Corrigé 2

Cette série propose de manipuler des outils mathématiques récurrents dans les calculs de mécanique statistique : intégrales et développements limités. Le premier exercice est purement mathématique ; le second propose de calculer les premières corrections quantiques à la loi des gaz parfaits – calcul qui sera posé plus tard dans le cours.

1 Rappels mathématiques

1. Evaluer l'intégrale gaussienne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax^2} \mathrm{d}x$$

où $a \in \mathbb{R}_+^*$. Une méthode possible consiste à considérer le carré de l'intégrale, puis à passer en coordonnées polaires.

Solution :

Tel que conseillé dans la donnée, on prend le carré de l'intégrale gaussienne. On passe ensuite des coordonnées cartésiennes à polaires en utilisant les définitions $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$ *pour* $r \in \mathbb{R}_+$ *et* $\phi \in [0, 2\pi[$. *L'élément différentiel se transforme selon* $\mathrm{d}x\mathrm{d}y \mapsto r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi$. *On utilise finalement la relation* $r^2 = x^2 + y^2$ *et l'absence de dépendance angulaire de l'intégrande pour obtenir le résultat :*

$$\begin{aligned}
\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax^2} \mathrm{d}x\right)^2 &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax^2} \mathrm{d}x\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ay^2} \mathrm{d}y\right) && (1)\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-a(x^2+y^2)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y && (2)\\
&= \int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{2\pi} \mathrm{e}^{-ar^2} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi && (3)\\
&= 2\pi \int_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{\mathrm{e}^{-ar^2}}{-2a}\right) \mathrm{d}r && (4)\\
&= 2\pi \left[\frac{\mathrm{e}^{-ar^2}}{-2a}\right]_0^{+\infty} && (5)\\
&= \frac{\pi}{a} && (6)
\end{aligned}$$

L'expression finale apparaît en prenant la racine de l'égalité :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax^2} \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad (7)$$

2. Evaluer l'intégrale paramétrique

$$\int_0^{+\infty} x^m \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x$$

avec $m \in \mathbb{N}$. Cette intégrale peut être calculée par parties, ou à l'aide de la technique de Feynman. Cette dernière méthode consiste à introduire un paramètre $\alpha = 1$ dans l'argument de l'exponentielle, pour exprimer l'intégrande en tant qu'une dérivée par rapport à α. On peut ensuite commuter l'intégrale et la dérivée, pour finalement remplacer α par 1 au terme du calcul.

Solution :

On évalue l'intégrale à l'aide de la technique de Feynman. L'introduction du paramètre α *produit l'intégrale*

$$I_m(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^m \mathrm{e}^{-\alpha x} \mathrm{d}x. \tag{8}$$

On cherche à calculer $I_m(\alpha = 1)$*. Si* $m = 1$*, on remarque que*

$$x\mathrm{e}^{-\alpha x} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\mathrm{e}^{-\alpha x}$$

Cette observation se généralise à l'ordre m *:*

$$x^m \mathrm{e}^{-\alpha x} = (-1)^m \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}\alpha^m}\mathrm{e}^{-\alpha x}$$

On insère cette identité, avant de commuter la dérivée et l'intégrale :

$$\begin{aligned}
I_m(\alpha) &= \int_0^{+\infty} (-1)^m \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}\alpha^m}\mathrm{e}^{-\alpha x}\mathrm{d}x && (9)\\
&= (-1)^m \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}\alpha^m}\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x}\mathrm{d}x\right) && (10)\\
&= (-1)^m \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}\alpha^m}\left[-\frac{\mathrm{e}^{-\alpha x}}{\alpha}\right]_0^{+\infty} && (11)\\
&= (-1)^m \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}\alpha^m}\left(\frac{1}{\alpha}\right) && (12)\\
&= (-1)^m \frac{(-1)^m m!}{\alpha^{m+1}} && (13)\\
&= \frac{m!}{\alpha^{m+1}} && (14)
\end{aligned}$$

Le produit $(-1)^m(-1)^m$ *vaut 1,* m *étant un entier.*
Ainsi,

$$I_m(\alpha = 1) = \int_0^{+\infty} x^m \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = m! \tag{15}$$

