

## Corrigé 2

1. A l'aide du cercle trigonométrique, mais sans machine à calculer, déterminer les valeurs suivantes :

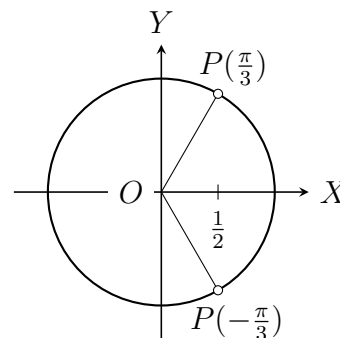
- a)  $\cos(\frac{179\pi}{3})$       b)  $\sin(-\frac{374\pi}{6})$       c)  $\tan(\frac{163\pi}{4})$       d)  $\cot(-\frac{67\pi}{3})$
- 

a)  $\cos(\frac{179\pi}{3}) = \cos(60\pi - \frac{\pi}{3}) = \cos(-\frac{\pi}{3})$ .

Or les points  $P(-\frac{\pi}{3})$  et  $P(\frac{\pi}{3})$  sont symétriques par rapport à l'axe  $Ox$ .

Donc  $\cos(-\frac{\pi}{3}) = \cos(\frac{\pi}{3})$ .

Et  $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ , d'où  $\cos(\frac{179\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ .

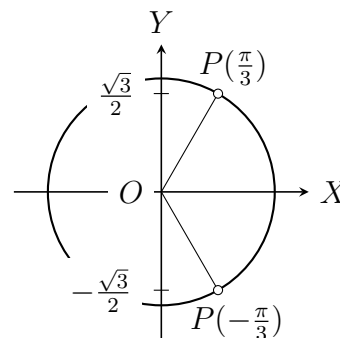


b)  $\sin(-\frac{374\pi}{6}) = \sin(-62\pi - \frac{\pi}{3}) = \sin(-\frac{\pi}{3})$ .

Or les points  $P(-\frac{\pi}{3})$  et  $P(\frac{\pi}{3})$  sont symétriques par rapport à l'axe  $Ox$ .

Donc  $\sin(-\frac{\pi}{3}) = -\sin(\frac{\pi}{3})$ .

Et  $\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , d'où  $\sin(-\frac{374\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

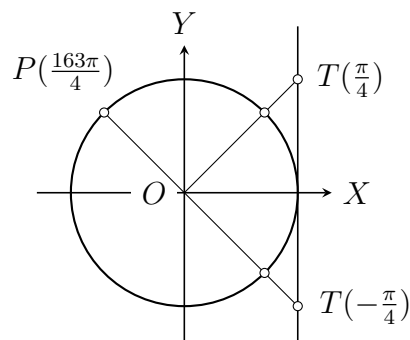


c)  $\tan(\frac{163\pi}{4}) = \tan(41\pi - \frac{\pi}{4}) = \tan(-\frac{\pi}{4})$ .

Or les points  $T(-\frac{\pi}{4})$  et  $T(\frac{\pi}{4})$  sont symétriques par rapport à l'axe  $Ox$ .

Donc  $\tan(-\frac{\pi}{4}) = -\tan(\frac{\pi}{4})$ .

Et  $\tan(\frac{\pi}{4}) = 1$ , d'où  $\tan(\frac{163\pi}{4}) = -1$ .

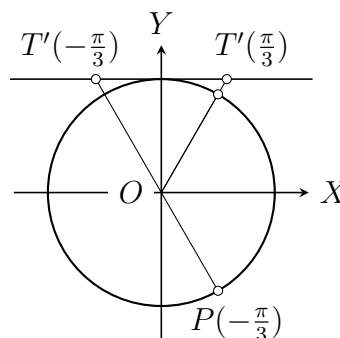


d)  $\cot(-\frac{67\pi}{3}) = \cot(-22\pi - \frac{\pi}{3}) = \cot(-\frac{\pi}{3})$ .

Or les points  $T'(-\frac{\pi}{3})$  et  $T'(\frac{\pi}{3})$  sont symétriques par rapport à l'axe  $Oy$ .

Donc  $\cot(-\frac{\pi}{3}) = -\cot(\frac{\pi}{3})$ .

Et  $\cot(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ , d'où  $\cot(-\frac{67\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ .



2. Calculer, sans machine, la valeur des fonctions trigonométriques des angles ainsi définis :

- a)  $\cos x = \pm \frac{4}{5}$ ,  $\frac{15\pi}{2} \leq x \leq 8\pi$       c)  $\tan x = \pm \frac{4}{3}$ ,  $-\frac{7\pi}{2} \leq x \leq -3\pi$   
 b)  $\sin x = \pm \frac{\sqrt{11}}{6}$ ,  $-\frac{7\pi}{2} \leq x \leq -3\pi$       d)  $\cot x = -\frac{2\sqrt{10}}{7}$ ,  $11\pi \leq x \leq \frac{23\pi}{2}$

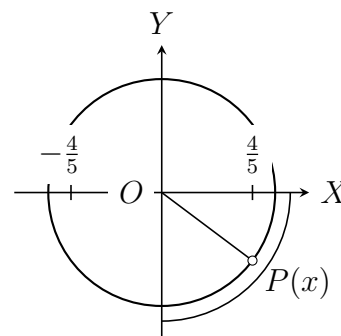
a)  $x$  est défini par  $\cos x = \pm \frac{4}{5}$ ,  $\frac{15\pi}{2} \leq x \leq 8\pi$ .

- Signe des fonctions trigonométriques de  $x$ .

Localisation de  $P(x)$  :

$$\frac{15\pi}{2} \leq x \leq 8\pi \Rightarrow P(x) \in IV.$$

Donc  $\cos x > 0$ ,  $\sin x < 0$  et  $\tan x < 0$ .

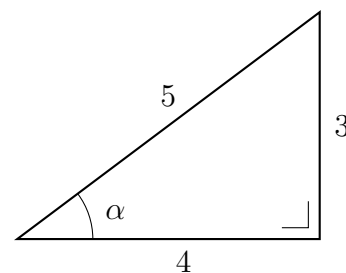


- Valeur absolue des fonctions trigonométriques de  $x$ .

Soit  $\alpha$  l'angle géométrique aigu défini par  $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ .

A l'aide du triangle rectangle ci-contre, on en déduit  $\sin \alpha$  et  $\tan \alpha$  :

$$\sin \alpha = \frac{3}{5} \text{ et } \tan \alpha = \frac{3}{4}.$$



En conclusion :  $\cos x = \frac{4}{5}$ ,  $\sin x = -\frac{3}{5}$  et  $\tan x = -\frac{3}{4}$ .

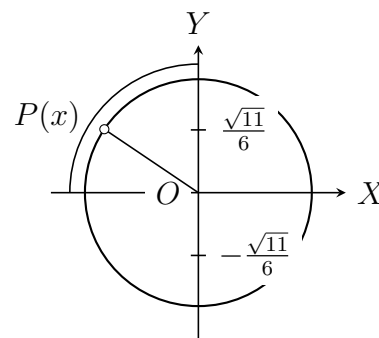
b)  $x$  est défini par  $\sin x = \pm \frac{\sqrt{11}}{6}$ ,  $-\frac{7\pi}{2} \leq x \leq -3\pi$ .

- Signe des fonctions trigonométriques de  $x$ .

Localisation de  $P(x)$  :

$$-\frac{7\pi}{2} \leq x \leq -3\pi \Rightarrow P(x) \in II.$$

Donc  $\sin x > 0$ ,  $\cos x < 0$  et  $\tan x < 0$ .

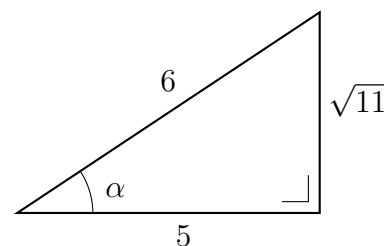


- Valeur absolue des fonctions trigonométriques de  $x$ .

Soit  $\alpha$  l'angle géométrique aigu défini par  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{11}}{6}$ .

A l'aide du triangle rectangle ci-contre, on en déduit  $\cos \alpha$  et  $\tan \alpha$  :

$$\cos \alpha = \frac{5}{6} \text{ et } \tan \alpha = \frac{\sqrt{11}}{5}.$$



En conclusion :  $\sin x = \frac{\sqrt{11}}{6}$ ,  $\cos x = -\frac{5}{6}$  et  $\tan x = -\frac{\sqrt{11}}{5}$ .

