Corrigé 9

1. Déterminer le domaine de définition, puis résoudre l'équation suivante :

$$\arcsin(x) + \arcsin(\sqrt{3}x) = \frac{5\pi}{6}.$$

- $D_{def} = \left\{x \in \mathbb{R} | x \in [-1,1] \text{ et } \sqrt{3}x \in [-1,1]\right\} = \left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$
- Posons $\alpha = \arcsin(x)$ et $\beta = \arcsin(\sqrt{3}x)$. On a $\alpha + \beta \in [-\pi, \pi]$ et donc l'équation $\alpha + \beta = \frac{5\pi}{6}$ a un sens puisque $\frac{5\pi}{6} \in [-\pi, \pi]$
- Résolution de l'équation $\arcsin(x) + \arcsin(\sqrt{3}x) = \frac{5\pi}{6}$

$$\begin{aligned}
\alpha = \frac{5\pi}{6} - \beta \quad & \Longrightarrow \sin(\alpha) = \sin\left(\frac{5\pi}{6} - \beta\right) \\
& \Longleftrightarrow \ x = \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\cos(\beta) - \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)\sin(\beta) \\
& \Longleftrightarrow \ x = \frac{1}{2}\sqrt{1-3x^2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{3}x \\
& \Longleftrightarrow \ -x = \sqrt{1-3x^2}
\end{aligned}$$

Sous la condition $x \leq 0$, on peut élever au carré, on trouve

$$x^2 = 1 - 3x^2 \iff 4x^2 = 1 \iff x = -\frac{1}{2} \in D_{def}.$$

- On teste dans l'équation si le candidat $x = \frac{-1}{2}$ est solution :

$$\arcsin\left(\frac{-1}{2}\right) + \arcsin\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2} \neq \frac{5\pi}{6}.$$

D'où $S = \emptyset$.

2. Déterminer le domaine de définition, puis résoudre l'équation suivante :

$$2 \arccos\left(\tfrac{x}{4}\right) + \arcsin\left(\tfrac{x^2-2}{x^2}\right) = \frac{3\pi}{2}.$$

- $D_{\text{def}} = \left\{x \in \mathbb{R} \ \mid \ x \neq 0, \ \ \frac{x}{4} \in [-1, 1] \ \text{ et } \ \frac{x^2-2}{x^2} \in [-1, 1]\right\}.$
  - $\frac{x}{4} \in [-1, 1] \quad \Leftrightarrow \quad x \in [-4, 4].$

- $-1 \leq \frac{x^2-2}{x^2} \quad \Leftrightarrow \quad -x^2 \leq x^2-2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)(x+1) \geq 0$
  $\Leftrightarrow \quad x \in \,]-\infty\,,\,-1\,] \,\cup\, [\,1\,,\,+\infty\,[\,.$
- $\frac{x^2-2}{x^2} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-2 \leq x^2 \quad \Leftrightarrow \quad -2 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \mathbb{R}^*\,.$

L'intersection des trois domaines donne $D_{\text{def}} = [-4\,,\,-1\,] \,\cup\, [\,1\,,\,+4\,]\,.$

- Posons $\alpha = \arccos\left(\frac{x}{4}\right)$ et $\beta = \arcsin\left(\frac{x^2-2}{x^2}\right)$.

  $\alpha \in [\,0\,,\,\pi\,]$ et $\beta \in [-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\,]$ d'où $2\,\alpha+\beta \in [-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{5\pi}{2}\,]\,.$

  L'équation $2\,\alpha+\beta = \frac{3\pi}{2}$ a donc bien un sens car $\frac{3\pi}{2} \in [-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{5\pi}{2}\,]\,.$

- Résolution de l'équation $2\,\arccos\left(\frac{x}{4}\right) = \frac{3\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{x^2-2}{x^2}\right)$

  On cherche à "se débarrasser" des fonctions arc en appliquant la fonction sinus ou la fonction cosinus aux deux membres de cette équation.

  Mais quelle fonction choisir ? L'une donne un résultat simple et l'autre débouche sur une équation compliquée et désagréable à résoudre.

