Corrigé 6

1. Résoudre les équations suivantes :

a) $2\tan^2(x) + 3\dfrac{\tan(x)}{\cos(x)} = \dfrac{2}{\cos^2(x)}$

b) $\cos(2x) + \sin(x)\tan(x) = 1$

c) $\tan x + 3\,\sin^2 x - \cos^2 x = 0$

d) $\sin^2 x + 8\,\sin(2x) + 3\,\cos^2 x = 10\,\cot x$

e) $1 + 2\,\sin x + \cos x + 2\,\tan x = 0$

f) $2\,\sin^2 x + \sqrt{3}\,\sin(2x) - 3 = 0\,, \qquad 0 < x < 2\pi$

g) $\dfrac{\sin(2x)}{1-\cos x} + 2 = 2\,(\sin x + 2\cos x)$

---

a) $2\tan^2(x) + 3\dfrac{\tan(x)}{\cos(x)} = \dfrac{2}{\cos^2(x)}\,, \qquad D_{\text{def}} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

L'équation ne change pas lorsqu'on remplace x par $\pi - x$, on pose donc $z = \sin(x)$. z est défini $\forall x \in D_{\text{def}}$.

L'équation devient: $2\dfrac{z^2}{1-z^2} + 3\dfrac{z}{1-z^2} - \dfrac{2}{1-z^2} = 0 \iff 2z^2 + 3z - 2 = 0$

$\iff 2\left(z - \frac{1}{2}\right)(z+2) = 0 \iff z = \frac{1}{2}$ ou $z = -2$

$\iff \sin(x) = \frac{1}{2}$ ou $\sin(x) = -2$

Comme $\sin(x) = -2$ ne possède aucune solution, l'ensemble solution est donc celui de $\sin(x) = \frac{1}{2}$:

$S = \left\{\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \subset D_{\text{def}}$.

b) $\cos(2x) + \sin(x)\tan(x) = 1 \qquad D_{\text{def}} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.
L'équation ne change pas lorsqu'on remplace x par $-x$, on pose donc $z = \cos(x)$. z est défini $\forall x \in D_{def}$.
En utilisant la formule $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$, l'équation devient :

$$
\begin{aligned}
& 2z^2 - 1 + \frac{1-z^2}{z} = 1 \\
\iff\ & 2z^3 - z + 1 - z^2 = z \\
\iff\ & 2z^3 - z^2 - 2z + 1 = 0 \\
\iff\ & z^2(2z-1) - (2z-1) = 0 \\
\iff\ & (2z-1)(z^2-1) = 0 \iff z = \pm 1 \text{ ou } z = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Les solutions sont alors données par $\cos(x) = \pm 1$ ou $\cos(x) = \frac{1}{2}$, d'où

$$S = \left\{ k\pi, \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \frac{-\pi}{3} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \subset D_{\text{def}}.$$

c) $\tan x + 3\,\sin^2 x - \cos^2 x = 0\,, \qquad D_{\text{def}} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z} \right\}\,.$

L'équation ne change pas lorsqu'on remplace x par $\pi + x$, on pose donc $z = \tan x$, z est défini $\forall\, x \in D_{\text{def}}$.

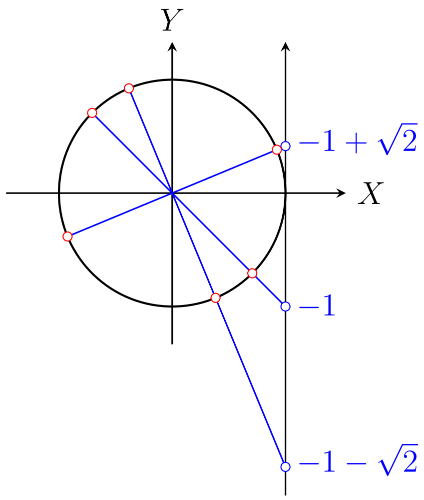
L'équation devient : $\quad z + \dfrac{3z^2}{1+z^2} - \dfrac{1}{1+z^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z^3 + 3z^2 + z - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad (z+1)\,(z^2 + 2z - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (z+1)\,(z + 1 - \sqrt{2}\,)\,(z + 1 + \sqrt{2}\,) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} z = -1\,, \text{ ou} \\ z = -1 + \sqrt{2}\,, \text{ ou} \\ z = -1 - \sqrt{2} \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi\,, \text{ ou} \\ x = \alpha + k\pi\,, \text{ ou} \\ x = \beta + k\pi \end{array} \right. \qquad k \in \mathbb{Z}\,,$$