3. En déduire la valeur de

$$\int_0^{+\infty} x^m \mathrm{e}^{-\sigma x}\mathrm{d}x \qquad \text{pour} \qquad \sigma \in \mathbb{R}^{+*}$$

Solution :

On a le résultat en s'arrêtant à l'avant-dernière étape du calcul précédent, mais on peu aussi procéder par changement de variable $u = \sigma x$:

$$\int_0^{+\infty} x^m \mathrm{e}^{-\sigma x}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} (u/\sigma)^m \mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}(u/\sigma) \tag{16}$$

$$= \frac{1}{\sigma^{m+1}} \int_0^{+\infty} u^m \mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u = \frac{m!}{\sigma^{m+1}} \tag{17}$$

4. Calculer les développements limités à l'ordre 3, autour de 0, de

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \quad \text{et de} \quad g(x) = \frac{1}{1+e^x}.$$

$g(x)$ s'appelle la distribution de Fermi-Dirac.

Solution : On commence par $f(x)$, qui représente le somme d'une série géométrique en x pour $x \in]-1,1[$. Ainsi,

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \mathcal{O}(x^4) \tag{18}$$

On va utiliser cette expansion pour obtenir les suivantes.
Pour calculer le développement limité de l'exponentielle, on applique la formule de Taylor-Young :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R^{(n)}(k) \qquad \text{avec} \qquad R^{(n)} \sim \mathcal{O}(x-a)^{n+1} \tag{19}$$

Si $a = 0$ et $f(x) = \mathrm{e}^x$, $f^{(k)}(0) = 1\ \forall k > 0$. Ainsi, pour tout x,

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^4) \tag{20}$$

Le développement de $g(x)$, la distribution de Fermi-Dirac, s'obtient en combinant les expressions (18) et (20). Il en suit :

$$\frac{1}{1+\mathrm{e}^x} = \frac{1}{1+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}} = \frac{1}{1+1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\mathcal{O}(x^4)} \tag{21}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}+\mathcal{O}(x^4))} \tag{22}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left[-\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}+\mathcal{O}(x^4)\right)\right]^k \tag{23}$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12}\right) + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12}\right)^2 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12}\right)^3 + \mathcal{O}(x^4)\right] \tag{24}$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12}\right) + \left(\frac{x^2}{4} + 2\cdot\frac{x^3}{8}\right) - \left(\frac{x^3}{8}\right) + \mathcal{O}(x^4)\right] \tag{25}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^3}{48} + \mathcal{O}(x^4) \tag{26}$$

5. Proposer un développement asymptotique autour de 0^+ de

$$h(x) = \frac{1}{e^x - 1}$$

$h(x)$ s'appelle la distribution de Bose-Einstein.

Solution :

On développe l'exponentielle comme décrit dans l'équation (20), pour mettre ensuite x en évidence dans le dénominateur et appliquer la série géométrique. Ainsi,

$$\frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^4) - 1} \tag{27}$$

$$= \frac{1}{x}\frac{1}{\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \mathcal{O}(x^3)\right)} \tag{28}$$

$$= \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{\infty}\left[-\left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \mathcal{O}(x^3)\right)\right]^k \tag{29}$$

$$= \frac{1}{x}\left[1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}\right) + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}\right)^2 + \mathcal{O}(x^3)\right] \tag{30}$$

$$= \frac{1}{x}\left[1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}\right) + \frac{x^2}{4} + \mathcal{O}(x^3)\right] \tag{31}$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{2} + \frac{x}{12} + \mathcal{O}(x^2) \tag{32}$$

2 Premières corrections quantiques pour un gaz électronique

On montrera dans le cours que la pression d'un gaz d'électrons dans un volume $V = L^3$ s'exprime comme

$$P = \frac{2}{\beta V} \ln \left(\prod_{\vec{k}} (1 + \exp[\beta(\mu - E(\vec{k}))]) \right)$$

où $\beta = 1/k_\mathrm{B}T$, μ est le potentiel chimique du gaz et les $E(\vec{k})$ sont les niveaux d'énergie d'une particule dans une boîte : $E(\vec{k}) = \hbar^2 k^2/2m$, avec $k = ||\vec{k}|| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$ et $k_i = n_i\pi/L$ pour $n_i \in \mathbb{N}$ et $i = x, y, z$.