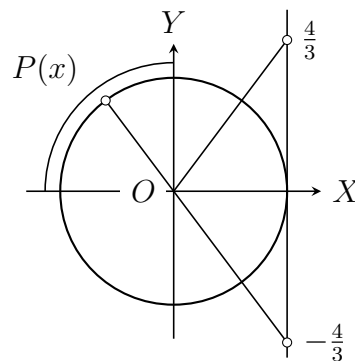
c)  $x$  est défini par  $\tan x = \pm \frac{4}{3}$ ,  $-\frac{7\pi}{2} \leq x \leq -3\pi$

- Signe des fonctions trigonométriques de  $x$ .

Localisation de  $P(x)$  :

$$-\frac{7\pi}{2} \leq x \leq -3\pi \Rightarrow P(x) \in II.$$

Donc  $\tan x < 0$ ,  $\sin x > 0$  et  $\cos x < 0$ .



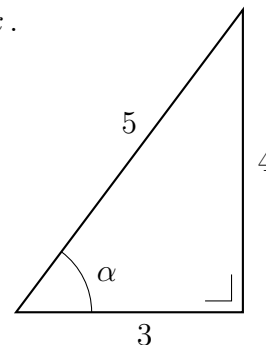
- Valeur absolue des fonctions trigonométriques de  $x$ .

Soit  $\alpha$  l'angle géométrique aigu défini

$$\text{par } \tan \alpha = \frac{4}{3}.$$

A l'aide du triangle rectangle ci-contre, on en déduit  $\sin \alpha$  et  $\cos \alpha$  :

$$\sin \alpha = \frac{4}{5} \text{ et } \cos \alpha = \frac{3}{5}.$$



En conclusion :  $\tan x = -\frac{4}{3}$ ,  $\sin x = \frac{4}{5}$  et  $\cos x = -\frac{3}{5}$ .

d)  $\cot x = -\frac{2\sqrt{10}}{7}$ ,  $11\pi \leq x \leq \frac{23\pi}{2}$ .

$$11\pi \leq x \leq \frac{23\pi}{2} \Rightarrow P(x) \in III.$$

Or  $P(x) \in III$  et  $\cot x < 0$  sont incompatibles.

3. a) Calculer  $A = \sin x - \frac{1}{\cos x}$  sachant que  $\tan x = -\frac{1}{2}$  et  $4\pi \leq x \leq 5\pi$ .

b) Soit  $\varphi$  l'angle défini par  $\sin \varphi = -\frac{2}{\sqrt{13}}$  et  $65\pi < 2\varphi < 67\pi$ .

$$\text{Calculer } B = \frac{3 \sin \varphi - 2 \cos \varphi - 5 \tan \varphi}{1 + \sin \varphi \cdot \cos \varphi - 3 \tan^2 \varphi}.$$

a) • Localisation de  $P(x)$  :

$$4\pi \leq x \leq 5\pi \Rightarrow P(x) \in I \cup II. \text{ Or } \tan x < 0 \text{ donc } P(x) \in II.$$

On en déduit donc que  $\sin x > 0$  et  $\cos x < 0$ .

- Calcul de  $\sin x$  et  $\cos x$  :

Soit  $\alpha$  l'angle géométrique aigu défini par  $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ , alors  $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$  et  $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ .

$$\text{D'où : } \sin x = \frac{\sqrt{5}}{5}, \quad \cos x = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ et } A = \frac{7\sqrt{5}}{10}.$$

b) • Localisation de  $P(\varphi)$  :

$$65\pi < 2\varphi < 67\pi \Leftrightarrow \frac{65\pi}{2} < \varphi < \frac{67\pi}{2} \Rightarrow P(\varphi) \in II \cup III.$$

Or  $\sin \varphi < 0$  donc  $P(\varphi) \in III$ .

On en déduit donc que  $\cos \varphi < 0$  et  $\tan \varphi > 0$ .

• Calcul de  $\cos \varphi$  et  $\tan \varphi$  :

Soit  $\alpha$  l'angle géométrique aigu défini par  $\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$ ,

alors  $\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$  et  $\tan \alpha = \frac{2}{3}$ .

D'où :  $\cos \varphi = -\frac{3}{\sqrt{13}}$ ,  $\tan \varphi = +\frac{2}{3}$  et  $B = -26$ .

