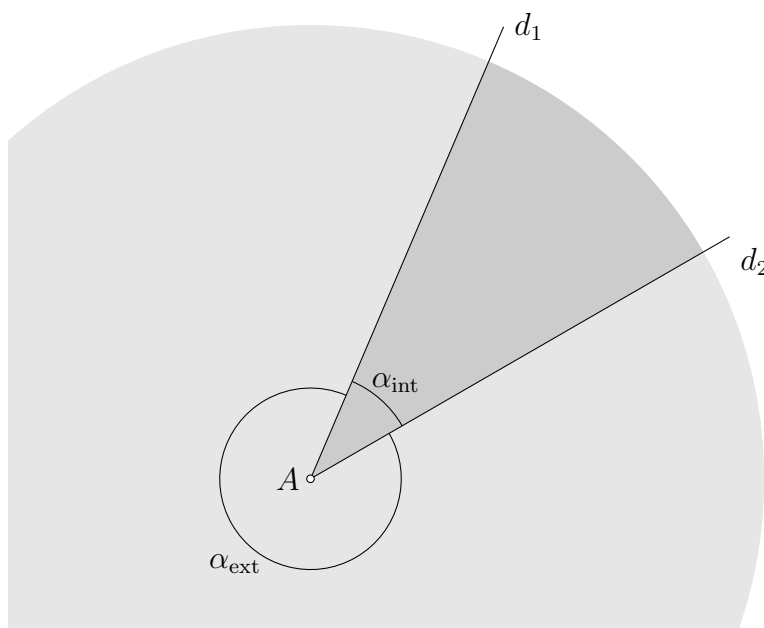


Angles et trigonométrie dans le triangle rectangle

1 Angle géométrique

Dans le plan, deux demi-droites d_1 et d_2 issues d'un même point A définissent deux portions du plan, appelées angles géométriques et souvent désignées par une lettre grecque (p.ex. α , β , γ , φ ...).



La plus petite des deux portions du plan est l'angle intérieur α_{int} , la plus grande l'angle extérieur α_{ext} .

Parce que facilement manipulable, on associe le nombre 360 au plan complet ($d_1 = d_2$) : le tour complet compte 360° (« degrés »). Tout angle géométrique est donc compris entre 0° et 360° . En particulier,

$$\alpha_{\text{int}} + \alpha_{\text{ext}} = 360^\circ .$$

2 Arc, secteur, radian

Pour un cercle de rayon R (p.ex. centré sur le point A),

- la circonférence \mathcal{C} (périphérie) est proportionnelle au rayon : c'est 2π fois le rayon, avec

$$\pi \approx 3.14159 ,$$

soit

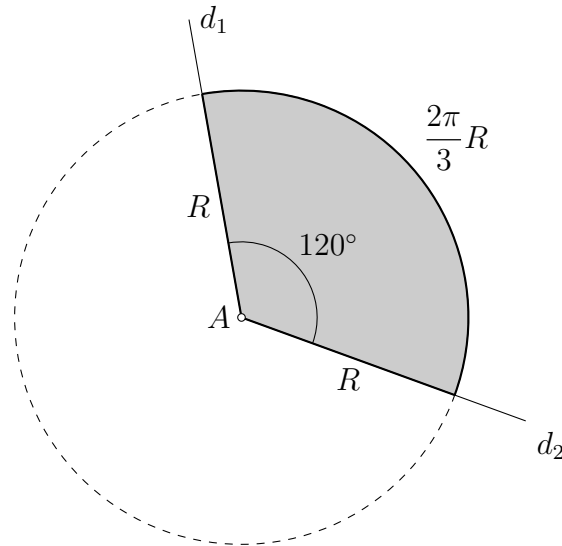
$$\mathcal{C} = 2\pi R ,$$

- curieusement (en fait pas tant que ça...), on retrouve π dans l'expression de l'aire \mathcal{A} du disque

$$\mathcal{A} = \pi R^2.$$

Clairement, un angle géométrique α coupe un arc de cercle (et un secteur de disque) de manière proportionnelle. Par exemple, l'angle de 120° (tiers de plan) délimite un tiers de cercle de longueur

