ICS - Algorithmique

Cours 8 : Complexité algorithmique

19.11.2025

Critères d'évaluation d'un algorithme

- Correctitude
- Performance
  - Temps de parcours
  - Espace requis en mémoire
  - Nombre d'appels à la mémoire de disque
  - ...

Critères d'évaluation d'un algorithme

- Correctitude
- Performance
  - Temps de parcours
  - Espace requis en mémoire
  - Nombre d'appels à la mémoire de disque
  - ...

Critères d'évaluation d'un algorithme

- Correctitude
- Performance
  - Temps de parcours
  - Espace requis en mémoire
  - Nombre d'appels à la mémoire de disque
  - ...

On s'intéresse au temps de parcours d'un algorithme **en fonction de la taille n de l'entrée**.

- Si l'entrée est une liste de n éléments, on dira que l'entrée est de taille n.

Exemple : rechercher le maximum d'une liste

On sait que l'algorithme suivant calcule correctement le maximum d'une liste de nombres.

```
def max_liste(L):

    n = len(L)
    max_L = L[0]

    for i in range(1, n):
        if L[i] > max_L:
            max_L = L[i]

    return max_L
```

Que peut-on dire sur son temps de parcours ?

Mesurer le temps de parcours

- La fonction `time()` du module `time` de Python retourne le temps au moment de l'appel en secondes, calculé depuis une date de référence qui dépend du système (souvent le 1er janvier 1970).
  - On l'utilisera pour mesurer le temps pris par un appel à la fonction `max_liste`.

Mesurer le temps de parcours

- La fonction `time()` du module `time` de Python retourne le temps au moment de l'appel en secondes, calculé depuis une date de référence qui dépend du système (souvent le 1er janvier 1970).
  - On l'utilisera pour mesurer le temps pris par un appel à la fonction `max_liste`.

- La fonction `randrange(start, stop, step)` du module `random` retourne un nombre aléatoire entre `start` et `stop` (on utilisera `randrange(N)` pour un grand entier `N`).
  - On l'utilisera pour générer une liste `L` de grande taille qu'on passera en argument à `max_liste`.

Mesurer empiriquement le temps de parcours : code

```
from time import time
from random import randrange

def max_liste(L):
    n = len(L)
    max_L = L[0]
    for i in range(1, n):
        if L[i] > max_L:
            max_L = L[i]
    return max_L

L = []
n = 1000
for i in range(n):
    L.append(randrange(10))

t0 = time()
m = max_liste(L)
t1 = time()
print("n:", n, "; duree:", t1 - t0)
```

Exercice : testez le temps de parcours de l'algorithme `max_liste` en changeant la taille de la liste `L`.

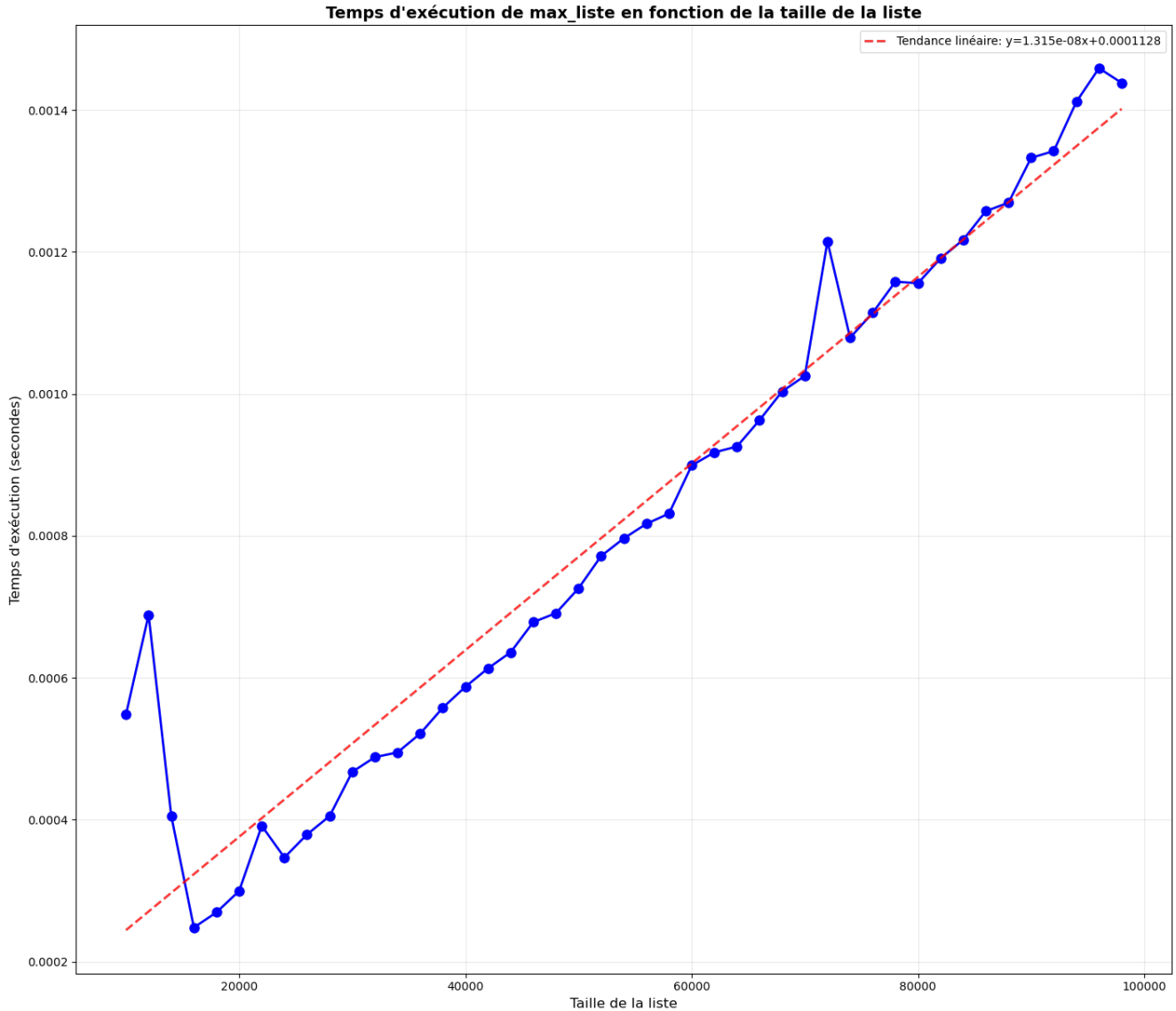
Mesurer empiriquement le temps de parcours : quelques points de données

n	durée
10^3	0.0002779961
10^4	0.0010309219
10^5	0.0041978359
10^6	0.0258612632
10^7	0.2596998214
10^8	2.64670395851

Mesurer empiriquement le temps de parcours : plein de points de données

```
from time import time
from random import randrange
from fonctions_ics import ics_plot, max_liste

N = range(10000,100000, 2000)
R = []

for n in N:
    L = []
    for i in range(n):
        L.append(randrange(10))

    t0 = time()
    m = max_liste(L)
    t1 = time()
    R.append(t1 - t0)

ics_plot(N,R)
```

Mesurer empiriquement le temps de parcours : plein de points de données



Vers une analyse théorique du temps de parcours

- Le calcul du temps de parcours empirique avec le module `time` est problématique : le temps de parcours varie d'un langage de programmation à l'autre, d'une machine à l'autre, d'un moment à l'autre sur la même machine...
- Pour évaluer la performance d'un algorithme indépendamment des détails d'implémentation, on va modéliser le fonctionnement d'un ordinateur.

Vers une analyse théorique du temps de parcours

On s'intéresse au temps de parcours d'un algorithme **en fonction de la taille n de l'entrée**.

- Si l'entrée est une liste de n éléments...
  on dira que l'entrée est de taille n.

Vers une analyse théorique du temps de parcours

On s'intéresse au temps de parcours d'un algorithme **en fonction de la taille n de l'entrée**.

