

Série 1

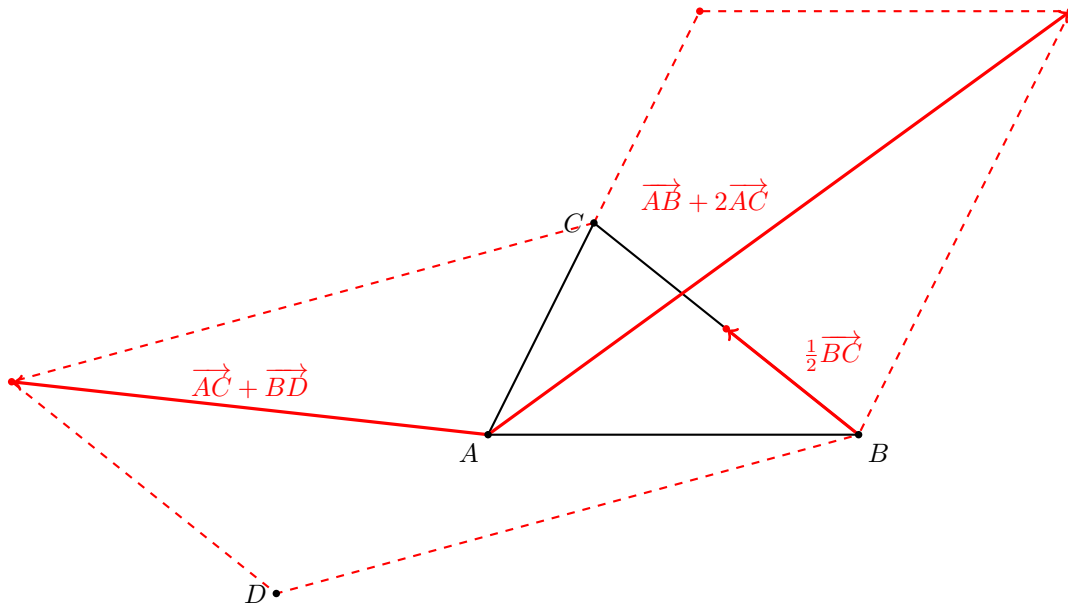
Exercice 1. Sur une feuille de papier, placer quatre points A, B, C, D non alignés. Faire ensuite apparaître sur votre dessin les vecteurs suivants, en détaillant votre construction :

a. $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

b. $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$

c. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$.

Solution: Figure d'étude :



- Le vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ rejoint B au milieu du segment BC .
- Pour construire ce vecteur, on peut commencer par "doubler" C vu depuis A , puis on construit un parallélogramme dont les côtés sont supportés par \overrightarrow{AB} et $2\overrightarrow{AC}$ ainsi représentés depuis A . Le vecteur recherché apparaît sur la diagonale issue de A .
- Pour construire ce vecteur, on peut commencer par représenter \overrightarrow{BD} depuis le point C (en faisant apparaître le parallélogramme dont D, B, C sont, dans cet ordre, des sommets). Puis on rejoint A au sommet que l'on vient de construire.

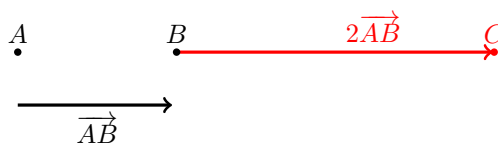
Exercice 2. Sur une feuille de papier, placer deux points distincts A et B . Soient alors C et D vérifiant :

$$\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{DB} = 3\overrightarrow{DA}.$$

- Placer le point C sur la figure.
- Exprimer \overrightarrow{AD} en fonction de \overrightarrow{AB} puis placer D sur la figure.
- Les vecteurs \overrightarrow{AC} et \overrightarrow{BD} sont-ils colinéaires? Si oui, déterminer le réel α vérifiant $\overrightarrow{AC} = \alpha\overrightarrow{BD}$.