  Il faut faire le bon choix !

  - En prenant le sinus des deux membres de l'équation, on obtient :

$$\begin{aligned} 2\,\alpha = \tfrac{3\pi}{2} - \beta \quad &\Rightarrow \quad \sin(2\,\alpha) = \sin\left(\tfrac{3\pi}{2} - \beta\right) \\ &\Leftrightarrow \quad 2\,\sin\alpha \cdot \cos\alpha = -\cos\beta \\ &\Leftrightarrow \quad 2\,\frac{x}{4} \cdot \sqrt{1-\left(\tfrac{x}{4}\right)^2} = -\sqrt{1-\left(\tfrac{x^2-2}{x^2}\right)^2}\,. \end{aligned}$$

  - En prenant le cosinus des deux membres de l'équation, on obtient :

$$\begin{aligned} 2\,\alpha = \tfrac{3\pi}{2} - \beta \quad &\Rightarrow \quad \cos(2\,\alpha) = \cos\left(\tfrac{3\pi}{2} - \beta\right) \\ &\Leftrightarrow \quad 2\,\cos^2\alpha - 1 = -\sin\beta \\ &\Leftrightarrow \quad 2\left(\frac{x}{4}\right)^2 - 1 = -\frac{x^2-2}{x^2}\,. \end{aligned}$$

  La deuxième méthode est évidemment la plus agréable.

  Mais attention ! En appliquant une fonction trigonométrique aux deux membres de cette équation, on perd l'équivalence, car ces fonctions ne sont pas injectives. On introduit peut-être des solutions parasites.

- Résolution de l'équation associée :

$$2\left(\frac{x}{4}\right)^2 - 1 = -\frac{x^2-2}{x^2} \quad \Leftrightarrow \quad x^4 - 16 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 2 \in D_{\text{def}}.$$

  Les deux valeurs obtenues $x=-2$ et $x=2$ sont des "candidats-solutions" (vraies solutions ou solutions parasites ?)

- On teste ces deux valeurs dans l'équation initiale :
  - $x=-2$: $\quad 2\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = 2\,\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{3\pi}{2}$
  - $x=+2$: $\quad 2\arccos\left(\frac{1}{2}\right)+\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = 2\,\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{5\pi}{6}\neq\dfrac{3\pi}{2}$

  Donc seul $x=-2$ est solution , $\quad S=\{-2\}$.

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les trois équations suivantes :

a) $\dfrac{\pi}{4}+\arctan(2x)=\dfrac{\pi}{2}-\arctan(3x)$

b) $2\arctan(x+\frac{1}{2})+\arctan(2x-1)=\dfrac{\pi}{2}$

c) $\arcsin x+\arcsin(2x)-\arccos(\sqrt{3}\,x)=\dfrac{\pi}{2}$

---

a) $\dfrac{\pi}{4}+\arctan(2x)=\dfrac{\pi}{2}-\arctan(3x)\,,\qquad D_{\text{def}}=\mathbb{R}\,.$

On pose $\alpha=\arctan(2x)$ et $\beta=\arctan(3x)$.

L'équation devient : $\frac{\pi}{4}+\alpha=\frac{\pi}{2}-\beta \;\Leftrightarrow\; \alpha=\frac{\pi}{4}-\beta \;\Rightarrow\; \tan\alpha=\tan(\frac{\pi}{4}-\beta)$.

Attention ! D'une part, la fonction tangente est non injective, mais d'autre part, elle n'est pas définie sur tout $\mathbb{R}$.

$$\tan\alpha=\tan(\tfrac{\pi}{4}-\beta)\;\Leftrightarrow\;\tan\alpha=\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\beta}{1+\tan\frac{\pi}{4}\,\tan\beta}\;\Leftrightarrow\;2x=\frac{1-3x}{1+3x}\,,\quad x\neq-\tfrac{1}{3}\,.$$

La valeur interdite $x=-\frac{1}{3}$ coïncide avec la valeur interdite $\beta=-\frac{\pi}{4}$.

