Série 11

1. Exprimer les nombres suivants à l'aide de la fonction logarithme :

a) $A = -1\,,$ b) $B = \frac{1}{2}\,,$ c) $C = 3\,.$

2. Exprimer les quantités suivantes de la façon la plus simple possible, à l'aide d'une seule fonction logarithme :

a) $A = \ln 15 - \ln 6 + 3\,\ln 2\,,$ b) $B = \ln(3 \cdot \sqrt{e}\,) + \ln\left(\frac{2\sqrt{2}}{9}\right) - \frac{1}{2}\,\ln 8\,.$

3. Résoudre les équations suivantes :

a) $3\,\ln 2 + \ln\left(\frac{1}{2} - x\right) = \ln\left(\frac{x-9}{x+1}\right)$ b) $\ln(\sin x) = 1 + \ln(\cos x)$

c) $\ln\left(2x - 13 - \frac{15}{x}\right) + \ln\sqrt{2} = \ln(2x - 30) - \ln\sqrt{2}$

4. Résoudre les trois inéquations suivantes :

a) $\ln\sqrt{3-x} + \ln\sqrt{x+1} \le \ln\sqrt{10-6x}$

b) $\ln\left(2x - \frac{1}{x}\right) < 2 + \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

c) $\ln\frac{x-4}{x-6} \le -\frac{1}{2}\,\ln\left(\frac{1}{4}\right) + \ln(2x) - 2\,\ln|x-6|$

5. Déterminer la surface délimitée par les droites $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ et

$$y = \frac{x}{x+1},$$

sans faire appel à la notion d'intégrale.

6. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant :

$$\begin{cases} \ln(6-x) - \ln y = \ln\left(\frac{6-x}{4x}\right) + 3\ln 2 \\ \ln(2) + \ln(4y^2+1) - \ln(2y+3) \le \ln(x^2-2) \end{cases}$$

7. Montrer que pour tous $a, b > 0$, on a

$$\frac{\ln(a) + \ln(b)}{2} \leq \ln\left(\tfrac{a+b}{2}\right).$$

"La moyenne arithmétique des logarithmes est inférieure ou égale au logarithme de la moyenne arithmétique."

8. Calculer les limites suivantes en utilisant les règles de calculs des limites :

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} [x - \ln(x)]$ b) pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to 0^+} [x^n - \ln(x)]$

Calculer les limites suivantes indéterminées en utilisant la définition géométrique du logarithme :

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} [x - \ln(x)]$ d) pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to +\infty} [x^n - \ln(x)]$

9. Calculer la limite suivante en utilisant la définition géométrique du logarithme :

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x}.$$

Indication : Comparer $\ln(x)$ à l'aire du polygone construit sur les trois abscisses 1, a et x pour tout $1 < a < x$.

Réponses de la série 11

1. a) $A = \ln\left(\frac{1}{e}\right)$, b) $B = \ln\left(\sqrt{e}\right)$, c) $C = \ln\left(e^3\right)$.

2. a) $A = \ln 20$ b) $B = \ln\left(\frac{\sqrt{e}}{3}\right)$

3. a) $S = \left\{-\frac{13}{8}\right\}$ b) $S = \{\arctan e + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ c) $S = \emptyset$

4. a) $S = \left]-1\,,\,1\right]$ b) $S = \left]\frac{\sqrt{2}}{2}\,,\,\sqrt{\frac{1+e^2}{2}}\right[$ c) $S = \left[2\,,\,4\right[\cup \left]6\,,\,12\right]$

5. $S = 2 - \ln(3)$

6. $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 2y \text{ et } y \in [1\,,\,3[\ \}$

8. a) $\lim\limits_{x \to 0^+} [x - \ln(x)] = +\infty$ b) $\lim\limits_{x \to 0^+} [x^n - \ln(x)] = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} [x - \ln(x)] = +\infty$ d) $\lim\limits_{x \to +\infty} [x^n - \ln(x)] = +\infty$

9. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$