Solution:

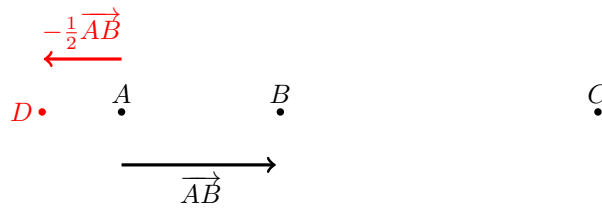
- Pour construire C , on doit translater (c'est-à-dire déplacer) le point B du vecteur $2\overrightarrow{AB}$, comme sur le dessin suivant :



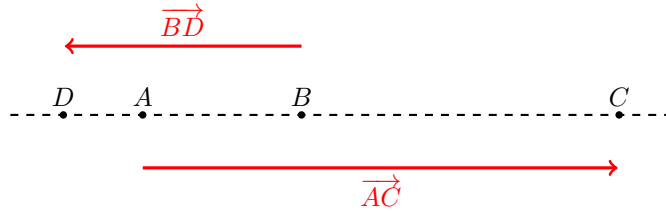
- En utilisant l'égalité vectorielle caractérisant D et la relation de Chasles, on obtient :

$$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{DA} \text{ et donc } 2\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AB} \text{ ou encore } \overrightarrow{AD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$

Pour construire D , on doit donc translater le point A du vecteur $-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, comme sur le dessin suivant :



c. Les points A, B, C et D se trouvent tous sur la droite (AB) . Comme les vecteurs \overrightarrow{AC} et \overrightarrow{BD} sont tous les deux directeurs de cette droite (ils peuvent être tracés en joignant deux points de cette droite), ils sont colinéaires.



Un coup d'œil rapide sur la figure semble nous indiquer que le réel α tel que $\overrightarrow{AC} = \alpha \overrightarrow{BD}$ est négatif (car ces deux vecteurs sont de sens opposés) et de valeur absolue 2 (il semble que la distance entre A et C soit le double de celle entre B et D). On conjecture donc que $\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{BD}$. Confirmons à présent cela en utilisant le calcul vectoriel. D'une part, on a :

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \underbrace{\overrightarrow{BC}}_{2\overrightarrow{AB}} = 3\overrightarrow{AB}.$$

D'autre part, on trouve :

$$\overrightarrow{BD} = \underbrace{\overrightarrow{BA}}_{-\overrightarrow{AB}} + \underbrace{\overrightarrow{AD}}_{-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}.$$

On peut donc bien conclure que :

$$-2\overrightarrow{BD} = -2\left(-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}\right) = 3\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}.$$

Exercice 3. Sur une feuille de papier, dessiner un parallélogramme $ABCD$ (non aplati).

a. Sur votre dessin, faire apparaître géométriquement \overrightarrow{AB} comme une combinaison linéaire du type :

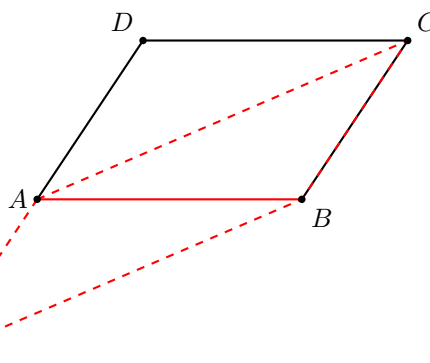
$$\overrightarrow{AB} = \alpha \overrightarrow{AC} + \beta \overrightarrow{AD}$$

(il faut donc faire apparaître un certain parallélogramme), puis confirmer votre résultat algébriquement.

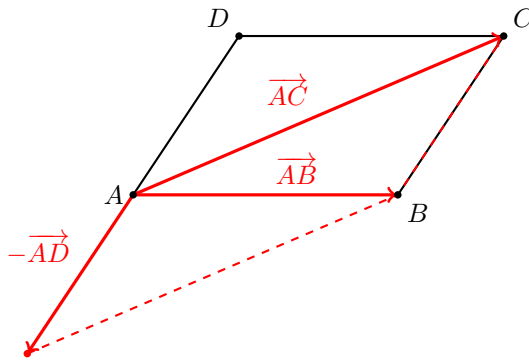
b. Même question que a. mais pour une décomposition du type $\overrightarrow{AB} = \alpha \overrightarrow{CA} + \beta \overrightarrow{BD}$.