Cette valeur est peut-être solution, il faut la tester dans l'équation initiale :

$\arctan(-\frac{2}{3})+\arctan(-1)<0$ donc $\arctan(-\frac{2}{3})+\arctan(-1)\neq\frac{\pi}{4}$.

Donc $x=-\frac{1}{3}$ n'est pas solution. On cherche des solutions dans $\mathbb{R}\setminus\{-\frac{1}{3}\}$:

$$2x=\frac{1-3x}{1+3x}\;\Leftrightarrow\;6x^2+5x-1=0\;\Leftrightarrow\;(x+1)\,(6x-1)=0$$
$$\Leftrightarrow\; x=-1 \;\text{ ou }\; x=\tfrac{1}{6}\,,$$

On teste ces deux "candidats-solutions" dans l'équation initiale :

- $x=-1$: $\quad \underbrace{\arctan(-2)}_{<0}+\underbrace{\arctan(-3)}_{<0}\neq\frac{\pi}{4}$.
- $x=\frac{1}{6}$: $\quad$ soient $\alpha=\arctan\frac{1}{3}\in[\,0\,,\,\frac{\pi}{2}\,]$ et $\beta=\arctan\frac{1}{2}\in[\,0\,,\,\frac{\pi}{2}\,]$.

  $\alpha+\beta\in[\,0\,,\,\pi\,]$ et $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}=1\;\Rightarrow\;\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$.

Seul $x = \frac{1}{6}$ est donc solution, $S = \left\{\frac{1}{6}\right\}$.

b) $2\,\arctan(x + \frac{1}{2}) + \arctan(2x - 1) = \dfrac{\pi}{2}\,, \qquad D_{\text{def}} = \mathbb{R}\,.$

On pose $\alpha = \arctan(x + \frac{1}{2})$ et $\beta = \arctan(2x - 1)$.

L'équation devient : $2\,\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2\,\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$

$$\Rightarrow \quad \tan(2\,\alpha) = \tan(\tfrac{\pi}{2} - \beta) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2\,\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} = \frac{1}{\tan\beta}\,, \qquad 2\,\alpha \neq \pm\tfrac{\pi}{2} \ \text{ et } \ \beta \neq 0\,.$$

Attention ! D'une part, la fonction tangente est non injective, mais d'autre part, elle n'est pas définie sur tout $\mathbb{R}$.

$$\frac{2\,\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} = \frac{1}{\tan\beta} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2\,(x + \frac{1}{2})}{1 - (x + \frac{1}{2})^2} = \frac{1}{2x - 1}\,, \qquad x \neq -\tfrac{3}{2} \ \text{ et } x \neq \tfrac{1}{2}\,.$$

Les valeurs interdites $x = -\frac{3}{2}$ et $x = \frac{1}{2}$ coïncident avec les valeurs interdites $\alpha = \pm\frac{\pi}{4}$ et $\beta = 0$.

Ces valeurs sont peut-être solutions, il faut les tester dans l'équation initiale :

- $x = -\frac{3}{2}$: $\quad 2\,\arctan(-1) + \arctan(-4) < 0\,,$
- $x = \frac{1}{2}$: $\quad 2\,\arctan(1) + \arctan(0) = \frac{\pi}{2}\,.$

Donc $x = \frac{1}{2}$ est solution.

On cherche d'éventuelles autres solutions dans $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}\,,\,\frac{1}{2}\}$:

$$\frac{2\,(x + \frac{1}{2})}{1 - (x + \frac{1}{2})^2} = \frac{1}{2x - 1} \quad \Leftrightarrow \quad (2x + 1)\,(2x - 1) = 1 - \left(x + \tfrac{1}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 5x^2 + x - \tfrac{7}{4} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x - \tfrac{1}{2}\right)\,\left(5x + \tfrac{7}{2}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\tfrac{7}{10}\,.$$

On teste cette valeur dans l'équation initiale :

$x = -\frac{7}{10}$: $2\,\arctan(-\frac{1}{5}) + \arctan(-\frac{12}{5}) < 0$, donc $x = -\frac{7}{10}$ n'est pas solution.

