

Corrigé 1

1. Sans utiliser de calculatrice, convertir

- a) $\alpha = 240^\circ$ en radians, b) $\beta = 1$ rad en degrés et minutes, (poser $\pi = \frac{22}{7}$).
-

a) A partir de la relation fondamentale $360^\circ = 2\pi$ radians, travaillez par proportionnalité.

$$360^\circ = 2\pi \text{ rad}, \quad 60^\circ = \frac{\pi}{3} \text{ rad}, \quad 240^\circ = \frac{4\pi}{3} \text{ rad}.$$

b) Ce problème de conversion de radians en degrés se résout à partir de la relation fondamentale

$$2\pi \text{ radians} = 360^\circ.$$

$$2 \cdot \frac{22}{7} \text{ radians} = 360^\circ, \quad 1 \text{ radian} = \frac{7}{44} \cdot 360^\circ = \frac{7}{11} \cdot 90^\circ = \frac{630^\circ}{11}.$$

Il s'agit d'exprimer cette fraction de degrés en degrés et minutes.

Pour cela, on effectue une division euclidienne (division entière avec reste).

$$1 \text{ radian} = \frac{630^\circ}{11} = 57^\circ + \frac{3^\circ}{11},$$

avec

$$\frac{3^\circ}{11} = \frac{3 \cdot 60'}{11} = \frac{180'}{11} = 16' + \frac{4'}{11}.$$

D'où

$$1 \text{ radian} \approx 57^\circ 16'.$$

2. Un polygone régulier de n côtés et de sommets A_1, A_2, \dots, A_n est inscrit dans un cercle de rayon 1 et de centre O .

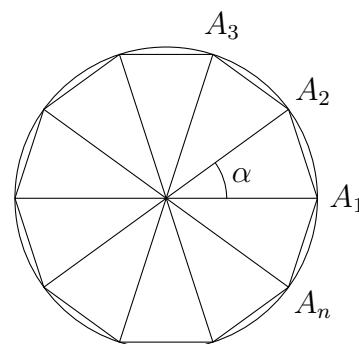
Exprimer en radians la mesure des angles $\widehat{A_1 O A_k}$, $k = 2, \dots, n$.

Le cercle est un arc dont la mesure est 2π rad.

Le polygone à n côtés étant régulier, les n arcs $(A_1 A_2), (A_2 A_3), \dots, (A_n A_1)$ sont isométriques et ont pour mesure $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ rad.

L'arc $(A_1 A_k)$ est composé de $(k-1)$ arcs élémentaires $(A_1 A_2), \dots, (A_{k-1} A_k)$;

sa mesure est donc : $(k-1)\alpha = (k-1) \cdot \frac{2\pi}{n}$ rad.



3. a) Un arc de cercle a pour longueur $L = 30$ cm, son angle au centre mesure $\alpha = 4$ rad. Calculer son rayon r .
- b) Un secteur circulaire a pour angle au centre $\beta = 18^\circ$ et pour rayon $r = 12$ cm. Calculer la longueur L de l'arc et l'aire A du secteur.

a) $L = \alpha \cdot r$ où α est la mesure de l'arc exprimée en radian.

$$r = \frac{L}{\alpha} \Rightarrow r = \frac{30}{4} = 7,5 \text{ cm.}$$

b) La mesure de l'arc est ici exprimée en degrés, il faut la convertir en radians :

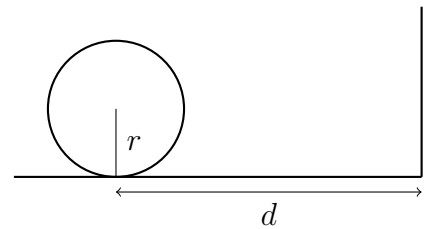
$$\beta = 18^\circ = \frac{180^\circ}{10} = \frac{\pi}{10} \text{ rad.}$$

- $L = \beta \cdot r \Rightarrow L = \frac{\pi}{10} \cdot 12 = \frac{6\pi}{5} \text{ cm.}$

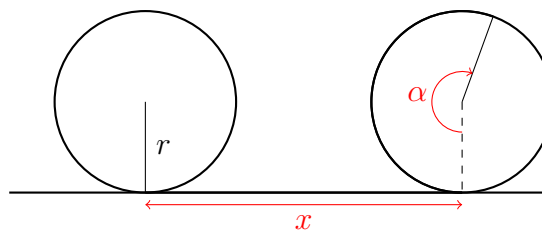
- $A = \frac{1}{2} \beta \cdot r^2 \Rightarrow A = \frac{1}{2} \frac{\pi}{10} \cdot 12^2 = \frac{36\pi}{5} \text{ cm}^2.$

4. La roue ci-contre, de rayon r , a son centre situé à la distance d du mur. On la fait rouler jusqu'à ce qu'elle touche celui-ci.