Solution:

a. Le travail de décomposition demandé ici consiste à faire apparaître le segment AB comme la diagonale d'un parallélogramme dont les côtés ont les directions données par \overrightarrow{AC} et \overrightarrow{AD} :



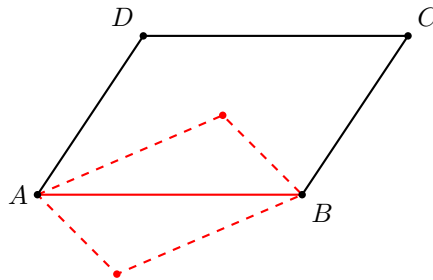
En effet, d'après la définition de l'addition vectorielle, on voit alors apparaître le vecteur \overrightarrow{AB} comme somme d'un vecteur colinéaire à \overrightarrow{AC} et d'un vecteur colinéaire à \overrightarrow{AD} , c'est-à-dire comme combinaison linéaire de \overrightarrow{AC} et \overrightarrow{AD} :



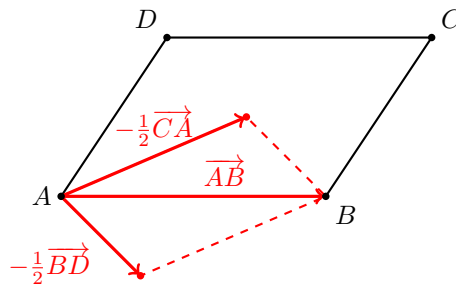
Confirmons alors algébriquement la décomposition que l'on vient d'obtenir géométriquement :

$$\vec{AB} = \vec{AC} + \underbrace{\vec{CB}}_{\vec{DA}} = \vec{AC} - \vec{AD}.$$

- b. Cette fois-ci, on doit faire apparaître le segment AB comme la diagonale d'un parallélogramme dont les côtés ont les directions données par \vec{CA} et \vec{BD} , c'est-à-dire sont parallèles aux diagonales du parallélogramme $ABCD$:



En effet, d'après la définition de l'addition vectorielle, on voit alors apparaître le vecteur \vec{AB} comme somme d'un vecteur colinéaire à \vec{CA} et d'un vecteur colinéaire à \vec{BD} , c'est-à-dire comme combinaison linéaire de \vec{CA} et \vec{BD} :



Cherchons alors à confirmer algébriquement la décomposition que l'on vient d'obtenir géométriquement. Commençons par écrire :

$$\vec{CA} = \underbrace{\vec{CB}}_{\vec{DA}} + \vec{BA} = -\vec{AB} - \vec{AD} \text{ et } \vec{BD} = \vec{BA} + \vec{AD} = -\vec{AB} + \vec{AD}.$$

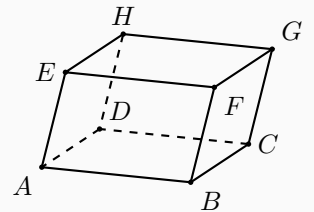
On en déduit alors :

$$\vec{CA} + \vec{BD} = -2\vec{AB} \text{ et finalement que } \vec{AB} = -\frac{1}{2}\vec{CA} - \frac{1}{2}\vec{BD}.$$

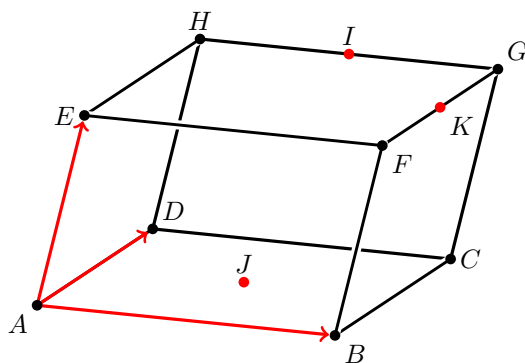
Exercice 4.

La figure ci-contre représente un parallélépipède.

- Exprimer \vec{AI} en fonction de \vec{AB} , \vec{AD} et \vec{AE} , où I est le milieu de HG .
- Même question pour \vec{EJ} , où J est le centre du parallélogramme $ABCD$.
- Quel point K vérifie l'égalité vectorielle $\vec{JK} = -\frac{1}{2}\vec{CD} + 2\vec{CG} + \vec{HD}$?



Solution: Figure d'étude :



a. On trouve :

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AD} + \underbrace{\overrightarrow{DH}}_{\overrightarrow{AE}} + \underbrace{\overrightarrow{HI}}_{\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}.$$

b. On a :

$$\overrightarrow{EJ} = \underbrace{\overrightarrow{EA}}_{-\overrightarrow{AE}} + \frac{1}{2} \underbrace{\overrightarrow{AC}}_{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE}.$$

c. Commençons par calculer le vecteur \overrightarrow{JK} en fonction de \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AD} et \overrightarrow{AE} :

$$-\frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + 2\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{HD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}.$$

Par conséquent, le point K vérifie :

$$\overrightarrow{EK} = \overrightarrow{EJ} + \overrightarrow{JK} = (\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE}) + (\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}) = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{EF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FG}.$$

Ceci montre que K est le milieu de FG .