L'unique solution est $x = \frac{1}{2}\,, \qquad S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

c) $\arcsin x + \arcsin(2x) - \arccos(\sqrt{3}\,x) = \dfrac{\pi}{2}\,.$

$D_{\text{def}} = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \in [-1\,,\,1\,],\ \ 2x \in [-1\,,\,1\,] \ \text{ et } \ \sqrt{3}x \in [-1\,,\,1\,]\right\} = [-\frac{1}{2}\,,\,\frac{1}{2}\,]\,.$

Soient $\alpha = \arcsin x\,, \quad \beta = \arcsin(2x) \quad$ et $\quad \gamma = \arccos(\sqrt{3}\,x)\,.$

L'équation s'écrit : $\alpha + \beta - \gamma = \frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} + \gamma$

$$\Rightarrow \quad \sin(\alpha + \beta) = \sin\left(\tfrac{\pi}{2} + \gamma\right) \quad \Leftrightarrow \quad \sin\alpha\,\cos\beta + \cos\alpha\,\sin\beta = \cos\gamma$$

$$\Leftrightarrow \quad x\,\sqrt{1 - (2x)^2} + 2x\,\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{3}\,x \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0\,, & \text{ou} \\ \sqrt{1 - 4x^2} + 2\,\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{3} & \end{cases}$$

- $x = 0$ n'est pas solution : $\arcsin(0) + \arcsin(0) - \arccos(0) = -\frac{\pi}{2} \neq \frac{\pi}{2}$,
- $\sqrt{1-4x^2} + 2\sqrt{1-x^2} = \sqrt{3}$

  $\Leftrightarrow \quad 1 - 4x^2 + 4(1-x^2) + 4\sqrt{1-4x^2}\sqrt{1-x^2} = 3$

  $\Leftrightarrow \quad 4\sqrt{1-4x^2}\sqrt{1-x^2} = 8x^2 - 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2\sqrt{1-4x^2}\sqrt{1-x^2} = 4x^2 - 1$.

  Donc $4x^2 - 1 \geq 0$, or $x \in D_{\text{def}} = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$,

  les seules solutions de cette équation sont donc $x = \pm\frac{1}{2}$.

On teste ces deux valeurs dans l'équation initiale :

- $x = -\frac{1}{2}$: $\arcsin(-\frac{1}{2}) + \arcsin(-1) - \arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{3\pi}{2} \neq \frac{\pi}{2}$,
- $x = \frac{1}{2}$: $\arcsin\frac{1}{2} + \arcsin 1 - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$.

Il n'y a donc qu'une seule solution $x = \frac{1}{2}$, $\quad S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

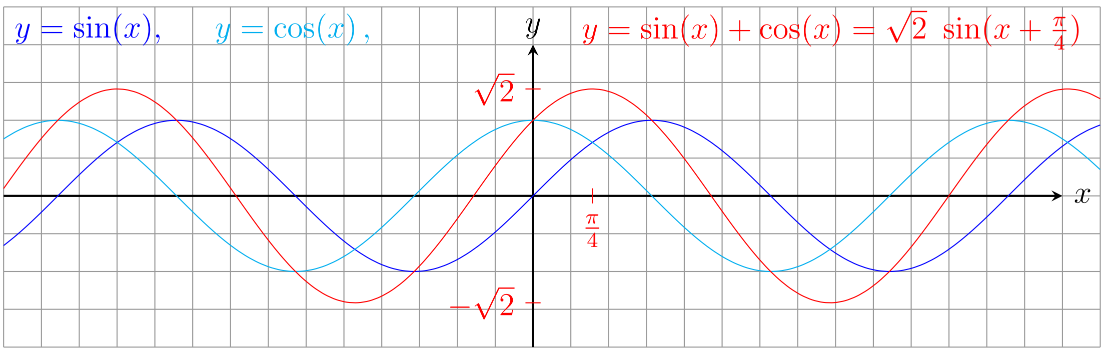
4. Soit la fonction f de $A \subset \mathbb{R}$ dans $B \subset \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin x + \cos x$.

Déterminer A et B de sorte que f soit une bijection.

Déterminer alors la fonction réciproque de f.