- Si l'entrée est une liste de n éléments...
  on dira que l'entrée est de taille n.
- On suppose en général que les opérations suivantes prennent **un temps constant** :
  - Opérations arithmétiques : addition, soustraction, multiplication, division, reste entier,...
  - Manipulation de données : créer une variable, affecter une valeur à une variable, lire et comparer les valeurs de deux variable,...
  - Opérations de contrôle : instructions `if`,...
  - Appel d'une fonction
  - Accéder à un élément d'une liste `L[i]` étant donné l'index `i`
  - Invoquer la fonction `len` et les méthodes `append` et `pop` (sans arguments !) sur une liste.

Vers une analyse théorique du temps de parcours

On s'intéresse au temps de parcours d'un algorithme **en fonction de la taille n de l'entrée**.

- Si l'entrée est une liste de n éléments **qui ne grandissent pas avec n**, on dira que l'entrée est de taille n.
- On suppose en général que les opérations suivantes prennent **un temps constant si elles s'appliquent à des objets/valeurs qui ne grandissent pas avec n** :
  - Opérations arithmétiques : addition, soustraction, multiplication, division, reste entier,...
  - Manipulation de données : créer une variable, affecter une valeur à une variable, lire et comparer les valeurs de deux variable,...
  - Opérations de contrôle : instructions `if`,...
  - Appel d'une fonction
  - Accéder à un élément d'une liste `L[i]` étant donné l'index `i`
  - Invoquer la fonction `len` et les méthodes `append` et `pop` (sans arguments !) sur une liste.

Exprimer le temps de parcours de `max_liste`

```
def max_liste(L):                    c0

    n = len(L)                       c1
    max_L = L[0]                     c2

    for i in range(1, n):            c4  } n-1 itérations
        if L[i] > max_L:             c5  }
            max_L = L[i]             c6  }

    return max_L                     c3


L = [0, 3, 10, -7, 5]
max_liste(L)
```

L'appel à la fonction `max_liste` dure (en secondes)

$$T(n) = c_0 + c_1 + c_2 + c_3 + (c_4 + c_5 + c_6)(n-1) = c\,n + c' :$$

`max_liste` a un temps de parcours **linéaire** en n.

Problème de la somme maximale

- Etant donné une liste de n nombres ($n \geq 2$), donner un algorithme qui calcule la plus grande somme de deux éléments de la liste (d'indices distincts).
  Par exemple,
  - **Entrée :** `L = [945, 815, 1132, 731, 981, 673]`
  - **Sortie :** $1132 + 981 = 2113$

Problème de la somme maximale

- Etant donné une liste de n nombres ($n \geq 2$), donner un algorithme qui calcule la plus grande somme de deux éléments de la liste (d'indices distincts).
  Par exemple,
  - **Entrée :** `L = [945, 815, 1132, 731, 981, 673]`
  - **Sortie :** $1132 + 981 = 2113$

- Nous allons donner deux algorithmes pour ce problème, puis comparer leurs temps de parcours.

Un algorithme pour la somme maximale

```python
def max_somme(L):
    '''
    Entree: liste L de nombres de taille n >= 2
    Sortie: Somme maximale de deux elements de L
    '''
    n = len(L)
    max_s = L[0] + L[1]

    for i in range(n):
        for j in range(i+1, n):
            if L[i] + L[j] > max_s:
                max_s = L[i] + L[j]

    return max_s
```

On appelle ce type d'algorithme qui essaie toutes les combinaisons possibles un **algorithme de force brute**.

Correctitude de `max_somme` (idée de preuve)

```
for i in range(n):
    for j in range(i+1, n):
        if L[i] + L[j] > max_s:
            max_s = L[i] + L[j]
```

On peut réfléchir de deux manières.

- Les boucles imbriquées itèrent sur toutes les paires possibles `(i,j)` pour `i` et `j` distincts. Au début de la "`(i,j)`ème" exécution du corps de la boucle intérieure, `max_s` contient la valeur de la somme maximale pour toutes les paires vues jusque-là.

Correctitude de `max_somme` (idée de preuve)

```
for i in range(n):
    for j in range(i+1, n):
        if L[i] + L[j] > max_s:
            max_s = L[i] + L[j]
```

On peut réfléchir de deux manières.

- Les boucles imbriquées itèrent sur toutes les paires possibles `(i,j)` pour `i` et `j` distincts. Au début de la "`(i,j)`ème" exécution du corps de la boucle intérieure, `max_s` contient la valeur de la somme maximale pour toutes les paires vues jusque-là.
- On peut aussi formuler et prouver un invariant de boucle pour la boucle extérieure, qui dépendra d'un invariant de boucle de la boucle intérieure (qui sera fonction du numéro d'itération `i`).

Temps de parcours de `max_somme`

```
for i in range(n):
    for j in range(i+1, n):
        if L[i] + L[j] > max_s:
            max_s = L[i] + L[j]
```

- La boucle extérieure est exécutée n fois (`i = 0`, ..., `n-1`).
- A la `i`ème itération de la boucle extérieure, la boucle intérieure est exécutée $n - i - 1$ fois :
  - **`i = 0`** : `j` parcourt `range(1, n)` : $n - 1$ itérations

Temps de parcours de `max_somme`

```
for i in range(n):
    for j in range(i+1, n):
        if L[i] + L[j] > max_s:
            max_s = L[i] + L[j]
```

- La boucle extérieure est exécutée n fois (`i = 0`, ..., `n-1`).
- A la `i`ème itération de la boucle extérieure, la boucle intérieure est exécutée $n - i - 1$ fois :
  - **`i = 0`** : `j` parcourt `range(1, n)` : $n - 1$ itérations
  - **`i = 1`** : `j` parcourt `range(2, n)` : $n - 2$ itérations

Temps de parcours de `max_somme`

```
for i in range(n):
    for j in range(i+1, n):
        if L[i] + L[j] > max_s:
            max_s = L[i] + L[j]
```

- La boucle extérieure est exécutée n fois (`i = 0`, ..., `n-1`).
- A la `i`ème itération de la boucle extérieure, la boucle intérieure est exécutée $n - i - 1$ fois :
  - **`i = 0`** : `j` parcourt `range(1, n)` : $n - 1$ itérations
  - **`i = 1`** : `j` parcourt `range(2, n)` : $n - 2$ itérations
  - ...
  - **`i = n-1`** : `j` parcourt `range(n, n)` : 0 itérations