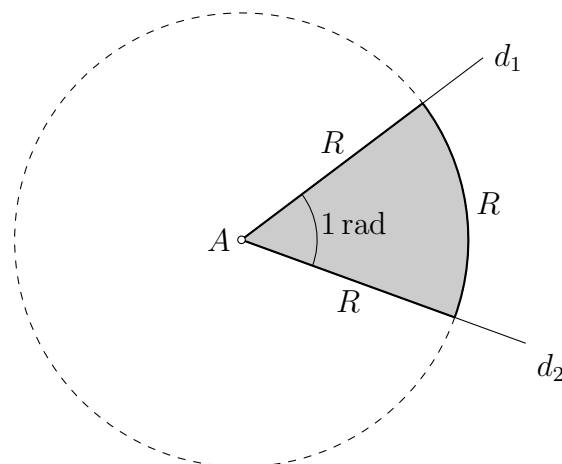
$$\frac{120^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{3} \quad \mathcal{L} = \frac{2\pi}{3}R.$$



Le rapport entre longueur d'arc et rayon est indépendant du rayon, c'est donc une autre mesure de l'angle, donnée par un nombre réel entre 0 et 2π . On dit qu'on mesure l'angle en radians.

Un radian est donc l'angle définissant un arc de cercle de longueur égale au rayon :

$$\mathcal{L} = R \Rightarrow \frac{\mathcal{L}}{R} = \frac{R}{R} = 1 = 1 \text{ rad.}$$



Rem. En tant que rapport de longueurs, le radian est sans dimension (ce n'est pas une unité de mesure), mais on écrit parfois « rad » après la valeur numérique pour rappeler qu'il s'agit d'un angle.

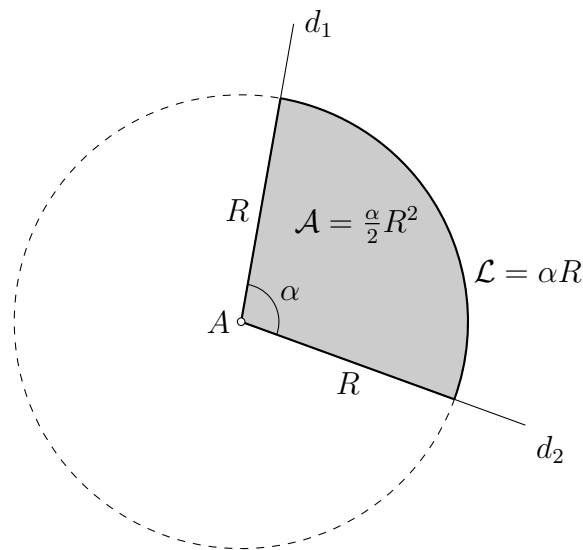
Le même angle géométrique est donc soit donné en degrés, soit en radians, avec la conversion

$$360^\circ = 2\pi \text{ rad} \Rightarrow \alpha [^\circ] = \frac{360^\circ}{2\pi} \alpha [\text{rad}]$$

Ex. $120^\circ = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$, $1 \text{ rad} \approx 57.29578^\circ$.

En sciences, on préfère les radians. Longueur d'arc et aire de secteur s'écrivent donc

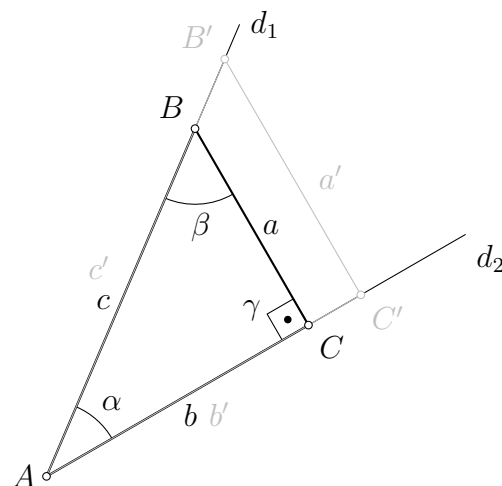
$$\mathcal{L} = \alpha R \quad \mathcal{A} = \frac{\alpha}{2} R^2 \quad (\alpha \text{ en rad}).$$



3 Triangle rectangle : cos, sin, tan, cot

La projection orthogonale sur d_2 d'un point B de la demi-droite d_1 définit un point C . Le triangle ABC , d'angles respectifs α, β, γ , est rectangle en C :

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi \quad \gamma = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}.$$



On note respectivement a, b, c les côtés opposés à A, B, C .

c est l'hypoténuse du triangle rectangle, a et b sont les cathètes. Selon le théorème de Pythagore,

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Rem. Avec une parallèle à BC , on définit de manière similaire un triangle $AB'C'$. C'est un triangle semblable à ABC : les côtés sont proportionnels