En vue de déterminer l'ensemble $\operatorname{Im} f$, on cherche à exprimer f à l'aide d'une seule fonction trigonométrique :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x + \cos x \\ &= \sqrt{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right] \\ &= \sqrt{2}\left[\cos(\tfrac{\pi}{4})\sin x + \sin(\tfrac{\pi}{4})\cos x\right] \\ &= \sqrt{2}\sin(x + \tfrac{\pi}{4}). \end{aligned}$$



On déduit donc que $\operatorname{Im} f = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, $\quad B = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

- **Une solution**

  On définit l'ensemble de départ A en se servant de la détermination principale du sinus : l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right]$.

  La fonction $c(x)=\sqrt{2}\,\sin(x+\frac{\pi}{4})$ est injective si $x+\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right]$:

  La fonction $\begin{array}{llll} f: & A=\left[-\frac{3\pi}{4}\,,\,\frac{\pi}{4}\right] & \longrightarrow & B=\left[-\sqrt{2}\,,\,\sqrt{2}\right] \\ & x & \longmapsto & \sqrt{2}\,\sin(x+\frac{\pi}{4}) \end{array}$ est donc bijective.

  Elle admet une fonction réciproque f^{-1}.

  Pour déterminer l'expression de cette fonction réciproque, on résout l'équation $y=f(x)$ par rapport à la variable x en considérant y comme un paramètre.

  $$y=\sqrt{2}\,\sin(x+\tfrac{\pi}{4}) \quad\Leftrightarrow\quad \sin(x+\tfrac{\pi}{4})=\frac{y}{\sqrt{2}}$$

  Or $\frac{y}{\sqrt{2}}\in[-1\,,\,1]$ et $x+\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right]$, donc

  $$\sin(x+\tfrac{\pi}{4})=\frac{y}{\sqrt{2}} \quad\Leftrightarrow\quad x+\tfrac{\pi}{4}=\arcsin(\tfrac{y}{\sqrt{2}}) \quad\Leftrightarrow\quad x=-\tfrac{\pi}{4}+\arcsin(\tfrac{y}{\sqrt{2}})\,.$$

  Cette fonction réciproque de $f(x)=\sin x+\cos x$ est donc définie par

  $$\begin{array}{llll} f^{-1}: & \left[-\sqrt{2}\,,\,\sqrt{2}\right] & \longrightarrow & \left[-\frac{3\pi}{4}\,,\,\frac{\pi}{4}\right] \\ & x & \longmapsto & -\frac{\pi}{4}+\arcsin(\frac{x}{\sqrt{2}}) \end{array}$$

- **Une autre solution**

  On définit l'ensemble de départ A en se servant d'une détermination non principale du sinus : par exemple l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{3\pi}{2}\right]$.

  La fonction $c(x)=\sqrt{2}\,\sin(x+\frac{\pi}{4})$ est injective si $x+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{3\pi}{2}\right]$:

  La fonction $\begin{array}{llll} f: & A=\left[\frac{\pi}{4}\,,\,\frac{5\pi}{4}\right] & \longrightarrow & B=\left[-\sqrt{2}\,,\,\sqrt{2}\right] \\ & x & \longmapsto & \sqrt{2}\,\sin(x+\frac{\pi}{4}) \end{array}$ est donc bijective.

  Elle admet une fonction réciproque f^{-1}.

  Pour déterminer l'expression de cette fonction réciproque, on résout l'équation $y=f(x)$ par rapport à la variable x en considérant y comme un paramètre.

  $$y=\sqrt{2}\,\sin(x+\tfrac{\pi}{4}) \quad\Leftrightarrow\quad \sin(x+\tfrac{\pi}{4})=\frac{y}{\sqrt{2}}$$

  Or $\frac{y}{\sqrt{2}}\in[-1\,,\,1]$ et $x+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{3\pi}{2}\right]$, donc

  $$\sin(x+\tfrac{\pi}{4})=\frac{y}{\sqrt{2}} \quad\Leftrightarrow\quad x+\tfrac{\pi}{4}=\pi-\arcsin(\tfrac{y}{\sqrt{2}}) \quad\Leftrightarrow\quad x=\tfrac{3\pi}{4}-\arcsin(\tfrac{y}{\sqrt{2}})\,.$$