Temps de parcours de `max_somme`

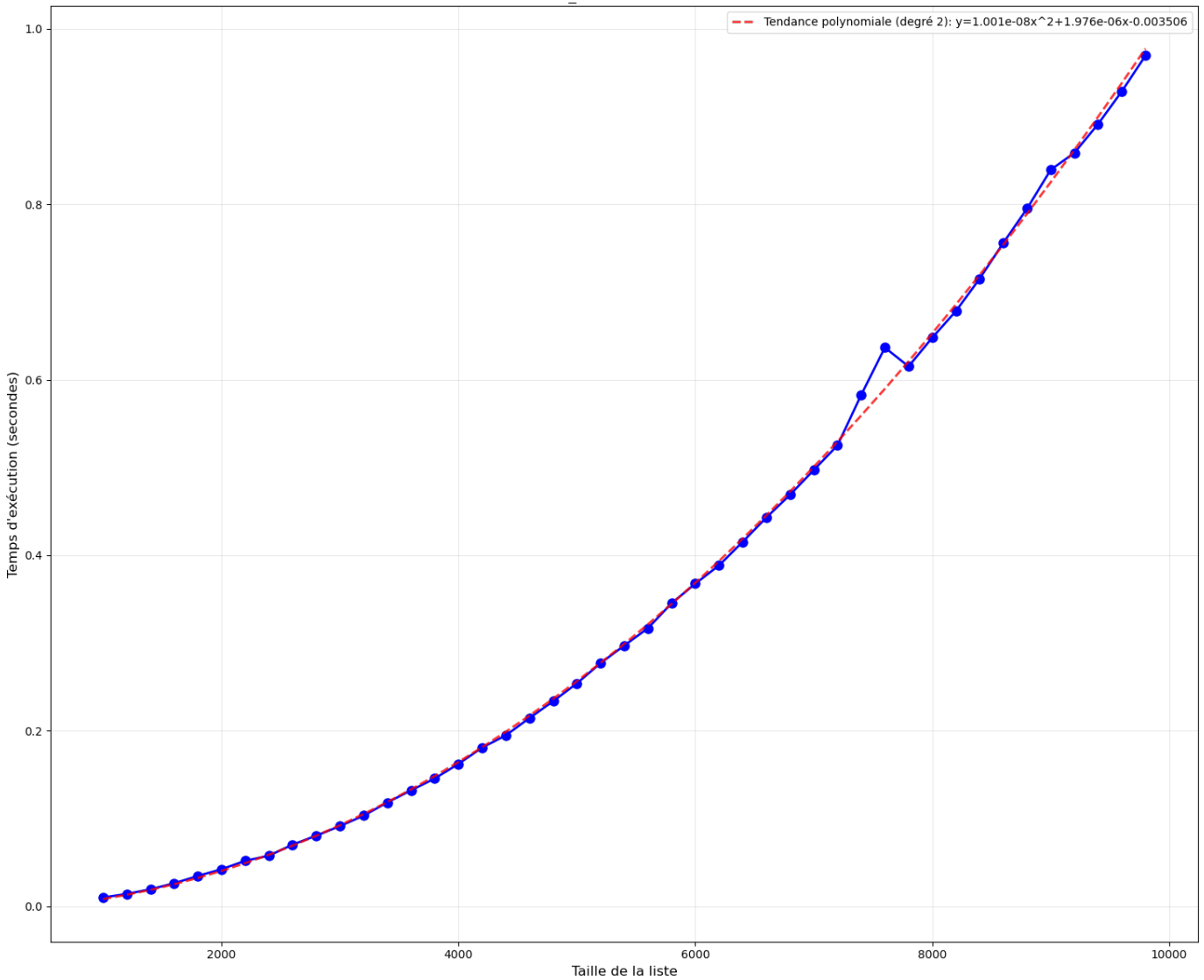
```
for i in range(n):
    for j in range(i+1, n):
        if L[i] + L[j] > max_s:
            max_s = L[i] + L[j]
```
} c

- La boucle extérieure est exécutée n fois (`i = 0`, ..., `n-1`).
- A la `i`ème itération de la boucle extérieure, la boucle intérieure est exécutée $n - i - 1$ fois :
  - **`i = 0`** : `j` parcourt `range(1, n)` : $n - 1$ itérations
  - **`i = 1`** : `j` parcourt `range(2, n)` : $n - 2$ itérations
  - ...
  - **`i = n-1`** : `j` parcourt `range(n, n)` : 0 itérations
- Temps de parcours des boucles imbriquées :

$$c \cdot [(n-1) + (n-2) + \cdots + 1 + 0] = c \cdot \frac{n(n-1)}{2}.$$

- Temps de parcours total de l'algorithme :
  $T_s(n) = c_2 n^2 + c_1 n + c_0$.

Temps de parcours empirique de `max_somme`



Un autre algorithme pour la somme maximale

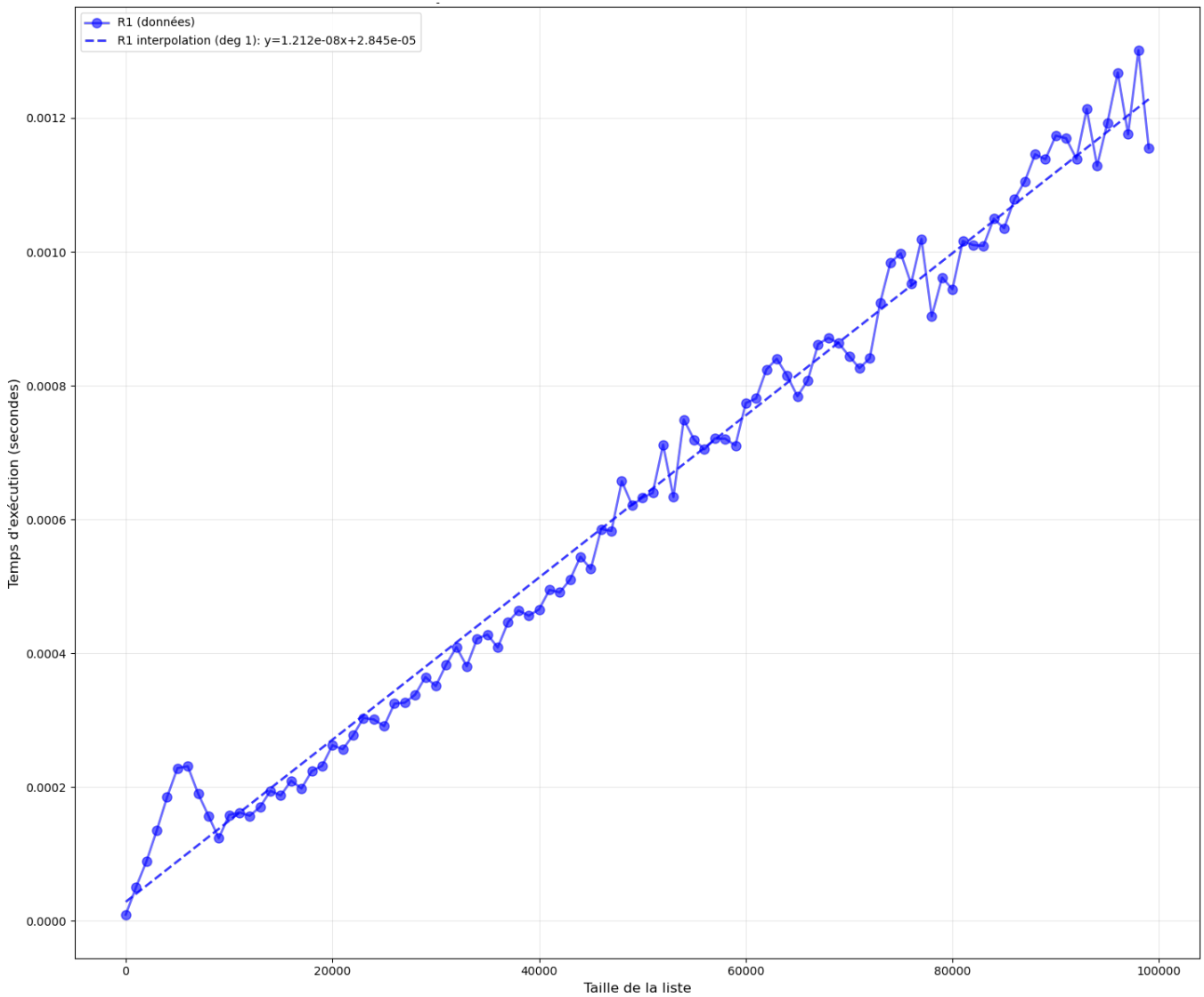
Etant donné une liste de n nombres ($n \geq 2$), donner un algorithme qui calcule la plus grande somme de deux éléments de la liste.

```
def max_somme_lineaire(L):
    '''
    Entree: liste L de nombres de taille n >= 2
    Sortie: Somme maximale de deux elements de L
    '''
    n = len(L)
    max1 = max_liste(L)
    L.remove(max1)
    max2 = max_liste(L)
    return max1 + max2
```