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} \quad (\text{théorème de Thalès}).$$

Par conséquent, les rapports entre longueurs des côtés d'un triangle rectangle sont indépendants de la taille du triangle et ne dépendent que de l'angle α :

- le cosinus de α est le rapport entre le côté adjacent et l'hypoténuse

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

- le sinus de α est le rapport entre le côté opposé et l'hypoténuse

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

- la tangente de α est le rapport entre le côté opposé et le côté adjacent

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

- la cotangente de α est le rapport entre le côté adjacent et le côté opposé

$$\cot \alpha = \frac{b}{a} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\tan \alpha}.$$

Propriétés

- Théorème de Pythagore : $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$
- Angles remarquables

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞
$\cot \alpha$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

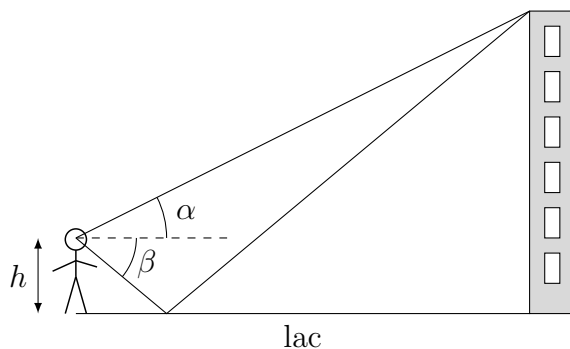
- Angles complémentaires $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$: par échange des rôles entre α et β ,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin \alpha \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos \alpha \quad \tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cot \alpha \quad \cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \tan \alpha$$

Rem. Dans la pratique, il est judicieux de faire apparaître clairement les triangles rectangles, comme dans l'exemple qui suit.

4 Exemple

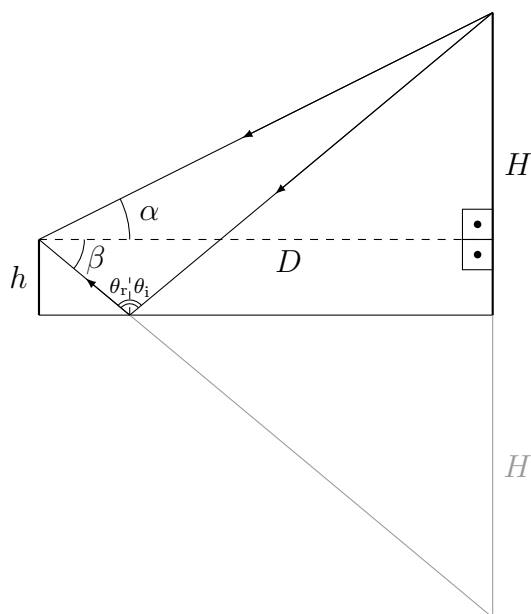
Une personne de taille h se tient au bord d'un lac parfaitement lisse comme un miroir. Elle regarde le sommet d'une tour située sur l'autre rive, ainsi que le reflet du sommet dans le lac. Pour la visée directe, la direction du regard fait un angle α au-dessus de l'horizontale. Pour la visée du reflet, c'est un angle β au-dessous de l'horizontale.



De ces mesures, déduisez la hauteur de la tour et la distance horizontale entre la personne et la tour.

Solution Notons D la distance horizontale entre la personne et la tour et H la hauteur de celle-ci.

La lumière émise par le sommet de la tour va, d'une part, directement dans l'œil de la personne, d'autre part, elle est réfléchi par le lac : l'angle d'incidence θ_i est égal à l'angle de réflexion θ_r . On construit facilement le trajet de la lumière avec l'image virtuelle de la tour (symétrique de la tour par rapport au lac).



α et β définissent deux triangles rectangles de base D et de hauteur respective $H - h$ et $H + h$:

$$\tan \alpha = \frac{H - h}{D} \quad \tan \beta = \frac{H + h}{D} .$$

En faisant le rapport de ces expressions, l'inconnue D disparaît et on obtient la hauteur H :

$$\frac{\tan \alpha}{\tan \beta} = \frac{H - h}{H + h} \Rightarrow H = \frac{\tan \beta + \tan \alpha}{\tan \beta - \tan \alpha} h.$$

De manière similaire, on peut écrire H de deux manières différentes et en déduire la distance horizontale D :

$$D \tan \alpha + h = H = D \tan \beta - h \Rightarrow D = \frac{2h}{\tan \beta - \tan \alpha}.$$