4. Comparer, sans machine, les angles  $\alpha$  et  $\beta$  dans les trois cas suivants :

a)  $\sin \alpha = \frac{3}{4}$ ,  $\alpha \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$  et  $\beta = \frac{5\pi}{6}$ .

b)  $\cos \alpha = \frac{2}{5}$ ,  $\alpha \in [0, \pi]$  et  $\beta = \frac{\pi}{3}$ .

c)  $\tan \alpha = -2$ ,  $\alpha \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  et  $\beta = -\frac{\pi}{3}$ .

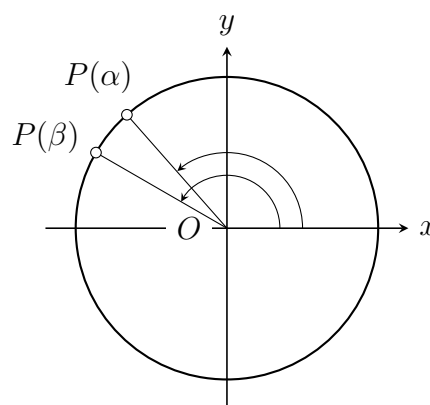
a)  $\sin \alpha = \frac{3}{4}$ ,  $\alpha \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$  et  $\beta = \frac{5\pi}{6}$ .

$\beta$  est un angle remarquable, on connaît son sinus :  $\sin \beta = \frac{1}{2}$ .

D'où :  $\sin \alpha > \sin \beta$ .

Or la fonction sinus, sur l'intervalle  $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ , est décroissante (lorsque la mesure de l'angle augmente, le sinus diminue).

Donc  $\alpha < \beta$ .



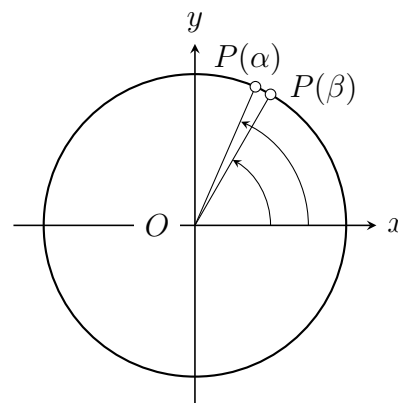
b)  $\cos \alpha = \frac{2}{5}$ ,  $\alpha \in [0, \pi]$  et  $\beta = \frac{\pi}{3}$ .

$\beta$  est un angle remarquable, on connaît son cosinus :  $\cos \beta = \frac{1}{2}$ .

D'où :  $\cos \alpha < \cos \beta$ .

Or la fonction cosinus, sur l'intervalle  $[0, \pi]$ , est décroissante (lorsque la mesure de l'angle augmente, le cosinus diminue).

Donc  $\alpha > \beta$ .



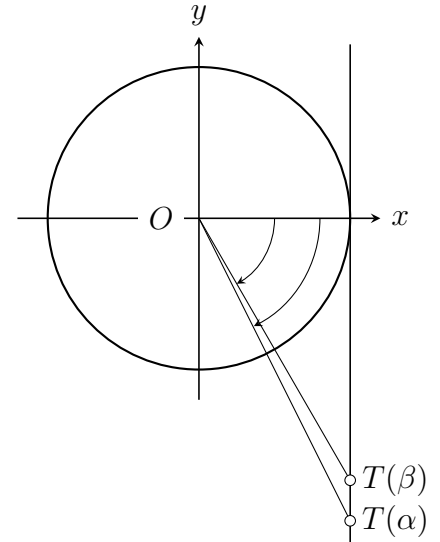
c)  $\tan \alpha = -2, \quad \alpha \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \quad \text{et} \quad \beta = -\frac{\pi}{3}.$

$\beta$  est un angle remarquable, on connaît sa tangente :  $\tan \beta = -\sqrt{3}.$