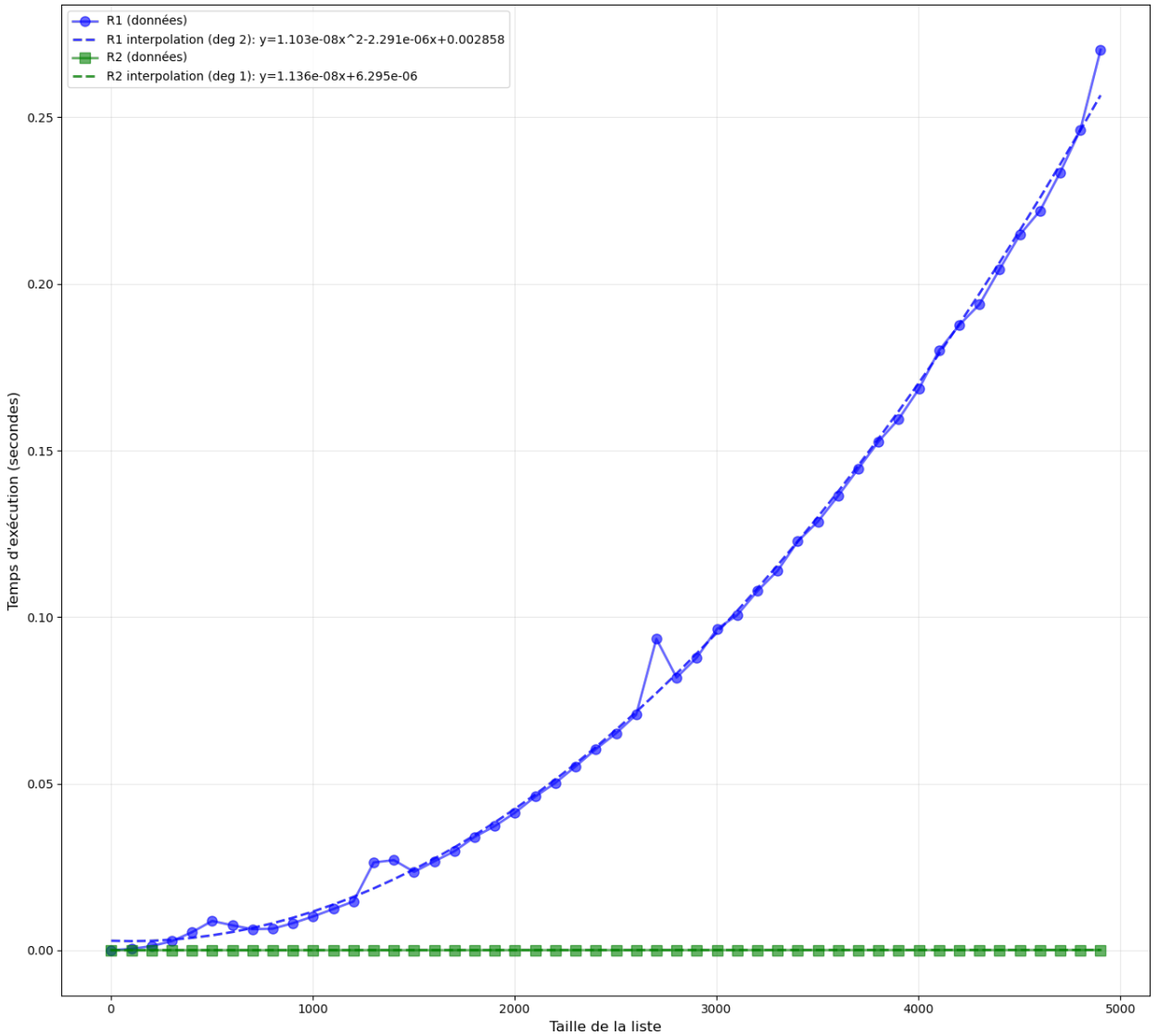
Temps de parcours : $T_\ell(n) = c_3 n + c_4$ (si on admet [1] que `L.remove()` a temps de parcours linéaire en n).

1. Sinon, modifiez `max_liste` pour qu'elle rende les deux plus grands éléments de la liste d'un coup, et vérifiez que son temps de parcours est toujours linéaire en n.

Temps de parcours de `max_somme_lineaire`



Comparaison empirique des temps de parcours



Comparaison asymptotique des temps de parcours : notation $\mathcal{O}(\cdot)$

- Pour une liste de taille n en entrée, on a l'impression que `max_somme_linéaire` ($T_\ell(n) = c_3 n + c_4$) est plus performant que `max_somme` ($T_s(n) = c_2 n^2 + c_1 n + c_0$). Peut-on préciser cette intuition, indépendamment de la valeur des constantes ?

Comparaison asymptotique des temps de parcours : notation $\mathcal{O}(\cdot)$

- Pour une liste de taille n en entrée, on a l'impression que `max_somme_linéaire` ($T_\ell(n) = c_3 n + c_4$) est plus performant que `max_somme` ($T_s(n) = c_2 n^2 + c_1 n + c_0$). Peut-on préciser cette intuition, indépendamment de la valeur des constantes ?
- De plus, on s'intéresse au **comportement asymptotique** d'un algorithme, i.e., au temps de parcours en fonction de la taille de l'entrée n lorsque n tend vers l'infini.

Comparaison asymptotique des temps de parcours : notation $\mathcal{O}(\cdot)$

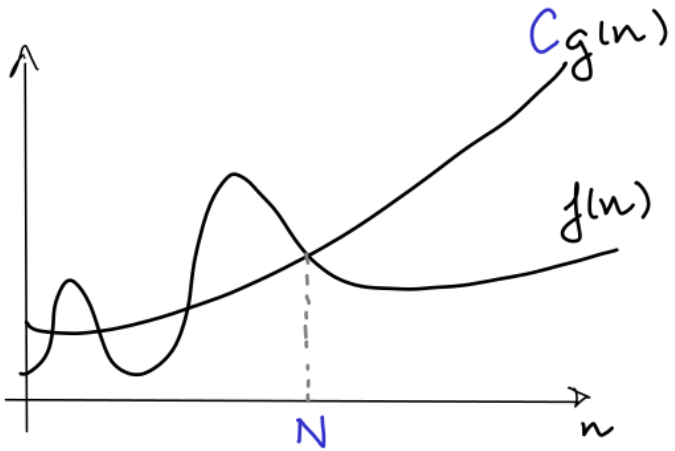
- Pour une liste de taille n en entrée, on a l'impression que `max_somme_linéaire` ($T_\ell(n) = c_3 n + c_4$) est plus performant que `max_somme` ($T_s(n) = c_2 n^2 + c_1 n + c_0$). Peut-on préciser cette intuition, indépendamment de la valeur des constantes ?
- De plus, on s'intéresse au **comportement asymptotique** d'un algorithme, i.e., au temps de parcours en fonction de la taille de l'entrée n lorsque n tend vers l'infini.
- On étudie alors la performance temporelle asymptotique (la *complexité*) des algorithmes à l'aide de la notation $\mathcal{O}(\cdot)$: c'est un outil mathématique qui permet de borner **la vitesse asymptotique de croissance d'une fonction**.

Notation $\mathcal{O}(\cdot)$

Définition (Grand O)

Soit $n \in \mathbb{N}$, et g une fonctions positives de n. $\mathcal{O}(g)$ est l'ensemble des fonctions positives $f(n)$ pour lesquelles il existe des réels $C > 0$ et $N > 0$ tels que

$$\forall n > N,\ f(n) \leq C \cdot g(n).$$



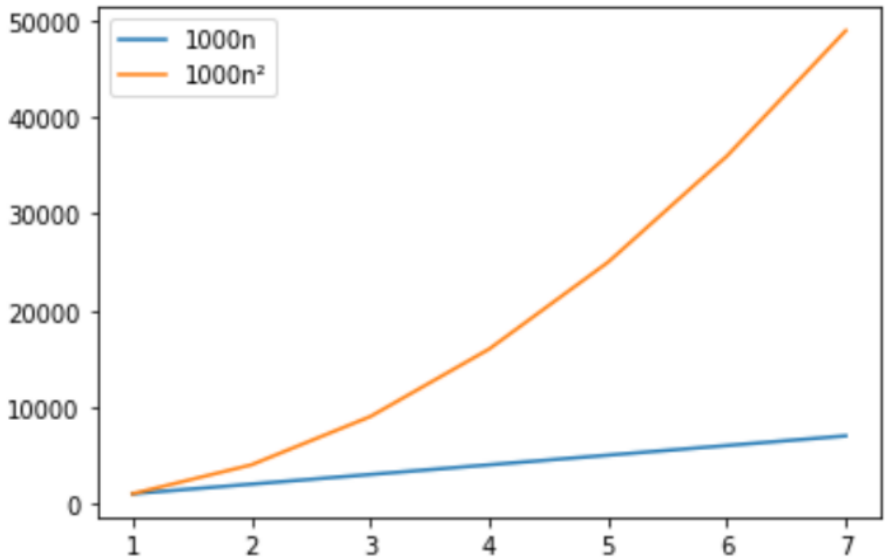
(Abus de) notation : pour $f \in \mathcal{O}(g)$, on dira que "f est $\mathcal{O}(g)$" ou "$f = \mathcal{O}(g)$".