  Cette fonction réciproque de $f(x)=\sin x+\cos x$ est donc définie par

$$f^{-1}: \quad \left[-\sqrt{2}\,,\,\sqrt{2}\right] \longrightarrow \left[\tfrac{\pi}{4}\,,\,\tfrac{5\pi}{4}\right]$$
$$x \longmapsto \tfrac{3\pi}{4} - \arcsin(\tfrac{x}{\sqrt{2}})$$

- **Une troisième solution**

On exprime f à l'aide de la fonction cosinus, puis on définit l'ensemble de départ A en se servant de la détermination principale du cosinus : l'intervalle $[\,0\,,\,\pi\,]$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x + \sin x \\ &= \sqrt{2}\,\left[\tfrac{\sqrt{2}}{2}\,\cos x + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\,\sin x\right] \\ &= \sqrt{2}\,\left[\cos(\tfrac{\pi}{4})\,\cos x + \sin(\tfrac{\pi}{4})\,\sin x\right] \\ &= \sqrt{2}\,\cos(x - \tfrac{\pi}{4}). \end{aligned}$$

La fonction $c(x) = \sqrt{2}\,\cos(x - \frac{\pi}{4})$ est injective si $x - \frac{\pi}{4} \in [\,0\,,\,\pi\,]$:

La fonction $f: \; A = \left[\frac{\pi}{4}\,,\,\frac{5\pi}{4}\right] \longrightarrow B = \left[-\sqrt{2}\,,\,\sqrt{2}\right]$ est donc bijective.

$$x \longmapsto \sqrt{2}\,\cos(x - \tfrac{\pi}{4})$$

Elle admet une fonction réciproque f^{-1}.

Pour déterminer l'expression de cette fonction réciproque, on résout l'équation $y = f(x)$ par rapport à la variable x en considérant y comme un paramètre.

$$y = \sqrt{2}\,\cos(x - \tfrac{\pi}{4}) \quad \Leftrightarrow \quad \cos(x - \tfrac{\pi}{4}) = \frac{y}{\sqrt{2}}$$

Or $\frac{y}{\sqrt{2}} \in [-1\,,\,1]$ et $x - \frac{\pi}{4} \in [\,0\,,\,\pi\,]$, donc

$$\cos(x - \tfrac{\pi}{4}) = \frac{y}{\sqrt{2}} \quad \Leftrightarrow \quad x - \tfrac{\pi}{4} = \arccos(\tfrac{y}{\sqrt{2}}) \quad \Leftrightarrow \quad x = \tfrac{\pi}{4} + \arccos(\tfrac{y}{\sqrt{2}})\,.$$

Cette fonction réciproque de $f(x) = \sin x + \cos x$ est donc définie par

$$f^{-1}: \quad \left[-\sqrt{2}\,,\,\sqrt{2}\right] \longrightarrow \left[\tfrac{\pi}{4}\,,\,\tfrac{5\pi}{4}\right]$$
$$x \longmapsto \tfrac{\pi}{4} + \arccos(\tfrac{x}{\sqrt{2}})$$

Remarque : il s'agit de la même fonction f^{-1} que dans la deuxième solution. seule son expression est différente.

5. Calculer $\arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \in \mathbb{R}^*$.

En déduire la représentation graphique de la fonction $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ à partir de celle de la fonction $\arctan x$.

Localisation de $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$:

$\alpha = \arctan(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \beta = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\quad \Rightarrow \quad \alpha+\beta \in \left]-\pi, \pi\right[$.

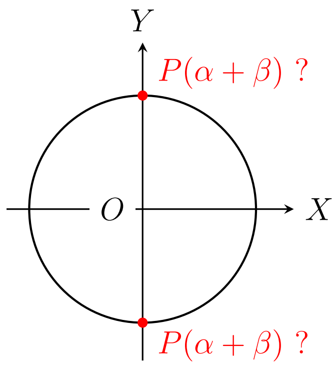
Calcul de $\tan(\alpha+\beta)$:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta}, \quad \text{avec} \quad \alpha = \arctan x \quad \text{et} \quad \beta = \arctan\left(\frac{1}{x}\right).$$

Le dénominateur est nul : $1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta = 1 - x \cdot \frac{1}{x} = 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^*$.