D'où :  $\tan \alpha < \tan \beta.$

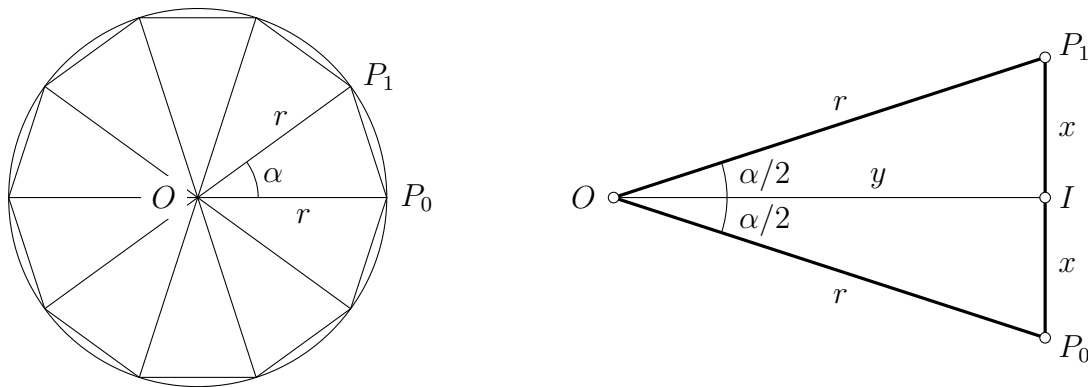
Or la fonction tangente, sur l'intervalle  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ , est croissante (lorsque la mesure de l'angle augmente, la tangente augmente).

Donc  $\alpha < \beta.$



5. Un polygone régulier de  $n$  côtés est inscrit dans un cercle de rayon  $r$ .  
Calculer le périmètre  $P$  et l'aire  $A$  de ce polygone en fonction de  $r$  et de  $n$ .

Figure d'étude



Le polygone étant régulier, on peut le décomposer en  $n$  triangles isométriques.

On en déduit la valeur de l'angle  $\alpha$  :  $\alpha = \frac{2\pi}{n}.$

Ces triangles sont isocèles, la hauteur  $OI$  est donc aussi une bissectrice et une médiane.

On en déduit l'expression de  $x = P_0I$  et de  $y = OI$  :

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{x}{r} \quad \Rightarrow \quad x = r \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{y}{r} \quad \Rightarrow \quad y = r \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

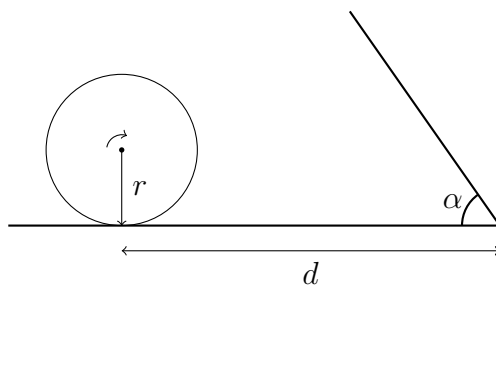
- Soit  $P$  le périmètre du polygone :  $P = n \cdot P_0P_1 = 2nx = 2nr \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

$$P = 2nr \sin\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

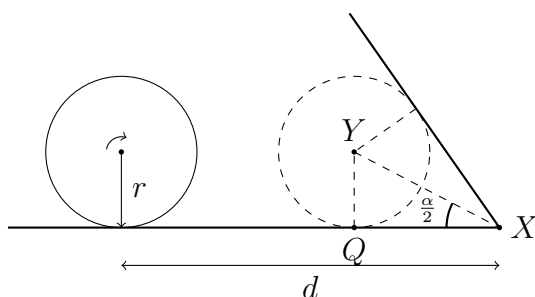
- Soit  $A$  l'aire du polygone :  $A = n x \cdot y = n r^2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

$$A = n r^2 \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

6. Une roue part d'une position initiale, jusqu'à toucher un mur incliné. En fonction des données  $(r, d, \alpha)$ , calculer l'angle  $\beta$  dont la roue aura tourné au moment où elle entre en contact avec le mur incliné.



Observons la position de la roue au moment du contact :



On remarque qu'au moment du contact, la distance parcourue par le centre de la roue sera de  $d - |QX|$ , et qu'elle aura donc tourné d'un angle de

$$\beta = \frac{d - |QX|}{r}.$$

En considérant le triangle  $YXQ$ , on voit que

$$\tan(\alpha/2) = \frac{|YQ|}{|QX|} = \frac{r}{|QX|},$$

et donc  $|QX| = \frac{r}{\tan(\alpha/2)}$ .

On a donc

$$\beta = \frac{d - \frac{r}{\tan(\alpha/2)}}{r}.$$

7. Pour déterminer la hauteur d'une tour, on vise son sommet depuis un point au sol, avec un angle d'élevation  $\alpha$  ; puis on s'avance d'une distance  $d$  vers le pied de la tour et on effectue une deuxième visée avec un angle  $\beta$ .