Exemples

$$f = \mathcal{O}(g) \iff \exists C, N > 0 \text{ t.q. } \forall n > N,\ f(n) \leq C \cdot g(n).$$

- $1000n = \mathcal{O}(n^2)$:

$$1000n \leq \underbrace{1000}_{C} n^2 \text{ pour tout } n \geq \underbrace{1}_{N}.$$

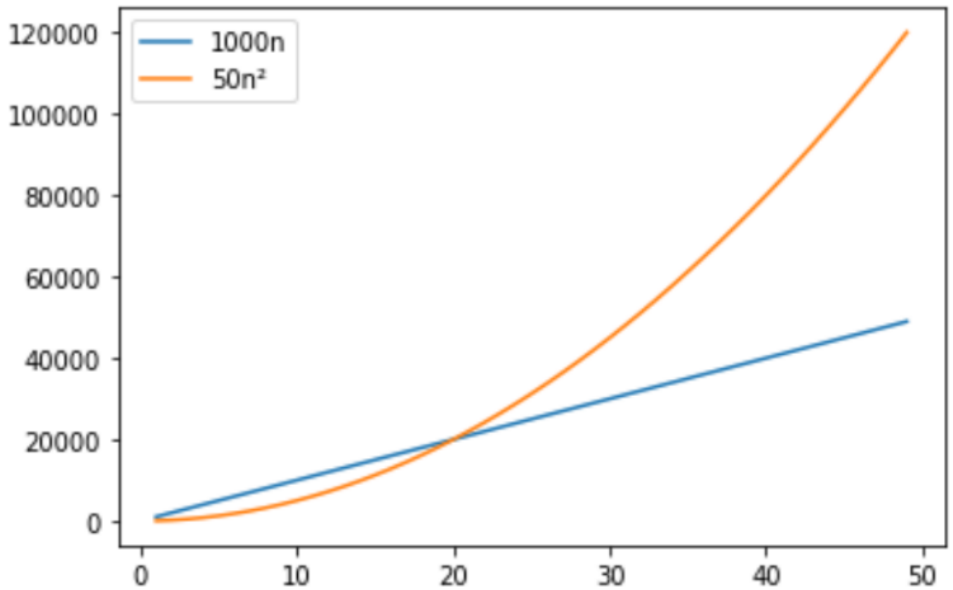


Exemples

$$f = \mathcal{O}(g) \iff \exists C, N > 0 \text{ t.q. } \forall n > N,\ f(n) \leq C \cdot g(n).$$

- $1000n = \mathcal{O}(n^2)$:

$$1000n \leq \underbrace{50}_{C} n^2 \text{ pour tout } n \geq \underbrace{20}_{N}.$$

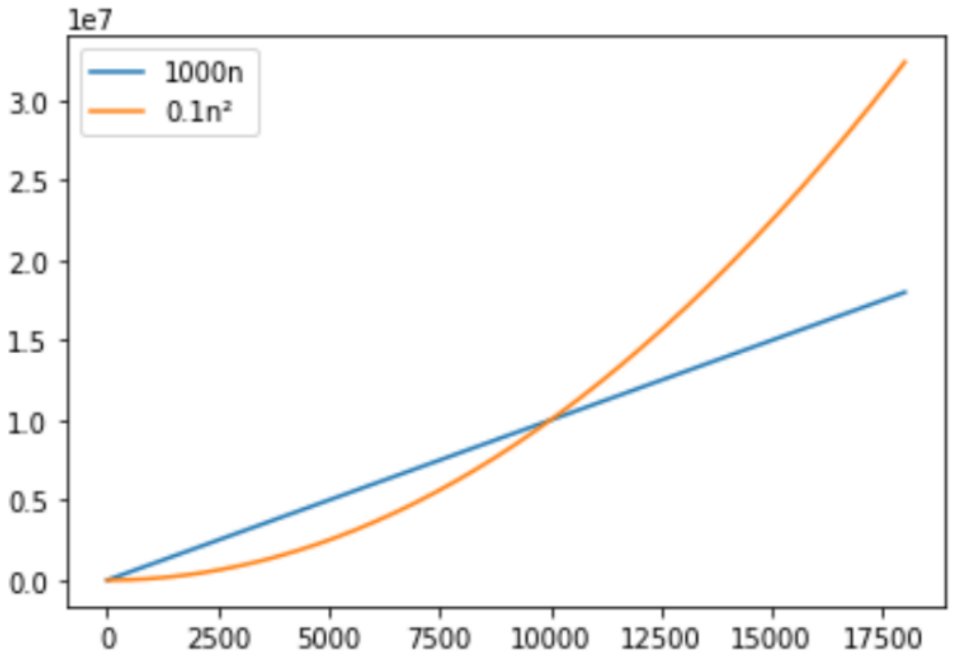


Exemples

$$f = \mathcal{O}(g) \iff \exists C, N > 0 \text{ t.q. } \forall n > N,\ f(n) \leq C \cdot g(n).$$

- $1000n = \mathcal{O}(n^2)$:

$$1000n \leq \underbrace{0.1}_{C} n^2 \text{ pour tout } n \geq \underbrace{10000}_{N}.$$



Puissances rationnelles

$$f = \mathcal{O}(g) \iff \exists C, N > 0 \text{ t.q. } \forall n > N,\ f(n) \leq C \cdot g(n).$$

- En général, pour des puissances rationnelles $p \leq q$,

$$n^p = \mathcal{O}(n^q)$$

  - $n = \mathcal{O}(n), n = \mathcal{O}(n^2)$
  - $n^2 = \mathcal{O}(n^3)$
  - $\sqrt{n} = \mathcal{O}(n)$
  - ...
- $n^p = \mathcal{O}(cn^p)$ pour toute constante $c > 0$.

