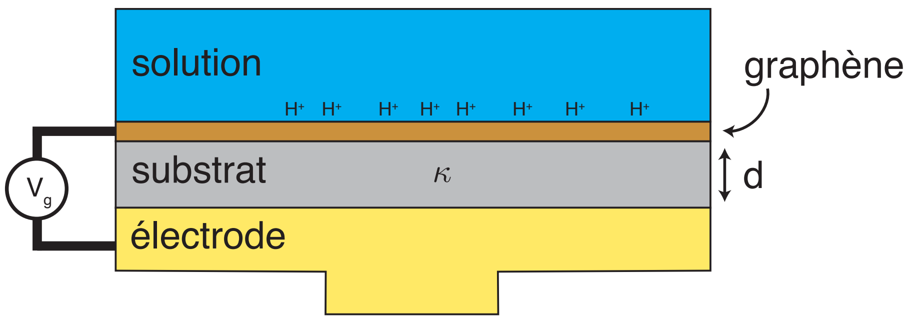

FIGURE 2

L'électrode métallique joue le rôle de réservoir d'électrons pour le graphène, qui lui impose un potentiel chimique $\mu = eV_g - \frac{e^2 d}{\kappa} n$. Le deuxième terme vient de l'interaction électrostatique entre le graphène et l'électrode.

1. Dans la limite de basse température ($\beta \to \infty$), exprimer V_g en fonction de n.
2. Calculer la sensibilité du capteur $\mathrm{d}V_g/\mathrm{d}n$. Dans quelles conditions le capteur est-il le plus sensible ?
3. On se place maintenant à une température quelconque. Exprimer $\mathrm{d}V_g/\mathrm{d}n$ en $\mu = 0$ et $n = 0$ en fonction de l'intégrale

$$I = \int_0^\infty \mathrm{d}u \, \frac{ue^u}{(1+e^u)^2} \tag{2}$$

   que l'on ne cherchera pas à calculer.
4. Montrer que quand T est proche de 0, $\mathrm{d}V_g/\mathrm{d}n \propto 1/T$.
5. Montrer que le résultat de la question 1 peut s'écrire

$$V_g = \left(\frac{1}{C_{\mathrm{cl}}} + \frac{1}{C_{\mathrm{q}}} \right) Q, \tag{3}$$

   où $Q = Ne$ est la charge sur le graphène. Pourquoi parle-t-on de capacité quantique ?