avec $\quad \alpha\,,\ \beta \in \left] -\frac{\pi}{2}\,, \frac{\pi}{2} \right[, \quad \tan\alpha = -1 + \sqrt{2} \quad$ et $\quad \tan\beta = -1 - \sqrt{2}$.

$S = \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi\,,\ \alpha + k\pi\,,\ \beta + k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z} \right\} \subset D_{\text{def}}\,.$



d) $\sin^2 x + 8\,\sin(2x) + 3\,\cos^2 x = 10\,\cot x\,, \qquad D_{\text{def}} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}\}\,.$

L'équation ne change pas lorsqu'on remplace x par $\pi + x$, on pose donc $z = \tan x$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Le changement de variable n'est pas défini en $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, mais ces valeurs sont peut-être solution, il faut les tester dans l'équation.

$\sin^2(\frac{\pi}{2} + k\pi) + 8\,\sin(\pi + 2k\pi) + 3\,\cos^2(\frac{\pi}{2} + k\pi) - 10\,\cot(\frac{\pi}{2} + k\pi) = 1 \neq 0\,.$

Les valeurs $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, ne sont donc pas solution de l'équation.

On cherche des solutions différentes de $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, en posant $z = \tan x$.

L'équation devient :

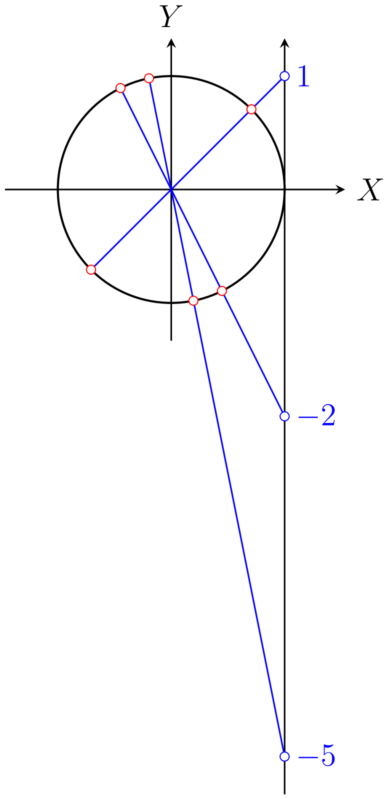
$$\frac{z^2}{1+z^2} + 16\,\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\,\frac{1}{\sqrt{1+z^2}} + \frac{3}{1+z^2} - \frac{10}{z} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{z^2+16z+3}{1+z^2} - \frac{10}{z} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad z^3 + 6z^2 + 3z - 10 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (z-1)\,(z^2+7z+10) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (z-1)\,(z+2)\,(z+5) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = 1 \quad \text{ou} \quad z = -2 \quad \text{ou} \quad z = -5\,.$$

Soient $\alpha\,,\ \beta \in \left]-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right[\,,$ tels que $\tan\alpha = -2$ et $\tan\beta = -5\,,$

alors $S = \left\{\,\frac{\pi}{4} + k\pi\,,\ \alpha + k\pi\,,\ \beta + k\pi\,,\quad k \in \mathbb{Z}\,\right\} \subset D_{\text{def}}\,.$



e) $1 + 2\,\sin x + \cos x + 2\,\tan x = 0\,,\qquad D_{\text{def}} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}\right\}\,.$

Aucun des trois tests d'invariance n'étant positif, on pose $z = \tan(\frac{x}{2})\,,$ $x \neq \pi + 2k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}\,.$

Le changement de variable n'est pas défini en $x = \pi + 2k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}\,,$ mais ces valeurs sont peut-être solution, il faut les tester dans l'équation.