Exercice 5. Sur une feuille de papier, dessiner un parallélogramme $ABCD$ (non aplati). Soient E et F tels que :

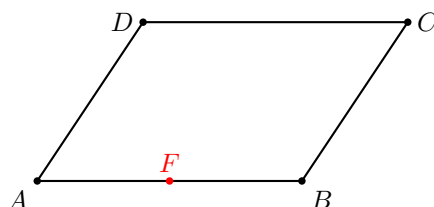
$$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AD} \text{ et } \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB} = \vec{0}.$$

- Placer E et F sur la figure.
- Décomposer le vecteur \overrightarrow{AE} comme combinaison linéaire de \overrightarrow{DB} et \overrightarrow{DC} .
- Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AB} + \alpha\overrightarrow{AC}$ soit directeur de la droite (EF) .

Solution:

a. On obtient la figure suivante :

$E \bullet$



En effet, d'après l'égalité $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AD}$, on voit que l'on obtient E en translatant C du vecteur \overrightarrow{AD} , c'est-à-dire en faisant subir à C le même déplacement que pour passer de A à D (de sorte à ce que le quadrilatère $ACED$ soit donc un parallélogramme). Par ailleurs, la condition sur F se réécrit :

$$\overrightarrow{FA} + \underbrace{\overrightarrow{FB}}_{\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AB}} = 2\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0} \text{ ou encore } 2\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} \text{ c'est à dire } \overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$

Ceci montre que F est bien le milieu de AB .

- b. Pour résoudre cette question, on commence par décomposer le vecteur \overrightarrow{AE} selon les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AD} (c'est à une telle décomposition que le dessin nous invite). On obtient :

$$\overrightarrow{AE} = \underbrace{\overrightarrow{AC}}_{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}} + \underbrace{\overrightarrow{CE}}_{\overrightarrow{AB}} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}.$$

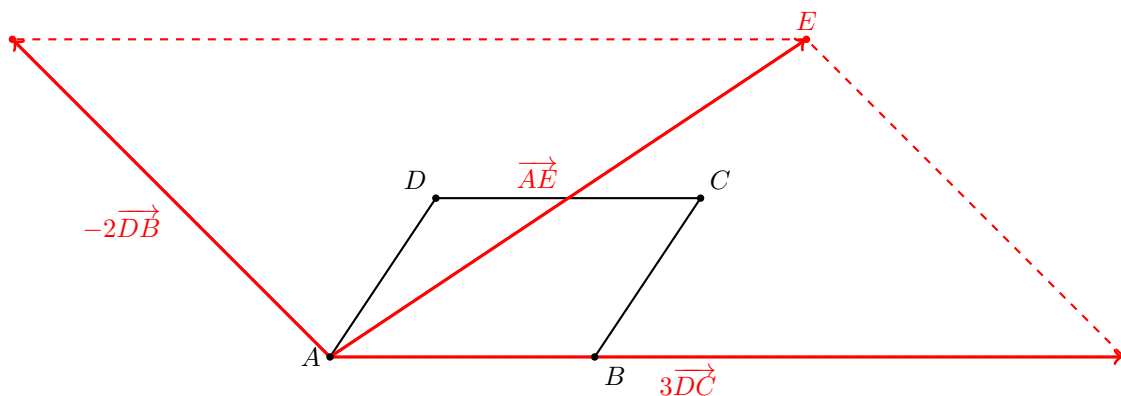
On exprime ensuite les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AD} en fonction de \overrightarrow{DB} et \overrightarrow{DC} :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}, \quad \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}.$$

On trouve donc finalement :

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DC} + 2(-\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}) = -2\overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{DC}.$$

Sur la figure, on voit cette décomposition de la manière suivante :



