Série 3

1. Exprimer les quantités suivantes à l'aide d'une fonction trigonométrique de l'angle x uniquement.

a) $A = \cos(7\pi - x)$ c) $C = \sin(\frac{3\pi}{2} - x)$ e) $E = \cot(-\frac{5\pi}{2} - x)$

b) $B = \cos(x + \frac{\pi}{2})$ d) $D = \cos(x - \frac{9\pi}{2})$ f) $F = \sin(x + n\,\frac{\pi}{2})$, $n \in \mathbb{N}$

2. Résoudre les équations suivantes dans l'intervalle donné :

a) $\cos x = \frac{1}{2}$, $15\pi \leq x \leq 16\pi$ c) $\tan x = -1$, $-4\pi \leq x \leq -3\pi$

b) $\sin x = -\frac{1}{2}$, $15\pi \leq x \leq 16\pi$ d) $\cot x = \sqrt{3}$, $-\pi \leq x \leq 0$

3. Résoudre les équations suivantes :

a) $(\cos t)\,(2\,\cos t + 3) = -1$ b) $4 - 5\sin t = 2\cos^2 t$, $-\frac{11\pi}{2} \leq t \leq -5\pi$

Rappel (sera revu en analyse 1) :
pour une équation $ax^2 + bx + c = 0$, si $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$, les racines sont données par $x_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

4. Résoudre les équations suivantes sur l'intervalle donné.

a) $\sin(4x + \frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x \in [\,0\,,\,\pi\,]$,

b) $4\,\sin^4(2x) - 11\,\sin^2(2x) + 6 = 0$, $x \in [-\frac{3\pi}{2}\,,\,-\frac{\pi}{2}\,]$,

c) $\tan\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $x \in [\,0\,,\,\pi\,]$,

d) $\cot^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{3}$, $x \in \,]\,0\,,\,2\pi\,[$.

5. Résoudre les équations suivantes :

a) $\sin(2x) = \sin(x + \frac{\pi}{3})$ c) $\cos(2x) = \sin(3x)$

b) $\cos(2x) = \cos(\frac{x}{3})$ d) $\tan(\frac{x}{3}) = \cot(x - \frac{\pi}{6})$

6. Résoudre les inéquations suivantes dans l'intervalle donné :

a) $\sin x \geq \frac{1}{2}$, $4\pi \leq x < 5\pi$,

b) $-\frac{1}{2} < \cos x < 0$, $-5\pi \leq x < -3\pi$,

c) $\sin(\,3x + \frac{\pi}{4}\,) > \sin(-\frac{3\,\pi}{4}\,)$, $-2\pi \leq x < 0$,

d) $\tan x \leq -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\quad 0 \leq x < 2\pi$,

e) $\cot x > \sqrt{3}$, $\quad -2\pi \leq x < \pi$,

f) $\tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\quad x \in [-\pi\, , \, 0]$.

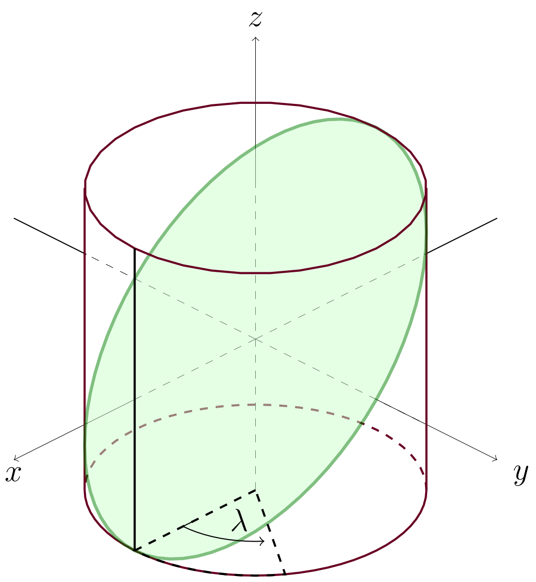
7. Soit A l'expression définie par $A = \dfrac{\cos(x - \frac{\pi}{2}) \cdot \tan(\frac{3\pi}{2} + x)}{\sin(x + \frac{5\pi}{2}) - \cos(\pi - x)}$.

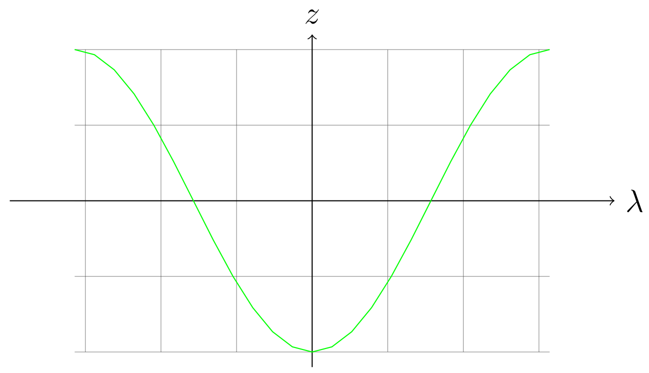
a) Déterminer le domaine de définition de A .

b) Simplifier cette expression.