$1 + 2\,\sin(\pi + 2k\pi) + \cos(\pi + 2k\pi) + 2\,\tan(\pi + 2k\pi) = 0\,.$

Ces valeurs sont donc solutions. On cherche d'autres éventuelles solutions à l'aide de $z = \tan(\frac{x}{2})\,.$

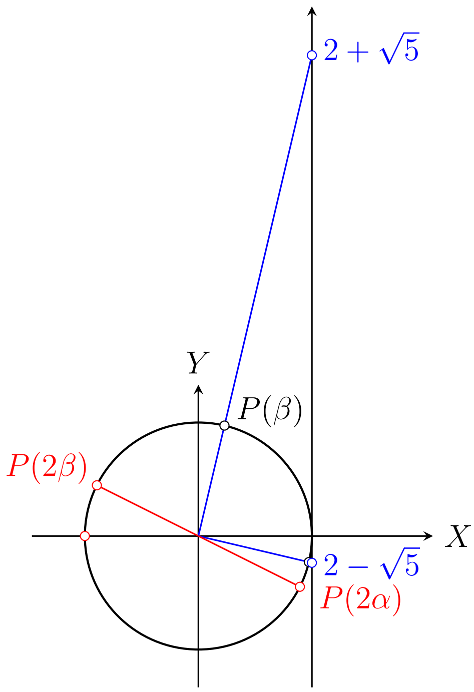
L'équation devient : $\quad 1 + 2\,\dfrac{2z}{1+z^2} + \dfrac{1-z^2}{1+z^2} + 2\,\dfrac{2z}{1-z^2} = 0$

$\Leftrightarrow \quad (1-z^2)\,(1+z^2) + (-z^2+4z+1)\,(1-z^2) + 4z\,(1+z^2) = 0$

$\Leftrightarrow \quad -2z^2 + 8z + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z^2 - 4z - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = 2 \pm \sqrt{5}\,.$

Soient $\alpha\,,\ \beta \in \left]-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right[$, tels que $\tan\alpha = 2-\sqrt{5}$ et $\tan\beta = 2+\sqrt{5}$,

alors $S = \{\,\pi + 2k\pi\,,\ 2\alpha + 2k\pi\,,\ 2\beta + 2k\pi\,,\quad k \in \mathbb{Z}\,\} \subset D_{\text{def}}\,.$



f) $2\,\sin^2 x + \sqrt{3}\,\sin(2x) - 3 = 0\,,\quad D_{\text{def}} = \mathbb{R}\,.$

L'équation ne change pas lorsqu'on remplace x par $\pi + x$, on pose donc $z = \tan x\,,\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}\,.$

Le changement de variable n'est pas défini en $x = \frac{\pi}{2} + k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}$, mais ces valeurs sont peut-être solution, il faut les tester dans l'équation.

$2\,\sin^2(\frac{\pi}{2} + k\pi) + \sqrt{3}\,\sin(\pi + 2k\pi) - 3 = -1 \neq 0\,.$

Les valeurs $x = \frac{\pi}{2} + k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}$, ne sont donc pas solution de l'équation.

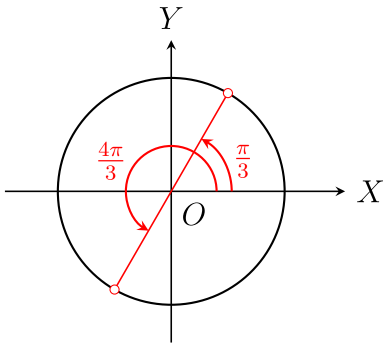
On cherche des solutions différentes de $\frac{\pi}{2} + k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}$, en posant $z = \tan x\,.$

L'équation devient : $\quad 2\,\dfrac{z^2}{1+z^2} + 2\sqrt{3}\,\dfrac{z}{\sqrt{1+z^2}}\,\dfrac{1}{\sqrt{1+z^2}} - 3 = 0$

$\Leftrightarrow \quad 2z^2 + 2\sqrt{3}\,z - 3\,(1+z^2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z^2 - 2\sqrt{3}\,z + 3 = 0$

$\Leftrightarrow \quad (z-\sqrt{3})^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad \tan x = \tan\frac{\pi}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{3} + k\pi\,,\quad k \in \mathbb{Z}$