Donc $\tan(\alpha+\beta)$ n'existe pas.

Or $\alpha+\beta \in \left]-\pi, \pi\right[$ et $\tan(\alpha+\beta)$ n'existe pas, implique que $\alpha+\beta = \pm\dfrac{\pi}{2}$.



On essaie de déterminer $\alpha+\beta$:

- avec un argument de signe :
  - si $x < 0$: $\alpha+\beta = \underbrace{\arctan(x)}_{<0} + \underbrace{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}_{<0} = -\dfrac{\pi}{2}$,
  - si $x > 0$: $\alpha+\beta = \underbrace{\arctan(x)}_{>0} + \underbrace{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}_{>0} = +\dfrac{\pi}{2}$.
- Ou en calculant $\sin(\alpha+\beta)$:

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta \\
&= \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\beta}}+\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}\cdot\frac{\tan\beta}{\sqrt{1+\tan^2\beta}} \\
&= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{1}{x})^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1+(\frac{1}{x})^2}} \\
&= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{\frac{1}{x}\cdot|x|}{\sqrt{x^2+1}} \\
&= \frac{x\cdot|x|}{x^2+1}+\frac{\frac{1}{x}\cdot|x|}{x^2+1} \\
&= \frac{x\cdot x\cdot\operatorname{sgn}(x)}{x^2+1}+\frac{\frac{1}{x}\cdot x\cdot\operatorname{sgn}(x)}{x^2+1} \\
&= \frac{x^2+1}{x^2+1}\cdot\operatorname{sgn}(x) \\
&= \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x<0 \\ +1 & \text{si} \quad x>0\,. \end{cases}
\end{aligned}$$

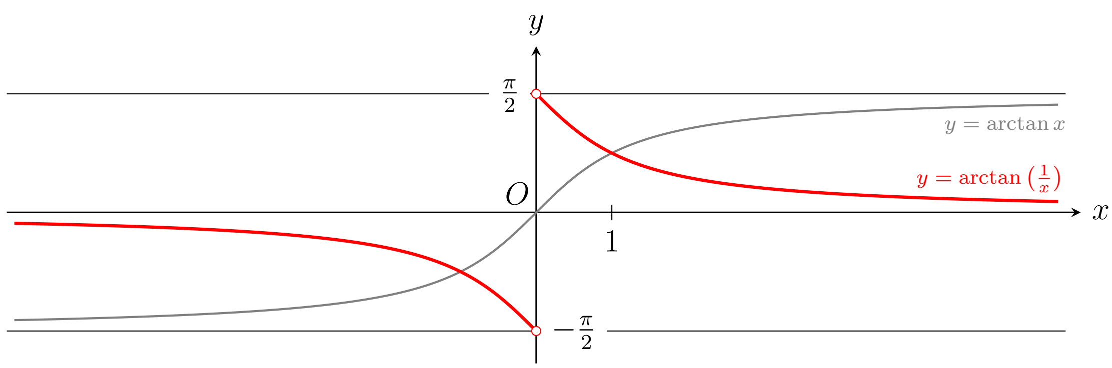
Or $\quad \alpha+\beta\in\,]-\pi\,,\,\pi\,[\,,\quad$ donc $\quad \alpha+\beta=\begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \text{si } x<0 \\ +\frac{\pi}{2} & \text{si } x>0\,, \end{cases}$

$$\arctan x+\arctan\left(\tfrac{1}{x}\right)=\begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \text{si} \quad x<0 \\ +\frac{\pi}{2} & \text{si} \quad x>0\,. \end{cases}$$

On en déduit l'expression de $f(x)=\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ en fonction de $\arctan x$:

$$f(x)=\arctan\left(\tfrac{1}{x}\right)=\begin{cases} -\frac{\pi}{2}-\arctan x & \text{si} \quad x<0 \\ +\frac{\pi}{2}-\arctan x & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

puis le graphe de $f(x)=\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ à partir de celui de $\arctan(x)$:



6. Dans un triangle ABC les angles α, β, γ sont définis par

$$\alpha = \arccos(4x) \qquad \beta = \arccos(-3x) \qquad \gamma = \arccos(24x^2)\,.$$

On connaît aussi le rayon R de son cercle circonscrit $R = 25$.

a) Déterminer la valeur de x ainsi que les valeurs de $\sin\alpha$, $\sin\beta$ et $\sin\gamma$.

b) Calculer le rayon r du cercle inscrit du triangle ABC.

---

a) La somme des mesures des trois angles du triangle ABC vaut π.

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi \quad\Leftrightarrow\quad \alpha+\beta=\pi-\gamma \quad\Rightarrow\quad \cos(\alpha+\beta)=\cos(\pi-\gamma)$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\alpha\,\cos\beta-\sin\alpha\,\sin\beta=-\cos\gamma$$

$$\Leftrightarrow \quad (4x)\,(-3x)-\sqrt{1-(4x)^2}\,\sqrt{1-(-3x)^2}=-24x^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{1-(4x)^2}\,\sqrt{1-(-3x)^2}=12x^2$$

$$\Leftrightarrow \quad (1-16x^2)\,(1-9x^2)=144x^4 \quad\Leftrightarrow\quad 25x^2=1 \quad\Leftrightarrow\quad x=\pm\frac{1}{5}\,.$$

On teste ces deux valeurs : l'unique solution est $x=\frac{1}{5}$.
En effet pour $x = \frac{-1}{5}$, on doit considérer la somme $\alpha+\beta+\gamma$ avec $\alpha = \arccos(\frac{-4}{5}) > \arccos(\frac{-\sqrt{2}}{2}) = \frac{3\pi}{4}$ et $\beta = \arccos(\frac{3}{5}) > \arccos(\frac{\sqrt{2}}{2}) > \frac{\pi}{4}$. Donc $\alpha+\beta>\pi$ et donc $\alpha+\beta+\gamma>\pi$.
Pour $x=\frac{1}{5}$, on peut localiser que

- $0<\alpha=\arccos(\frac{4}{5})<\arccos(\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{\pi}{4}$
- $0<\beta=\arccos(\frac{-3}{5})<\arccos(\frac{-\sqrt{2}}{2})=\frac{3\pi}{4}$
- $\gamma=\arccos(\frac{24}{25})\in]0,\pi[$

Donc $\alpha+\beta\in]0,\pi[$ et $\pi-\gamma\in]0,\pi[$. Or on a que $\cos(\alpha+\beta)=\cos(\pi-\gamma)$, donc par injectivité du cosinus, nécessairement $\alpha+\beta=\pi-\gamma\Rightarrow\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

Et on en déduit le sinus des trois angles :

- $\sin\alpha=\sin(\arccos\frac{4}{5})=+\sqrt{1-(\frac{4}{5})^2}=\frac{3}{5}$,
- $\sin\beta=\sin[\arccos(-\frac{3}{5})]=+\sqrt{1-(-\frac{3}{5})^2}=\frac{4}{5}$,
- $\sin\gamma=\sin(\arccos\frac{24}{25})=+\sqrt{1-(\frac{24}{25})^2}=\frac{7}{25}$.

b) Connaissant le rayon R du cercle circonscrit au triangle ABC, on en déduit la mesure des trois côtés a, b et c.

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R\,,$$

$$a = 2R \sin\alpha = 30\,, \qquad b = 2R \sin\beta = 40 \qquad \text{et} \qquad c = 2R \sin\gamma = 14\,.$$

Connaissant la mesure des trois côtés a, b et c, on en déduit le rayon r du cercle inscrit au triangle ABC.

$$r = \frac{S}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}{p}} \qquad \text{où} \qquad p = \frac{1}{2}\,(a+b+c) = 42\,,$$

$$r = \sqrt{\frac{12 \cdot 2 \cdot 28}{42}} = 4\,.$$