Calculer la hauteur  $h$  de la tour en fonction de  $\alpha, \beta$  et  $d$ .

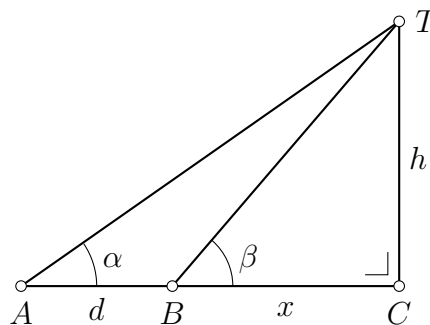
Soit  $x$  la distance entre le deuxième point de visée et le pied de la tour.

Dans le triangle rectangle  $ACT$  :

$$h = (d + x) \tan \alpha .$$

Dans le triangle rectangle  $BCT$  :

$$h = x \tan \beta .$$

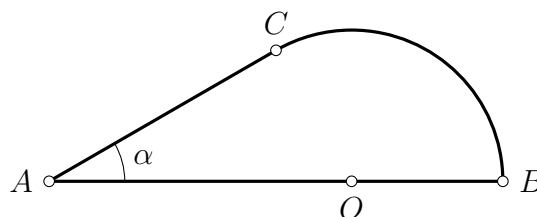


On en déduit la distance  $x$  puis la hauteur  $h$  :

$$(d+x) \tan \alpha = x \tan \beta \Leftrightarrow x = d \cdot \frac{\tan \alpha}{\tan \beta - \tan \alpha}, \quad \text{d'où} \quad h = d \cdot \frac{\tan \alpha \tan \beta}{\tan \beta - \tan \alpha} .$$

8. La figure ci-jointe est constituée d'un segment  $AB$ , d'un arc de cercle  $(BC)$  de centre  $O$  et du segment  $AC$  tangent à l'arc  $(BC)$  en  $C$ .

On connaît les mesures suivantes :  $AB = 18 \text{ cm}$  et  $\alpha = 30^\circ$ .



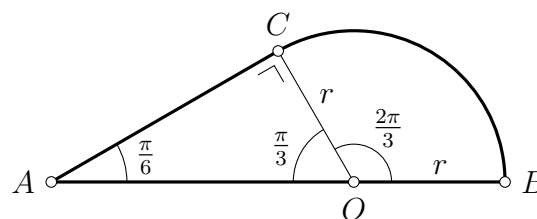
Calculer le périmètre  $P$  et l'aire  $A$  de cette figure.

*Indication : le segment  $AC$  est tangent au rayon  $OC$ .*

- Calcul du rayon  $r$  :

Pour calculer le rayon  $r$ , on l'exprime en fonction des données  $\alpha$  et  $AB$ .

$$AB = AO + r, \text{ avec } AO = \frac{r}{\sin \alpha},$$



$$AB = r \left( \frac{1}{\sin \alpha} + 1 \right) \Leftrightarrow r = \frac{AB}{\frac{1}{\sin \alpha} + 1} \Leftrightarrow r = 6 \text{ cm} .$$

- Calcul de  $AC$  :

$$\tan \alpha = \frac{r}{AC} \Leftrightarrow AC = \frac{r}{\tan \alpha} \Leftrightarrow AC = 6\sqrt{3} \approx 10,4 \text{ cm} .$$

- Calcul du périmètre  $P$  :

L'arc  $BC$  est de mesure  $\beta = \frac{2\pi}{3}$  radians.

Sa longueur vaut donc  $\beta \cdot r = 4\pi$  cm.

$$P = 3r + \beta r + r\sqrt{3} = r\left(3 + \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}\right) \approx 41 \text{ cm.}$$

- Calcul de l'aire  $A$  :

Aire du triangle  $AOC$  :  $\frac{1}{2} r \cdot AC = 18\sqrt{3} \text{ cm}^2$ .

Aire du secteur circulaire  $OBC$  :  $\frac{1}{2}\beta \cdot r^2 = 12\pi \text{ cm}^2$ .

D'où l'aire  $A$  du domaine :  $A = 18\sqrt{3} + 12\pi \approx 68,9 \text{ cm}^2$ .

---