Résolution sur l'intervalle $\left]0\,,2\pi\right[$: $x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{4\pi}{3}$, $\qquad S = \left\{\,\frac{\pi}{3}\,,\ \frac{4\pi}{3}\,\right\}.$



g) $\dfrac{\sin x\ \cos x}{1-\cos x}+1=\sin x+2\cos x\,,\qquad D_{\text{def}}=\mathbb{R}\setminus\{2k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z}\}\,.$

Aucun des trois tests d'invariance n'étant positif, on pose $z=\tan(\frac{x}{2})$, $x\neq\pi+2k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z}\,.$

Le changement de variable n'est pas défini en $x=\pi+2k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z}$, mais ces valeurs sont peut-être solution, il faut les tester dans l'équation.

$$\frac{\sin(\pi+2k\pi)\ \cos(\pi+2k\pi)}{1-\cos(\pi+2k\pi)}+1-\sin(\pi+2k\pi)-2\cos(\pi+2k\pi)=3\neq 0\,.$$

Les valeurs $x=\pi+2k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z}$, ne sont donc pas solution de l'équation.

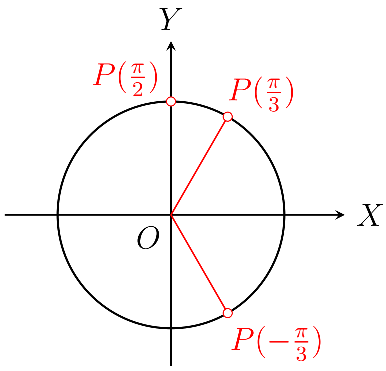
On cherche des solutions différentes de $\pi+2k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z}$, en posant $z=\tan(\frac{x}{2})$.

L'équation devient : $\quad\dfrac{2z}{1+z^2}\cdot\dfrac{1-z^2}{1+z^2}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{1-z^2}{1+z^2}}+1-\dfrac{2z}{1+z^2}-2\,\dfrac{1-z^2}{1+z^2}=0$

$$\Leftrightarrow\quad 3z^3-3z^2-z+1=0\quad\Leftrightarrow\quad 3z^2\,(z-1)-(z-1)=0$$

$$\Leftrightarrow\quad (z-1)\,(3z^2-1)=0\quad\Leftrightarrow\quad\left\{\begin{array}{l} z=1\,,\ \text{ou}\\ z=\frac{\sqrt{3}}{3}\,,\ \text{ou}\\ z=-\frac{\sqrt{3}}{3}\end{array}\right.\quad\Leftrightarrow\quad\left\{\begin{array}{l}\tan(\frac{x}{2})=\tan\frac{\pi}{4}\,,\ \text{ou}\\ \tan(\frac{x}{2})=\tan\frac{\pi}{6}\,,\ \text{ou}\\ \tan(\frac{x}{2})=\tan(-\frac{\pi}{6})\end{array}\right.$$

$$S=\left\{\,\tfrac{\pi}{2}+2k\pi\,,\ \tfrac{\pi}{3}+2k\pi\,,\ -\tfrac{\pi}{3}+2k\pi\,,\quad k\in\mathbb{Z}\,\right\}\ \subset\ D_{\text{def}}\,.$$



2. Est-il vraiment nécessaire d'utiliser un changement de variable pour résoudre les équations suivantes ?

a) $\sin(3x) = \cos x$

b) $\dfrac{1}{\cos x} - \cos x = \sin x$

c) $\cos x = \tan x$

d) $\sqrt{3} - \tan x = \dfrac{1}{\cos x}$

---

a) $\sin(3x) = \cos x\,,\qquad D_{\text{def}} = \mathbb{R}\,.$

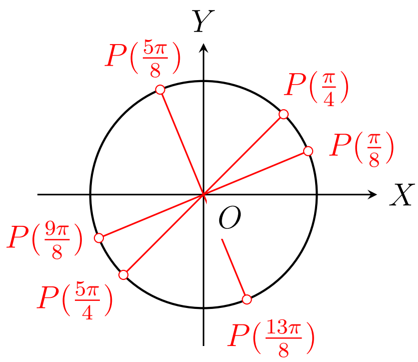
Cette équation se ramène à une équation élémentaire de la façon suivante :

$$\sin(3x) = \cos x \quad \Leftrightarrow \quad \sin(3x) = \sin\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right).$$