Puissances rationnelles

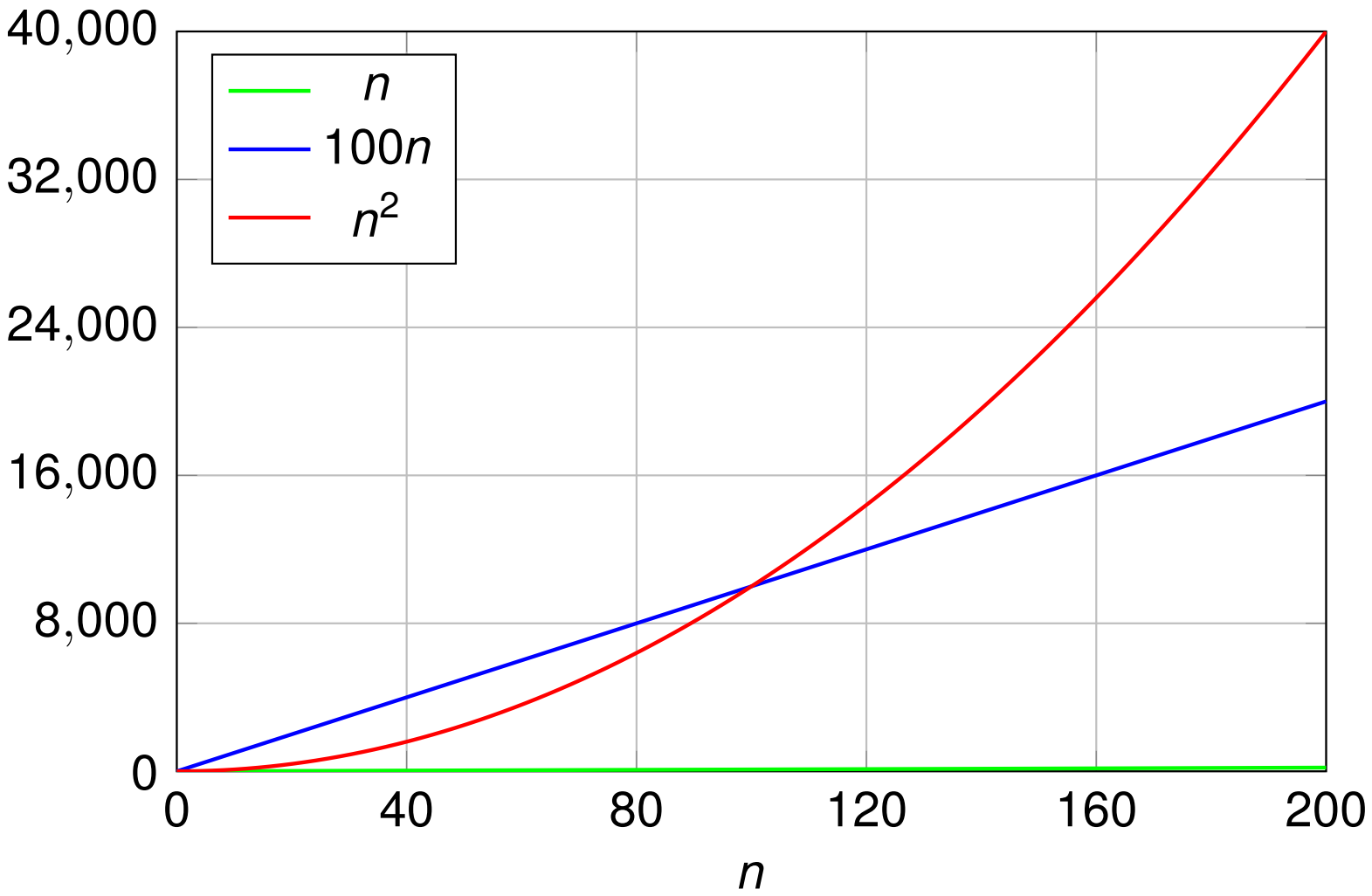
$$f = \mathcal{O}(g) \iff \exists C, N > 0 \text{ t.q. } \forall n > N,\ f(n) \leq C \cdot g(n).$$

- En général, pour des puissances rationnelles $p \leq q$,

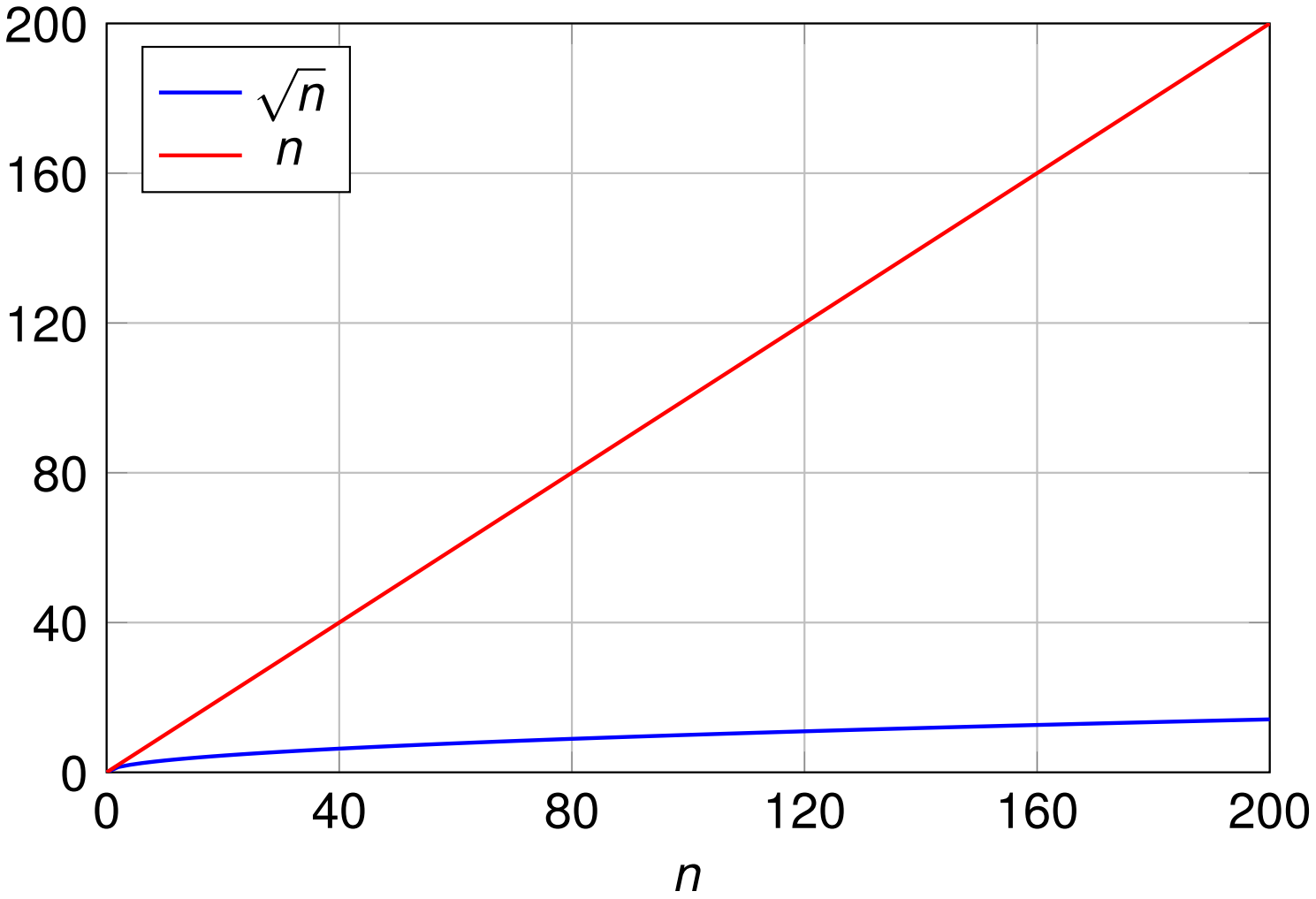
$$n^p = \mathcal{O}(n^q)$$

  - $n = \mathcal{O}(n)$, $n = \mathcal{O}(n^2)$
  - $n^2 = \mathcal{O}(n^3)$
  - $\sqrt{n} = \mathcal{O}(n)$
  - ...
- $n^p = \mathcal{O}(cn^p)$ pour toute constante $c > 0$.
- Si $p < q$, alors $n^p = \mathcal{O}(n^q)$ mais $n^q \neq \mathcal{O}(n^p)$ (exercice facultatif de la série).