Ici, on propose de montrer que cette expression se réduit à la loi des gaz parfaits dans la limite classique $z = e^{\beta\mu} \to 0$, puis de calculer la première "correction quantique" à cette loi. Une autre façon d'exprimer la limite classique est $n\Lambda_T^3 \to 0$, où $n = N/V$ est la densité du gaz et $\Lambda_T = h/\sqrt{2\pi m k_\mathrm{B} T}$ est appelée la longueur d'onde de de Broglie thermique de l'électron. On cherchera en fait la correction à la loi des gaz parfaits obtenue à l'ordre le plus bas non nul en $n\Lambda_T^3$.

1. Montrer que dans la limite thermodynamique $L \to \infty$, le produit sur $\vec{k}$ peut être approché par une intégrale, et exprimer cette intégrale.

   Solution :

   Les valeurs prises par un vecteur d'onde $\vec{k}$, discrètes pour un gaz dans un volume fini, deviennent continues alors que le volume croît vers l'infini, puisque $k_i = n_i\pi/L$. La transition s'opère formellement à l'aide de la définition de l'intégrale de Riemann : si $V \to \infty$, alors $\sum_{\vec{k}} \to V \int \mathrm{d}^3\vec{k}/(2\pi)^3$. On illustre ce passage d'abord pour la dimension x, en considérant uniquement l'argument de l'exponentielle qui dépend du vecteur d'onde. On utilise la définition du vecteur d'onde pour passer de la somme sur k_x à la somme sur les entiers n_x. Dans la limite thermodynamique $L \to \infty$, la taille de chaque subdivision tend vers 0 et on peut convertir la somme en une intégrale :

$$\sum_{k_x} \mathrm{e}^{-\beta\hbar^2 k_x^2/2m} = \sum_{n_x=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\beta\hbar^2\pi^2 n_x^2/2mL^2} = \int_0^\infty \mathrm{d}n_x \, \mathrm{e}^{-\beta\hbar^2\pi^2 n_x^2/2mL^2} \tag{33}$$

   On achève le calcul en remplaçant n_x par k_x, ce qui fait apparaître un préfacteur, puisque $\mathrm{d}n_x = (L/\pi)\mathrm{d}k_x$:

$$\int_0^\infty \mathrm{d}n_x \, \mathrm{e}^{-\beta\hbar^2\pi^2 n_x^2/2mL^2} = \frac{L}{\pi} \int_0^\infty \mathrm{d}k_x \, \mathrm{e}^{-\beta\hbar^2 k_x^2/2m} = \frac{L}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}k_x \, \mathrm{e}^{-\beta\hbar^2 k_x^2/2m} \tag{34}$$

   où on a finalement symmétrisé le domaine d'intégration. Cette opération n'implique que de diviser l'intégrale résultante par deux, puisque seul le carré de k_x apparaît dans l'expression. La généralisation à trois dimensions est immédiate, en prenant le cube de l'égalité. Les trois dimensions sont en effet indépendantes :

$$\sum_{\vec{k}} \mathrm{e}^{-\frac{\beta\hbar^2 k^2}{2m}} = \left(\sum_{k_x} \mathrm{e}^{-\frac{\beta\hbar^2 k_x^2}{2m}} \right)^3 = \left(\frac{L}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}k_x \, \mathrm{e}^{-\frac{\beta\hbar^2 k_x^2}{2m}} \right)^3 = \frac{V}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}^3\vec{k} \, \mathrm{e}^{-\frac{\beta\hbar^2 k^2}{2m}} \tag{35}$$

   Pour faire apparaître la somme dans l'expression de la pression, on commence par inverser le produit et le logarithme, après avoir substitué l'énergie. On remplace ensuite *la somme par l'intégrale :*

$$P = \frac{2}{\beta V} \ln\left(\prod_{\vec{k}}\left(1+\exp\left[\beta\left(\mu - \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\right)\right]\right)\right) \tag{36}$$

$$= \frac{2}{\beta V} \sum_{\vec{k}} \ln\left(1+\exp\left[\beta\left(\mu - \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\right)\right]\right) \tag{37}$$

$$= \frac{2}{\beta} \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \ln\left(1+\exp\left[\beta\left(\mu - \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\right)\right]\right) \tag{38}$$