On la résout comme telle :

$$\sin(3x) = \sin\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} 3x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 3x = \pi - \left[\frac{\pi}{2} - x\right] + 2k\pi \end{array}\right. \qquad k \in \mathbb{Z}\,,$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} 4x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \\ \text{ou} \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right.$$



$$S = \left\{ \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\,,\ \frac{\pi}{4} + k\pi\,,\quad k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

b) L'équation $\dfrac{1}{\cos x} - \cos x = \sin x$ n'a de sens que si $\cos x \neq 0$,

$D_{\text{def}} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$

On peut alors amplifier les deux membres de cette équation par $\cos x$.

$$\frac{1}{\cos x} - \cos x = \sin x \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \cos^2 x - \sin x\, \cos x = 0$$

Cette équation, après factorisation, se ramène à deux équations élémentaires :

$$\sin^2 x - \sin x\, \cos x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x\, (\sin x - \cos x) = 0$$

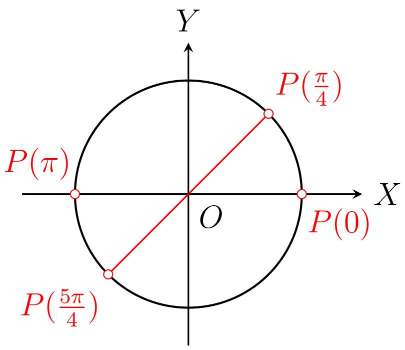
$$\Leftrightarrow \quad \sin x = 0 \quad \text{ou} \quad \sin x - \cos x = 0\,.$$

- $\sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = k\pi\,,\quad k \in \mathbb{Z}\,,$

- $\sin x - \cos x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{2}}{2}\,\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\,\cos x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad x - \frac{\pi}{4} = k\pi \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

$$S = \left\{ k\pi\,,\ \frac{\pi}{4} + k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z} \right\} \subset D_{\text{def}}\,.$$



c) $\cos x = \tan x\,, \qquad D_{\text{def}} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}\right\}\,.$

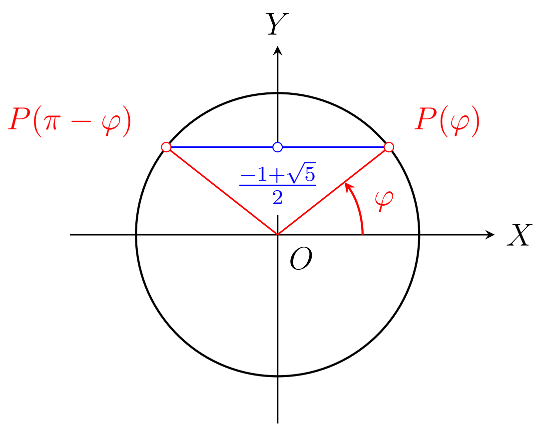
Cette équation se ramène aisément à un trinôme du deuxième degré en $\sin x$:

$$\cos x = \tan x \quad \Leftrightarrow \quad \cos x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \Leftrightarrow \quad \cos^2 x - \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

Soit $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}\,,\ \frac{\pi}{2}]$ tel que $\sin\varphi = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, alors

$$S = \{\varphi + 2k\pi\,,\ \pi - \varphi + 2k\pi\,,\quad k \in \mathbb{Z}\} \subset D_{\text{def}}\,.$$



d) $\sqrt{3} - \tan x = \frac{1}{\cos x}\,, \qquad D_{\text{def}} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}\right\}\,.$

Cette équation se ramène à une équation trigonométrique linéaire et se résout donc comme telle :

$$\sqrt{3} - \tan x = \frac{1}{\cos x} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{3} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{3}\,\cos x - \sin x = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \tfrac{\sqrt{3}}{2}\,\cos x - \tfrac{1}{2}\,\sin x = \tfrac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \cos\tfrac{\pi}{6}\,\cos x - \sin\tfrac{\pi}{6}\,\sin x = \tfrac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos(x + \tfrac{\pi}{6}) = \cos\tfrac{\pi}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x + \tfrac{\pi}{6} = \pm\tfrac{\pi}{3} + 2k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = -\tfrac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \tfrac{\pi}{6} + 2k\pi\,.$$

Or les valeurs $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ n'appartiennent pas au domaine de définition.