Exemples



Exemples



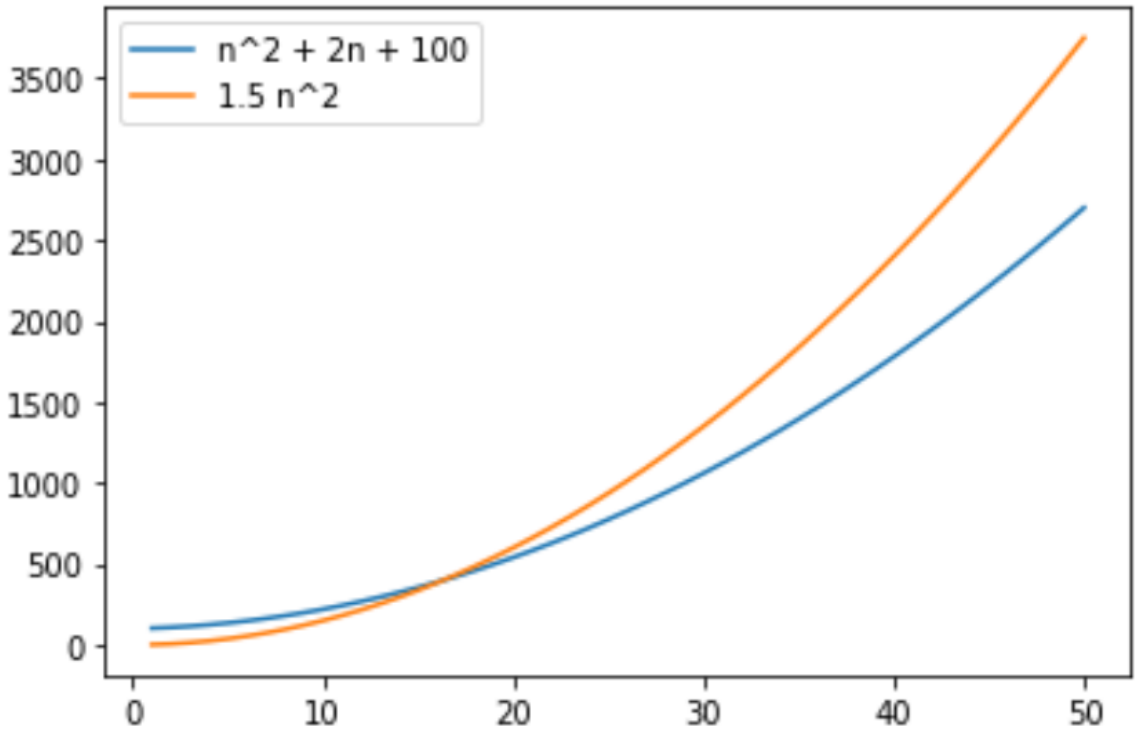
Polynômes

$$f = \mathcal{O}(g) \iff \exists C, N > 0 \text{ t.q. } \forall n > N,\ f(n) \leq C \cdot g(n).$$

- Pour $p \leq q$ entiers, f, g polynômes de degré p, q respectivement,
$$f(n) = \mathcal{O}(g(n))$$
  - $2n + 100 = \mathcal{O}(n^2)$
  - $n + 10^6 = \mathcal{O}(n)$
  - $n^2 + 1000n + 10^6 = \mathcal{O}(n^3)$
  - $\dots$
- Si $p < q$, alors $f = \mathcal{O}(g)$ mais $g \neq \mathcal{O}(f)$.

Exemples

$$n^2 + 2n + 100 = \mathcal{O}(n^2)$$



Sommes de puissances rationnelles

$$f = \mathcal{O}(g) \iff \exists C, N > 0 \text{ t.q. } \forall n > N,\ f(n) \leq C \cdot g(n).$$

- Plus généralement, pour $p \leq q$ rationnels, f et g des sommes de puissances rationnelles de n dont les plus hautes sont respectivement n^p et n^q,

$$f(n) = \mathcal{O}(g(n))$$

  - $n + \sqrt{n} = \mathcal{O}(n)$
  - $n\sqrt{n} + 1000n = \mathcal{O}(n^{1.6})$
  - $\dots$

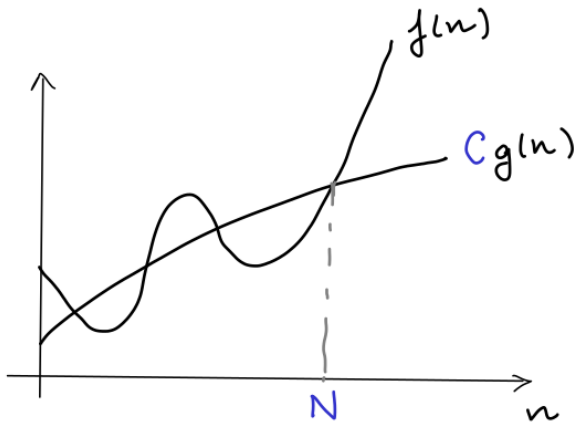
- Si $p < q$, alors $f = \mathcal{O}(g)$ mais $g \neq \mathcal{O}(f)$.

Notation $\Omega(\cdot)$

Définition (Grand Omega)

Soit $n \in \mathbb{N}$, et g une fonction positive de n. $\Omega(g)$ est l'ensemble des fonctions positives $f(n)$ pour lesquelles il existe des réels $C > 0, N > 0$ tels que

$$\forall n \geq N \quad f(n) \geq C \cdot g(n).$$



- (Abus de) notation : On dira "$f = \Omega(g)$" pour "$f \in \Omega(g)$".
- On peut montrer que

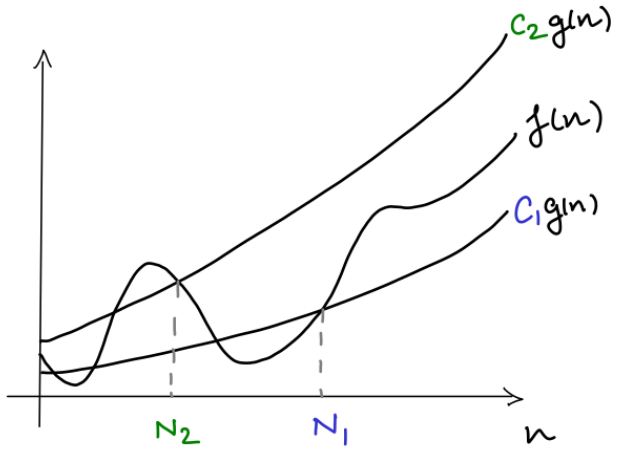
$$g = \mathcal{O}(f) \iff f = \Omega(g).$$

Notation $\Theta(\cdot)$

Définition (Grand Theta)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et g une fonction positive de n. $\Theta(g)$ est l'ensemble des fonctions positives f pour lesquelles il existe des réels $C_1, C_2 > 0$ et $N > 0$ tels que

$$\forall n > N,\ C_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq C_2 \cdot g(n).$$



- (Abus de) notation : On dira "$f = \Theta(g)$" pour "$f \in \Theta(g)$".
- On peut montrer que

$$f = \Theta(g) \iff f = \mathcal{O}(g) \text{ et } f = \Omega(g).$$

Exemples

- Pour tous polynômes f et g de même degré,

$$f(n) = \Theta(g(n))$$

- Pour toutes sommes f et g de puissances rationnelles avec le même terme dominant,

$$f(n) = \Theta(g(n))$$

  - $10n^2 + 7n + 30 = \Theta(n^2)$
  - $1000n^2 + 42 = \Theta(n^2)$
  - $100n\sqrt{n} = \Theta(n\sqrt{n} + n)$
  - $\dots$

Exemples

- Pour tous polynômes f et g de même degré,

$$f(n) = \Theta(g(n))$$

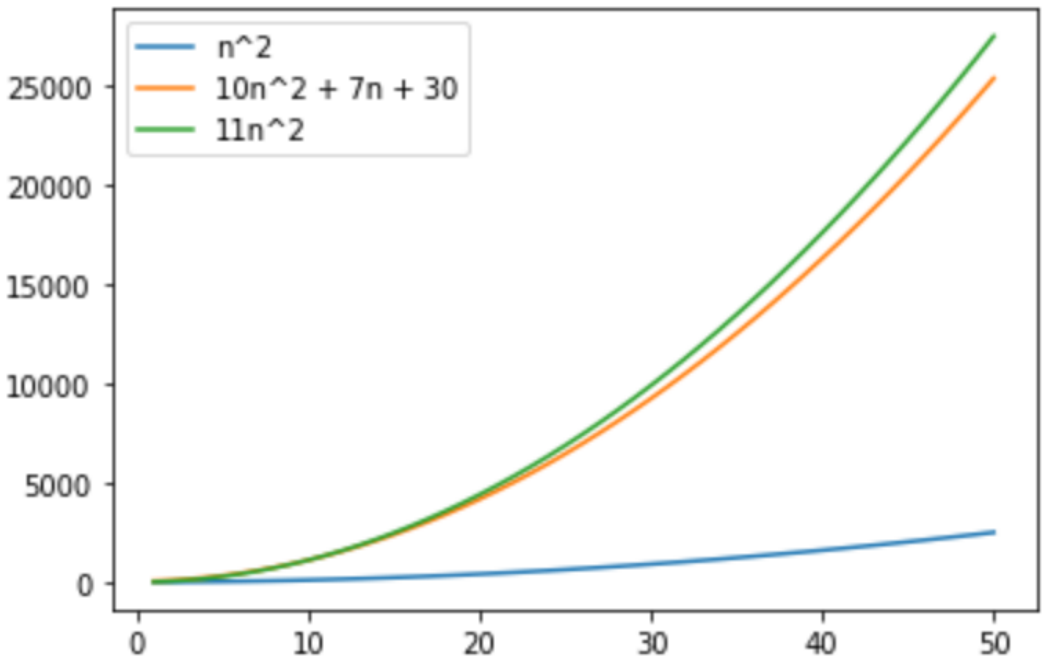
- Pour toutes sommes f et g de puissances rationnelles avec le même terme dominant,

$$f(n) = \Theta(g(n))$$

  - $10n^2 + 7n + 30 = \Theta(n^2)$
  - $1000n^2 + 42 = \Theta(n^2)$
  - $100n\sqrt{n} = \Theta(n\sqrt{n} + n)$
  - $\dots$

- La notation $\Theta(\cdot)$ cache les constantes et les termes d'ordre inférieur, et donne le comportement asymptotique d'une fonction de n (lorsque n tend vers l'infini).