2. Grâce à un changement de variable approprié, montrer que

$$P = \frac{1}{\beta}\frac{4}{\sqrt{\pi}\Lambda_T^3}\int_0^{+\infty} \mathrm{d}x\, x^{1/2} \ln(1+ze^{-x}).$$

Solution :

On commence par substituer la fugacité z. La pression s'écrit alors

$$P = \frac{2}{\beta} \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \ln\left(1+z\exp\left[-\frac{\beta\hbar^2 k^2}{2m}\right]\right) \tag{39}$$

Le changement de variable le plus évident consiste à remplacer l'argument de l'exponentielle par la nouvelle variable x, sans y intégrer le signe moins, pour que x et k aient un comportement similaire. Ainsi, $x = \beta\hbar^2 k^2/2m$, et k s'exprime en fonction de x comme

$$k = \frac{\sqrt{2mk_\mathrm{B}T}}{\hbar} x^{1/2} = \frac{2\pi^{1/2}}{\Lambda_T} x^{1/2} \tag{40}$$

où on a remplacé la température inverse par $k_\mathrm{B}T$, pour exprimer k en termes de Λ_T. On obtient la variation infinitésimale $\mathrm{d}k$ en dérivant l'équation précédente,

$$\mathrm{d}k = \mathrm{d}\left(\frac{\pi^{1/2}}{\Lambda_T}x^{1/2}\right) = \frac{\pi^{1/2}}{\Lambda_T}x^{-1/2}\mathrm{d}x \tag{41}$$

Il ne reste plus qu'à passer en coordonnées sphériques, en notant que l'intégrande ne dépend que de la norme k :

$$\int \mathrm{d}^3k = \int_0^\infty \mathrm{d}k\, 4\pi k^2, \tag{42}$$

et

$$\mathrm{d}^3\vec{k} = 4\pi k^2 \mathrm{d}k = 4\pi\left(\frac{2\pi^{1/2}}{\Lambda_T}x^{1/2}\right)^2\left(\frac{\pi^{1/2}}{\Lambda_T}x^{-1/2}\mathrm{d}x\right) = \frac{16\pi^{5/2}}{\Lambda_T^3}x^{1/2}\mathrm{d}x \tag{43}$$

Le facteur 4π provient de l'intégration de l'élément sphérique infinitésimal $k^2\sin(\theta)$ sur les deux angles propres aux coordonées sphériques. On insère ce changement de variables dans l'expression de la pression :

$$P = \frac{2}{\beta}\int_0^\infty \frac{16\pi^{5/2}}{(2\pi)^3\Lambda_T^3}x^{1/2}\mathrm{d}x \ln(1+\mathrm{z}\mathrm{e}^{-x}) \tag{44}$$

$$= \frac{1}{\beta}\frac{4}{\sqrt{\pi}\Lambda_T^3}\int_0^{+\infty} \mathrm{d}x\, x^{1/2}\ln(1+ze^{-x}) \tag{45}$$

3. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$P(z) = \frac{2}{\beta\Lambda_T^3} f_{5/2}(z) \qquad \text{où} \qquad f_m(z) = \frac{1}{(m-1)!}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x\, x^{m-1}}{z^{-1}\mathrm{e}^x + 1}$$

Indice : $(3/2)! = (3/2)\sqrt{\pi}/2$.
Par une procédure similaire, on trouve pour la densité du gaz

$$n(z) = \frac{2}{\Lambda_T^3} f_{3/2}(z)$$

Solution :