D'où : $\quad S = \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$.

3. Résoudre l'inéquation suivante : $\quad 1 + \dfrac{\sin x}{1 + \cos x} > 2\,(\sin x - \cos x)$

$$1 + \frac{\sin x}{1 + \cos x} > 2\,(\sin x - \cos x)\,, \qquad \mathcal{D}_{\text{def}} = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \neq \pi + 2k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}\}\,.$$

Aucun des trois tests n'étant positif, on pose $z = \tan(\frac{x}{2})$. Ce changement de variable est défini pour tout x dans $\mathcal{D}_{\text{def}}$.

Et l'inéquation devient :

$$1 + \frac{2z}{1+z^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1-z^2}{1+z^2}} > 2\left(\frac{2z}{1+z^2} - \frac{1-z^2}{1+z^2}\right)$$

$$1 + \frac{2z}{1+z^2} \cdot \frac{1+z^2}{2} - 2\,\frac{z^2+2z-1}{1+z^2} > 0$$

$$\frac{z^3 - z^2 - 3z + 3}{1+z^2} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{z^2\,(z-1) - 3\,(z-1)}{1+z^2} > 0$$

$$\frac{(z-1)\,(z-\sqrt{3})\,(z+\sqrt{3})}{1+z^2} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (z-1)\,(z-\sqrt{3})\,(z+\sqrt{3}) > 0$$

z	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		1		$\sqrt{3}$		∞
$z-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$z-\sqrt{3}$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$z+\sqrt{3}$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$(z-1)\,(z-\sqrt{3})\,(z+\sqrt{3})$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

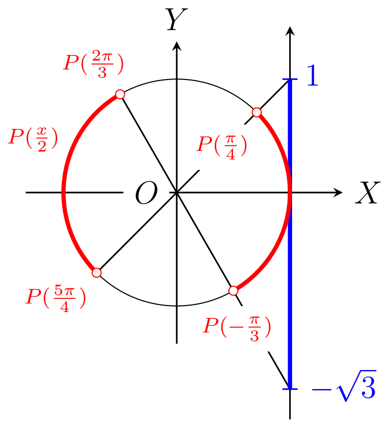
$$(z-1)\,(z-\sqrt{3}\,)\,(z+\sqrt{3}\,) > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} z \in \,]-\sqrt{3}\,,\ 1\,[& (1) \\ \text{ou} & \\ z \in \,]\,\sqrt{3}\,,\ \infty\,[& (2) \end{cases}$$

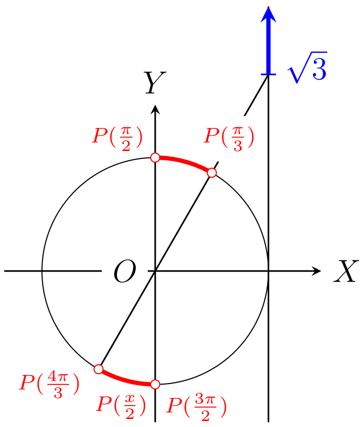
(1) $\quad z \in \,]-\sqrt{3}\,,\ 1\,[$

$\tan(\frac{x}{2}) \in \,]-\sqrt{3}\,,\ 1\,[$

$$-\frac{\pi}{3}+k\pi < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{4}+k\pi$$

$$-\frac{2\pi}{3}+2k\pi < x < \frac{\pi}{2}+2k\pi$$





(2) $\quad z \in \,]\,\sqrt{3}\,,\ \infty\,[$

$\tan(\frac{x}{2}) \in \,]\,\sqrt{3}\,,\ \infty\,[$

$$\frac{\pi}{3}+k\pi < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}+k\pi$$

$$\frac{2\pi}{3}+2k\pi < x < \pi+2k\pi$$

$$\mathcal{S} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\left]-\frac{2\pi}{3}+2k\pi\,,\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\right[\cup \left]\frac{2\pi}{3}+2k\pi\,,\ \pi+2k\pi\right[\right)$$