Exemples


n^2
10n^2 + 7n + 30
11n^2
25000
20000
15000
10000
5000
0
0
10
20
30
40
50

Temps de parcours d'algorithmes en notation asymptotique

- On aimerait exprimer le temps de parcours d'un algorithme comme une fonction $T(n)$ de la taille n de l'entrée, puis étudier asymptotiquement la **vitesse de croissance** de $T(n)$.
- Problème : pour la taille n de l'entrée fixée, le temps de parcours d'un algorithme peut également dépendre de l'instance du problème qui lui est fournie en entrée !

Temps de parcours d'algorithmes en notation asymptotique

- On aimerait exprimer le temps de parcours d'un algorithme comme une fonction $T(n)$ de la taille n de l'entrée, puis étudier asymptotiquement la **vitesse de croissance** de $T(n)$.
- Problème : pour la taille n de l'entrée fixée, le temps de parcours d'un algorithme peut également dépendre de l'instance du problème qui lui est fournie en entrée !
  - Par exemple, problème de la recherche d'une valeur `x` dans une liste : l'algorithme intuitif (parcourir la liste) tourne en temps constant $\Theta(1)$ si `x` est le premier élément de la liste, et en temps $\Theta(n)$ si c'est le dernier !
  - Par contre, pour les algorithmes vus aujourd'hui, l'ordre de croissance du temps de parcours est indépendant de l'instance du problème fournie en entrée.

Temps de parcours d'algorithmes en notation asymptotique

- On aimerait exprimer le temps de parcours d'un algorithme comme une fonction $T(n)$ de la taille n de l'entrée, puis étudier asymptotiquement la **vitesse de croissance** de $T(n)$.
- Problème : pour la taille n de l'entrée fixée, le temps de parcours d'un algorithme peut également dépendre de l'instance du problème qui lui est fournie en entrée !
- En général, pour un algorithme donné, on définit $T(n)$ comme le temps de parcours de cet algorithme sur une instance de taille n **au pire des cas**.

Temps de parcours d'algorithmes en notation asymptotique

- On aimerait exprimer le temps de parcours d'un algorithme comme une fonction $T(n)$ de la taille n de l'entrée, puis étudier asymptotiquement la **vitesse de croissance** de $T(n)$.
- Problème : pour la taille n de l'entrée fixée, le temps de parcours d'un algorithme peut également dépendre de l'instance du problème qui lui est fournie en entrée !
- En général, pour un algorithme donné, on définit $T(n)$ comme le temps de parcours de cet algorithme sur une instance de taille n **au pire des cas**.
- Borner le temps de parcours d'un algorithme au pire des cas offre une garantie sur le temps de parcours.

Temps de parcours d'algorithmes en notation asymptotique

Soit $T(n)$ le temps de parcours d'un algorithme pour une entrée de taille n au pire des cas.

- Si on donne une fonction $f_1(n)$ telle que $T(n) = \mathcal{O}(f_1(n))$, f_1 est une **borne supérieure** sur le temps de parcours de l'algorithme.
- Si on donne une fonction $f_2(n)$ telle que $T(n) = \Omega(f_2(n))$, f_2 est une **borne inférieure** sur le temps de parcours de l'algorithme.
- Si on donne une fonction $f(n)$ telle que $T(n) = \Theta(f(n))$, f est à la fois une borne supérieure et une borne inférieure sur le temps de parcours de l'algorithme : elle décrit le comportement asymptotique du temps de parcours.

Comportement asymptotique de `max_liste`

- Pour une entrée de taille n, `max_liste` a temps de parcours (au pire des cas) $T(n) = c + c'n$ donc `max_liste` a un temps de parcours qui est $\Theta(n)$ (linéaire en la taille de l'entrée).
- Peut-on mieux faire (asymptotiquement) ?

Comportement asymptotique de `max_liste`

- Pour une entrée de taille n, `max_liste` a temps de parcours (au pire des cas) $T(n) = c + c'n$ donc `max_liste` a un temps de parcours qui est $\Theta(n)$ (linéaire en la taille de l'entrée).
- Peut-on mieux faire (asymptotiquement) ?
- Non ! Tout algorithme qui recherche le maximum d'une liste de nombres doit au moins parcourir toute la liste, et donc une borne inférieure triviale sur le temps de parcours d'un tel algorithme est $T(n) = \Omega(n)$.
- Un algorithme de recherche du maximum avec temps de parcours $\Theta(n)$ est donc asymptotiquement optimal.

Comportement asymptotique des algorithmes de recherche de somme maximale

- Pour une entrée de taille n :
  - `max_somme` a temps de parcours (au pire des cas) $T_s(n) = c_2 n^2 + c_1 n + c_0$: c'est un temps de parcours **quadratique** en n, c'est à dire $\Theta(n^2)$.
  - `max_somme_lineaire` a temps de parcours (au pire des cas) $T_\ell(n) = c_3 n + c_4$: c'est un temps de parcours **linéaire** en n, c'est à dire $\Theta(n)$.

Comportement asymptotique des algorithmes de recherche de somme maximale

- Pour une entrée de taille n :
  - `max_somme` a temps de parcours (au pire des cas) $T_s(n) = c_2 n^2 + c_1 n + c_0$: c'est un temps de parcours **quadratique** en n, c'est à dire $\Theta(n^2)$.
  - `max_somme_lineaire` a temps de parcours (au pire des cas) $T_\ell(n) = c_3 n + c_4$: c'est un temps de parcours **linéaire** en n, c'est à dire $\Theta(n)$.
- `max_somme_lineaire` est donc **un meilleur algorithme (asymptotiquement)** que `max_somme` pour la résolution du problème de la somme maximale de deux éléments d'une liste : le temps de parcours de `max_somme_lineaire` est dominé asymptotiquement par le temps de parcours de `max_somme` : $T_\ell(n) = \mathcal{O}(T_s(n))$, mais $T_s(n) \neq \mathcal{O}(T_\ell(n))$!

Comportement asymptotique des algorithmes de recherche de somme maximale

- Pour une entrée de taille n :
  - `max_somme` a temps de parcours (au pire des cas) $T_s(n) = c_2 n^2 + c_1 n + c_0$: c'est un temps de parcours **quadratique** en n, c'est à dire $\Theta(n^2)$.
  - `max_somme_lineaire` a temps de parcours (au pire des cas) $T_\ell(n) = c_3 n + c_4$: c'est un temps de parcours **linéaire** en n, c'est à dire $\Theta(n)$.
- `max_somme_lineaire` est donc **un meilleur algorithme (asymptotiquement)** que `max_somme` pour la résolution du problème de la somme maximale de deux éléments d'une liste : le temps de parcours de `max_somme_lineaire` est dominé asymptotiquement par le temps de parcours de `max_somme` : $T_\ell(n) = \mathcal{O}(T_s(n))$, mais $T_s(n) \neq \mathcal{O}(T_\ell(n))$!
- Peut-on mieux faire ?... Non ! borne inférieure triviale : il faut au moins lire toute l'entrée.