On utilise l'intégration par parties pour remplacer le logarithme par la fonction inverse :

$$\begin{aligned}
P(z) &= \frac{4}{\beta\Lambda_T^3\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \mathrm{d}x\, x^{1/2}\ln(1+z\mathrm{e}^{-x}) && (46)\\
&= \frac{4}{\beta\Lambda_T^3\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \mathrm{d}x\, \left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)'\ln(1+z\mathrm{e}^{-x}) && (47)\\
&= \frac{4}{\beta\Lambda_T^3\sqrt{\pi}}\left[\frac{2}{3}x^{3/2}\ln(1+z\mathrm{e}^{-x})\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \mathrm{d}x\,\frac{2}{3}x^{3/2}\left(\frac{-z\mathrm{e}^{-x}}{1+z\mathrm{e}^{-x}}\right)\right] && (48)\\
&= \frac{4}{\beta\Lambda_T^3\sqrt{\pi}}\left[0 - \int_0^\infty \mathrm{d}x\,\frac{2}{3}x^{3/2}\left(\frac{-z\mathrm{e}^{-x}}{1+z\mathrm{e}^{-x}}\right)\right] && (49)\\
&= \frac{2}{\beta\Lambda_T^3}\frac{4}{3\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x\, x^{3/2}}{z^{-1}\mathrm{e}^x+1} && (50)\\
&= \frac{2}{\beta\Lambda_T^3}\frac{1}{(3/2)!}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x\, x^{3/2}}{z^{-1}\mathrm{e}^x+1} && (51)\\
&= \frac{2}{\beta\Lambda_T^3} f_{5/2}(z) && (52)
\end{aligned}$$

Le premier terme de l'intégration par parties est nul, puisque la décroissance exponentielle l'emporte sur la décroissance polynomiale. Pour le prouver, on applique le développement limité $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n+1}x^n/n$, *car si* x *tend vers l'infini,* e^{-x} *devient petit :*

$$\begin{aligned}
x^{3/2}\ln(1+z\mathrm{e}^{-x})\Big|_0^\infty &= \lim_{x\to\infty} x^{3/2}\ln(1+z\mathrm{e}^{-x}) - 0 && (53)\\
&= \lim_{x\to\infty} x^{3/2}\left(z\mathrm{e}^{-x} - \frac{z^2\mathrm{e}^{-2x}}{2} + \mathcal{O}((z\mathrm{e}^{-x})^3)\right) = 0 && (54)
\end{aligned}$$

Chaque terme décroît plus vite vers 0 que le précédent.

4. On se place dans la limite classique $z \to 0$. Développer $f_m(z)$ jusqu'à l'ordre 2 en z.

Solution :

La limite classique $z \to 0$ *correspond à une température* T *élevée et à une température inverse* β *petite. On ne peut pas directement développer le dénominateur de l'intégrande, puisque* $z^{-1}\mathrm{e}^x$ *est grand. Il faut donc modifier ce dénominateur pour faire apparaître* $z\mathrm{e}^{-x}$*, qui est petit :*

$$f_m(z) = \frac{1}{(m-1)!}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x\, x^{m-1}}{z^{-1}\mathrm{e}^x+1} \qquad (55)$$

$$= \frac{1}{(m-1)!}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x\, x^{m-1}(z\mathrm{e}^{-x})}{1+z\mathrm{e}^{-x}} \tag{56}$$

$$= \frac{1}{(m-1)!}\int_0^\infty \mathrm{d}x\, x^{m-1} z\mathrm{e}^{-x}\sum_{\alpha=0}^{\infty}(-1)^\alpha (z\mathrm{e}^{-x})^\alpha \tag{57}$$

$$= \frac{1}{(m-1)!}\int_0^\infty \mathrm{d}x\, x^{m-1}\sum_{\alpha=0}^{\infty}(-1)^\alpha (z\mathrm{e}^{-x})^{\alpha+1} \tag{58}$$

$$= \frac{1}{(m-1)!}\int_0^\infty \mathrm{d}x\, x^{m-1}\sum_{\alpha=1}^{\infty}(-1)^{\alpha-1} (z\mathrm{e}^{-x})^{\alpha} \tag{59}$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{\infty}(-1)^{\alpha-1} z^\alpha \frac{1}{(m-1)!}\int_0^\infty \mathrm{d}x\, x^{m-1}\mathrm{e}^{-\alpha x} \tag{60}$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{\infty}(-1)^{\alpha+1}\frac{z^\alpha}{\alpha^m} \tag{61}$$

$$= z - \frac{z^2}{2^m} + \mathcal{O}(z^3) \tag{62}$$

où on renommé l'indice $\alpha+1$ par α pour faciliter le calcul de l'intégrale. L'intégrale vaut $(m-1)!/\alpha^m$, tel qu'établi à l'équation (17).

