

Série 10 bis

1. Déterminer la fonction dérivée des fonctions suivantes :

a) $a(x) = \cos\left(\frac{1+2x}{x}\right)$

d) $d(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

b) $b(x) = \cos^2(\sin x)$

e) $e(x) = \arccos(3x - 1)$

c) $c(x) = [\sin(px^q)]^r, p, q, r \in \mathbb{N}^*$

f) $f(x) = \arctan\left(\frac{12 \sin x}{5+13 \cos x}\right)$

2. Cet exercice a pour but de montrer comment on peut calculer la dérivée des fonctions trigonométriques réciproques sans passer par le rapport de Newton et sans appliquer directement la formule vue en cours.

a) En dérivant à l'aide des règles de calcul chaque côté de l'égalité

$$\sin(\arcsin(x)) = x,$$

montrer que $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \forall x \in]-1, 1[.$

b) Reproduire la même méthode pour calculer $\arccos'(x)$ et $\arctan'(x)$

3. Soit Γ la courbe d'équation $y = 3 \arctan\left(\frac{\tan x}{3}\right), x \in [0, \frac{\pi}{2}[.$

a) Montrer que la courbe Γ admet une tangente de pente $m = 3$.

Déterminer l'équation cartésienne de cette tangente.

b) Pour quelle valeur de x , la courbe Γ admet-elle au point $(x, f(x))$, une normale de pente $m = -\frac{1}{2}$?

4. Soit Γ la courbe d'équation $y = \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right).$

Montrer que la droite t d'équation $y = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}(1 + \sqrt{3}x)$ est tangente à Γ .

5. Montrer que la fonction dérivée de la fonction f est identiquement nulle.

$$f(x) = \arctan x + \arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

En déduire l'expression de $\arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ en fonction de $\arctan x$ sur chaque intervalle de son domaine de continuité.

Puis déduire le graphe de la fonction $\arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ de celui de la fonction $\arctan x$.

6. Exercice facultatif

Montrer que les fonctions suivantes ont même fonction dérivée sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$.

$$f(x) = \arctan\left(\frac{12 \sin x}{5+13 \cos x}\right) \quad \text{et} \quad g(x) = 2 \arctan\left(\frac{3+2 \tan(x/2)}{3-2 \tan(x/2)}\right).$$

Puis en déduire que $f(x) = g(x) - \frac{\pi}{2}$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

7. On considère la fonction $f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) + \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$.

- a) Donner le domaine de définition de la fonction f .
 - b) Déterminer la fonction dérivée de f ainsi que son domaine de définition.
 - c) En déduire la représentation graphique de f .
-

Réponses de la série 10 bis

$$1. \quad a) \quad a'(x) = \frac{1}{x^2} \sin\left(\frac{1+2x}{x}\right) \qquad d) \quad d'(x) = -\frac{2}{(\sin x - \cos x)^2}$$

$$b) \quad b'(x) = -\cos x \sin(2 \sin x) \qquad e) \quad e'(x) = -\frac{3}{\sqrt{-9x^2 + 6x}}$$

$$c) \quad c'(x) = pqr x^{q-1} \cos(px^q) [\sin(px^q)]^{r-1} \qquad f) \quad f'(x) = \frac{12}{13 + 5 \cos x}$$

$$3. \quad a) \quad \text{En } x = \frac{\pi}{3}, \quad \Gamma \text{ admet une tangente d'équation : } y - \frac{\pi}{2} = 3\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$b) \quad x = \arcsin \frac{3}{4}$$

$$4. \quad \text{La droite } t \text{ est tangente à } \Gamma \text{ en } T\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$$

$$5. \quad \arctan \frac{1-x}{1+x} = \begin{cases} -\frac{3\pi}{4} - \arctan x & \text{si } x < -1 \\ \frac{\pi}{4} - \arctan x & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

$$6. \quad f'(x) = g'(x) = \frac{12}{13 + 5 \cos x}$$

$$7. \quad a) \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$b) \quad f'(x) = \frac{2}{1+x^2} [\operatorname{sgn}(1-x^2) + \operatorname{sgn} x], \quad D_{f'} = \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}.$$

$$c) \quad f(x) = \begin{cases} -\pi - 4 \arctan x & \text{si } x < -1 \\ 0 & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ 4 \arctan x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ \pi & \text{si } x > 1 \end{cases}$$