8. Exercice récréatif

On considère un cylindre centré en $(0, 0, 0)$, de rayon R. Celui-ci est intersecté par un plan contenant l'axe (Oy). L'angle formé par le plan et l'horizontale est de α. On découpe le cylindre le long d'une arête verticale et on le déplie. Décrire la courbe que forme l'intersection entre le cylindre et le plan.





Réponses de la série 3

1. a) $A=-\cos x$

b) $B=-\sin x$

c) $C=-\cos x$

d) $D=\sin x$

e) $E=\tan x$

f) $F=\begin{cases}\sin x & \text{si } \exists\ k\in\mathbb{N} \text{ tel que } \quad n=4k\\ \cos x & \text{si } \exists\ k\in\mathbb{N} \text{ tel que } \quad n=4k+1\\ -\sin x & \text{si } \exists\ k\in\mathbb{N} \text{ tel que } \quad n=4k+2\\ -\cos x & \text{si } \exists\ k\in\mathbb{N} \text{ tel que } \quad n=4k+3\end{cases}$

2. a) $S=\{\frac{47\pi}{3}\}$

b) $S=\{\frac{91\pi}{6}\,,\ \frac{95\pi}{6}\}$

c) $S=\{-\frac{13\pi}{4}\}$

d) $S=\{-\frac{5\pi}{6}\}$

3. a) $S=\{\frac{2\pi}{3}+2k\pi\,,\ -\frac{2\pi}{3}+2k\pi\,,\ \pi+2k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z}\}$

b) $S=\{-\frac{31\pi}{6}\}$

4. a) $S=\left\{\ \frac{\pi}{4}\,,\ \frac{\pi}{3}\,,\ \frac{3\pi}{4}\,,\ \frac{5\pi}{6}\ \right\}$,

b) $S=\left\{-\frac{4\pi}{3}\,,\ -\frac{7\pi}{6}\,,\ -\frac{5\pi}{6}\,,\ -\frac{2\pi}{3}\ \right\}$,

c) $S=\left\{\ \frac{\pi}{4}\,,\ \frac{3\pi}{4}\ \right\}$,

d) $S=\left\{\ \frac{2\pi}{3}\,,\ \frac{4\pi}{3}\ \right\}$.

5. a) $S=\{\frac{\pi}{3}+2k\pi\,,\ \frac{2\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}\,,\ k\in\mathbb{Z}\}$,

b) $S=\{\frac{6k\pi}{5}\,,\ \frac{6k\pi}{7}\,,\ k\in\mathbb{Z}\}$,

c) $S=\{\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5}\,,\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z}\}$,

d) $S=\{\frac{\pi}{2}+\frac{3k\pi}{4}\,,\ k\in\mathbb{Z}\}$.

6. a) $S=\ [\,\frac{25\pi}{6}\,,\ \frac{29\pi}{6}\,]$,

b) $S=\,]-\frac{14\pi}{3}\,,\ -\frac{9\pi}{2}\,[\ \cup\ ]-\frac{7\pi}{2}\,,\ -\frac{10\pi}{3}\,[$,

c) $S=[-2\pi\,,\ -\frac{5\pi}{3}\,[\ \cup\ ]-\frac{3\pi}{2}\,,-\pi\,[\ \cup\ ]-\frac{5\pi}{6}\,,-\frac{\pi}{3}\,[\ \cup\ ]-\frac{\pi}{6}\,,0\,[$,

d) $S=\,]\,\frac{\pi}{2}\,,\ \frac{5\pi}{6}\,]\ \cup\ ]\,\frac{3\pi}{2}\,,\ \frac{11\pi}{6}\,]$,

e) $S=\,]-2\pi\,,\ -\frac{11\pi}{6}\,[\ \cup\ ]-\pi\,,\ -\frac{5\pi}{6}\,[\ \cup\ ]\,0\,,\ \frac{\pi}{6}\,[$,

f) $S=\{-\pi\}\ \cup\ \left]-\frac{5\pi}{6}\,,\,-\frac{\pi}{2}\right]\ \cup\ \left]-\frac{\pi}{3}\,,\,0\right]$.

7. a) $D_{\text{def}}=\mathbb{R}-\{\frac{k\pi}{2}\,,\ k\in\mathbb{Z}\}$

b) $\forall\ x\in D_{\text{def}}\,,\quad A=-\frac{1}{2}$