5. A partir des développements de P et n en fonction de z, déterminer l'expression de P en fonction de n au premier ordre en $n\Lambda_T^3$. Commenter.
   Indice : exprimer z en fonction de n et z, puis remplacer les termes en z dans le membre de droite par leur expression en fonction de n et z ordre par ordre.

   Solution :

   Le point précédent permet de récrire la pression à l'ordre 2 en z :

$$P(z) = \frac{2}{\beta\Lambda_T^3}\sum_{\alpha=1}^{\infty}(-1)^{\alpha+1}\frac{z^\alpha}{\alpha^{5/2}} = \frac{2}{\beta\Lambda_T^3}\left(z - \frac{z^2}{2^{5/2}} + \mathcal{O}(z^3)\right) \tag{63}$$

   On résout l'équation $n(z) = f(z)$ perturbativement et récursivement, ce qui équivaut à substituer $f(z)$ par son expression en série et à progresser ordre par ordre, pour obtenir $z(n) = g(n)$. Ainsi, en débutant par le premier ordre

$$n(z) = \frac{2}{\Lambda_T^3} f_{3/2}(z) = \frac{2}{\Lambda_T^3}\left(z - \frac{z^2}{2^{3/2}} + \mathcal{O}(z^3)\right) \tag{64}$$

$$\Rightarrow \quad z = \frac{\Lambda_T^3}{2}n + \frac{z^2}{2^{3/2}} + \mathcal{O}(z^3) \tag{65}$$

   On considère maintenant le deuxième ordre. On insère $z = \frac{\Lambda_T^3}{2}n$:

$$z = \frac{\Lambda_T^3}{2}n + \frac{1}{2^{3/2}}\left(\frac{\Lambda_T^3}{2}n\right)^2 + \mathcal{O}\left(\left(\frac{\Lambda_T^3}{2}n\right)^3\right) \tag{66}$$

   Le deuxième ordre est suffisant pour obtenir la première correction quantique. On substitue maintenant z dans l'expression de $P(z)$:

$$P = \frac{2}{\beta\Lambda_T^3}\left(z - \frac{z^2}{2^{5/2}} + \mathcal{O}(z^3)\right) \tag{67}$$

$$= \frac{2}{\beta \Lambda_T^3} \left[\frac{\Lambda_T^3}{2} n + \frac{1}{2^{3/2}} \left(\frac{\Lambda_T^3}{2} n \right)^2 - \frac{1}{2^{5/2}} \left(\frac{\Lambda_T^3}{2} n + \frac{1}{2^{3/2}} \left(\frac{\Lambda_T^3}{2} n \right)^2 \right)^2 + \ldots \right] \tag{68}$$

$$= \frac{2}{\beta \Lambda_T^3} \left[\frac{\Lambda_T^3}{2} n + \left(\frac{1}{2^{3/2}} - \frac{1}{2^{5/2}} \right) \left(\frac{\Lambda_T^3}{2} n \right)^2 + \mathcal{O}\left(\left(\frac{\Lambda_T^3}{2} n \right)^3 \right) \right] \tag{69}$$

$$= n k_{\mathrm{B}} T \left[1 + \frac{1}{2^{5/2}} \frac{\Lambda_T^3}{2} n + \mathcal{O}\left(\left(\frac{\Lambda_T^3}{2} n \right)^2 \right) \right] \tag{70}$$

Ainsi, en prenant en compte la première correction quantique, l'équation du gaz parfait s'écrit

$$P = n k_{\mathrm{B}} T \left(1 + \frac{1}{2^{5/2}} \frac{\Lambda_T^3}{2} n \right) \tag{71}$$

Les effects quantiques deviennent importants lorsque $n\Lambda_T^3 > 2$: cela signifie que la distance moyenne entre les électrons est plus faible que la longueur d'onde de de Broglie thermique. Les effets quantiques ont tendance à rendre la pression plus élevée que ce qu'elle serait dans un gaz parfait classique : c'est la signature du principe de Pauli qui empêche deux électrons de même spin de se trouver dans le même état.