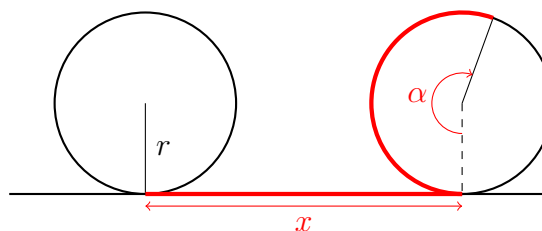
De quel angle α la roue a-t-elle tourné ?



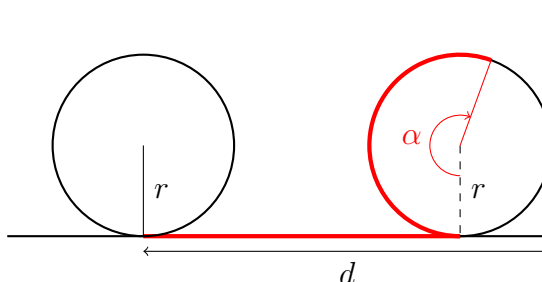
Quel est le lien entre la distance x parcourue et l'angle de rotation α ?



Cette distance x est égale à la longueur de l'arc correspondant à l'angle de rotation α .



La distance horizontale parcourue jusqu'à ce que la roue touche le mur vaut $d - r$.



Cette distance correspond à la longueur de l'arc dont l'angle au centre vaut α .

$$\alpha \cdot r = d - r \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{d - r}{r}.$$

5. Estimer la vitesse sur orbite de la lune dans sa course autour de la terre connaissant la distance qui les sépare : environ 360'000 km (distance du centre de la terre au centre de la lune) et en fixant une période lunaire approximativement à 30 jours.

La lune effectue une révolution autour de la terre en 30 jours ; calculons la distance parcourue durant cette période.

$$L = 2\pi \cdot R = 2\pi \cdot 360'000 \text{ km}$$

Le problème est résolu : la vitesse sur orbite de la lune est de $2\pi \cdot 360'000$ km par 30 jours.

Il suffit de l'exprimer dans une unité plus conventionnelle.

$$2\pi \cdot 360'000 \text{ km} \quad \longleftrightarrow \quad 30 \text{ jours}$$

$$2\pi \cdot 360'000 \text{ km} \quad \longleftrightarrow \quad 30 \cdot 24 \text{ heures}$$

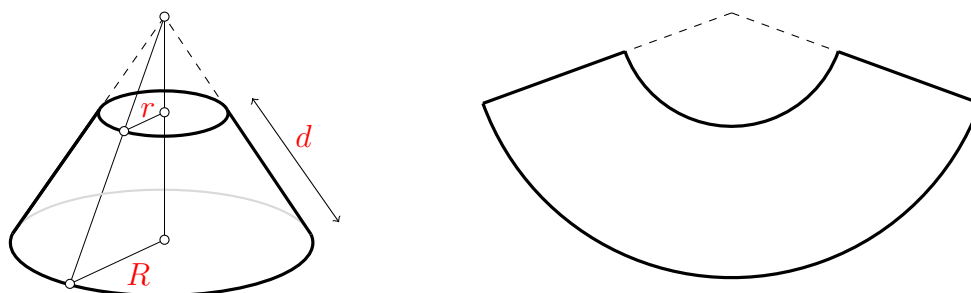
$$\frac{2\pi \cdot 360'000}{30 \cdot 24} \text{ km} \quad \longleftrightarrow \quad 1 \text{ heure}$$

$$\sim 3'140 \text{ km} \quad \longleftrightarrow \quad 1 \text{ heure}$$

La vitesse sur orbite de la lune est approximativement de 3'140 km/h.

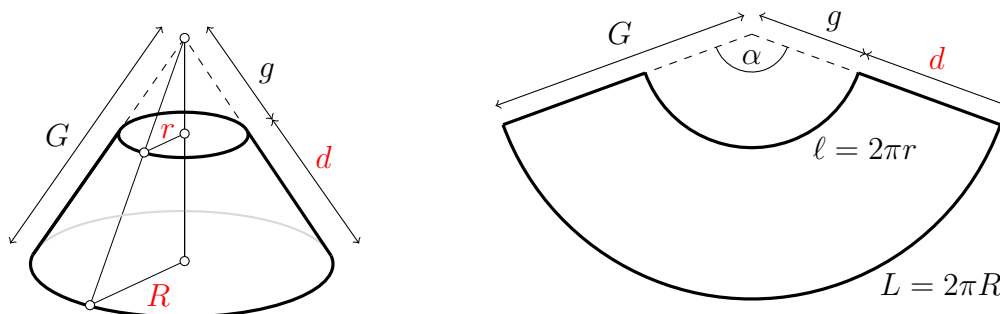
6. On considère un tronc de cône de révolution défini par les rayons r et R de ses deux bases et par la longueur g des génératrices.

Ce tronc de cône est une surface développable : en le découpant le long d'une génératrice, on obtient un secteur de couronne circulaire.



Déterminer la surface A de ce tronc de cône en fonction des données r , R et d .

Notons G la longueur des génératrices du grand cône et g celle du petit cône.