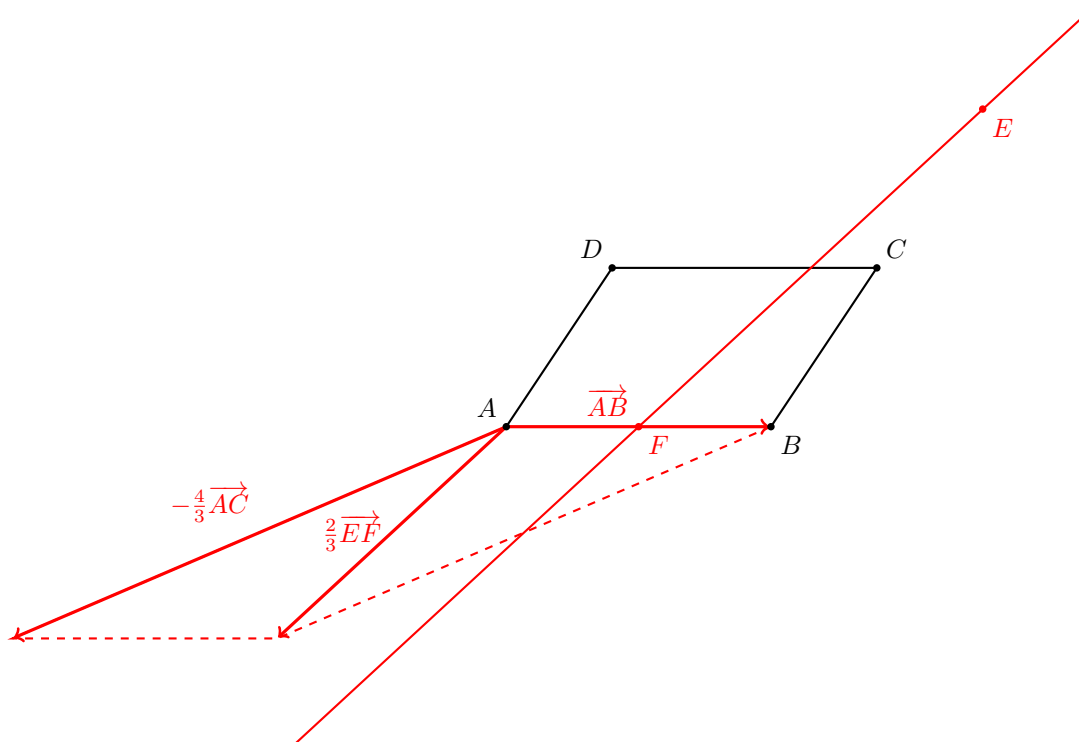
- c. Commençons par chercher un vecteur directeur de (EF) comme combinaison de \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} . On peut par exemple décomposer le vecteur \overrightarrow{FE} selon ces vecteurs :

$$\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2 \underbrace{\overrightarrow{AD}}_{\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}.$$

On en déduit alors que le vecteur :

$$-\frac{2}{3}\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AB} - \frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$$

est directeur de la droite (EF) (puisque'il est colinéaire à \overrightarrow{FE}). Par conséquent, $\alpha = -\frac{4}{3}$ convient. On obtient alors le dessin suivant :

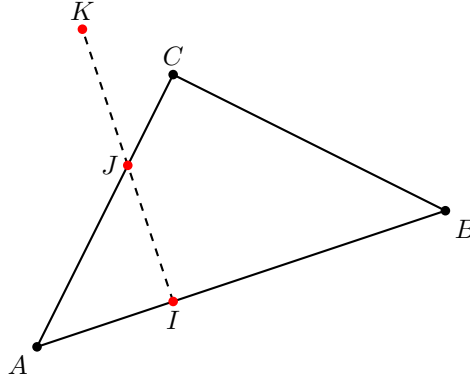


Exercice 6. Sur une feuille de papier, dessiner un triangle ABC . On considère les points I, J, K tels que :

$$\vec{AI} = \frac{1}{3}\vec{AB}, \quad \vec{CJ} = \frac{1}{3}\vec{CA}, \quad \vec{CK} = \frac{1}{3}\vec{BC}.$$

Placer ces trois points sur la figure puis montrer que J est le milieu de IK . *Indication : on pourra chercher à comparer entre eux les vecteurs \vec{IJ} et \vec{JK} .*

Solution: Figure d'étude :



Pour montrer que J est le milieu de IK , on va chercher à prouver que les vecteurs \vec{IJ} et \vec{JK} sont égaux. On a :

$$\vec{IJ} = \vec{IA} + \vec{AC} + \vec{CJ} = -\vec{AI} + \vec{AC} + \frac{1}{3}\vec{CA} = -\frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC}.$$

Par ailleurs, on a aussi :

$$\vec{JK} = \vec{CK} - \vec{CJ} = \frac{1}{3}\vec{BC} - \frac{1}{3}\vec{CA} = \frac{1}{3}(\vec{BA} + \vec{AC}) + \frac{1}{3}\vec{AC} = -\frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC}.$$

On trouve donc que $\vec{IJ} = \vec{JK}$, ce qui montre bien que J est le milieu du segment IK .