La surface A du tronc de cône s'exprime comme la différence entre le grand secteur circulaire et le petit. Soit α l'angle au centre des secteurs circulaires :

$$A = \frac{\alpha}{2} \cdot G^2 - \frac{\alpha}{2} \cdot g^2 = \frac{\alpha}{2} \cdot (G^2 - g^2) = \frac{\alpha}{2} \cdot (G + g) \cdot (G - g),$$

$$A = \frac{\alpha}{2} \cdot (G + g) \cdot d.$$

Les longueurs des arcs ℓ et L des secteurs circulaires sont les circonférences des bases :

$$\ell = \alpha \cdot g = 2\pi r \quad \text{et} \quad L = \alpha \cdot G = 2\pi R,$$

on en déduit l'expression de α en fonction de r et g ou de R et G :

$$\alpha = \frac{2\pi r}{g} = \frac{2\pi R}{G}.$$

$$A = \frac{\pi R}{G} \cdot (G + g) \cdot d = \pi R \cdot \frac{G + g}{G} \cdot d = \pi R \cdot \left(1 + \frac{g}{G}\right) \cdot d.$$

Or d'après Thalès, le rapport des génératrices est égal au rapport des rayons :

$$\frac{g}{G} = \frac{r}{R},$$

$$A = \pi R \cdot \left(1 + \frac{r}{R}\right) \cdot d = \pi \cdot (R + r) \cdot d = 2\pi \cdot \underbrace{\frac{r + R}{2}}_{\text{rayon moyen}} \cdot d = \underbrace{2\pi \cdot \frac{r + R}{2}}_{\text{circonférence moyenne}} \cdot d.$$

7. Il est midi. Sur une montre analogique, l'aiguille des heures et celle des minutes sont superposées.

a) A quels instants (heures, minutes, secondes) le seront-elles de nouveau ?

Indication : déterminer $\alpha_1(t)$, l'angle décrit par l'aiguille des heures en t secondes et $\alpha_2(t)$, l'angle décrit par l'aiguille des minutes.

b) Même question avec les trois aiguilles, celle des heures, des minutes et des secondes.

- a) • Soit $\alpha_1(t)$ l'angle parcouru en t secondes par l'aiguille des heures.
- Pour une valeur de t positive, la mesure de l'angle α_1 est négative car le mouvement des aiguilles d'une montre s'effectue dans le sens trigonométrique négatif.
 - D'autre part, l'aiguille des heures effectue un tour complet en 12 heures.

$$12 \text{ heures} \longleftrightarrow -2\pi \text{ radians}$$

$$12 \cdot 60^2 \text{ secondes} \longleftrightarrow -2\pi \text{ radians}$$

$$1 \text{ seconde} \longleftrightarrow -\frac{2\pi}{12 \cdot 60^2} \text{ radians}$$

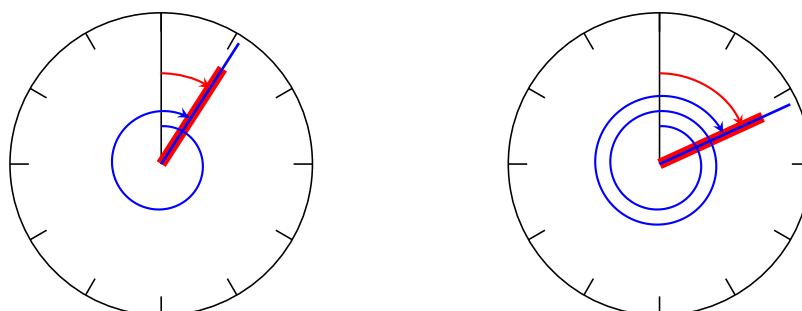
$$t \text{ secondes} \longleftrightarrow -\frac{2\pi}{12 \cdot 60^2} t \text{ radians.}$$

D'où l'expression cherchée : $\alpha_1(t) = -\frac{2\pi}{12 \cdot 60^2} t$.

- De façon analogue, on en déduit que l'angle décrit par l'aiguille des minutes en t secondes est donné par

$$\alpha_2(t) = -\frac{2\pi}{60^2} t.$$

- Les deux aiguilles se superposent au temps t si les deux angles diffèrent d'un nombre entier de tours (si les deux angles sont des déterminations différentes d'un même angle orienté).



$$\alpha_1(t) - \alpha_2(t) = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{2\pi}{12 \cdot 60^2} t + \frac{2\pi}{60^2} t = 2k\pi &\Leftrightarrow t \left(-\frac{1}{12 \cdot 60^2} + \frac{1}{60^2} \right) = k \\
 t \left(\frac{11}{12 \cdot 60^2} \right) = k &\Leftrightarrow t = k \left(\frac{12 \cdot 60^2}{11} \right) \text{ secondes} \\
 t = k \left(\frac{11 \cdot 60^2}{11} + \frac{60^2}{11} \right) = k \left(\frac{11 \cdot 60^2}{11} + \frac{55 \cdot 60}{11} + \frac{5 \cdot 60}{11} \right) &\text{ secondes} \\
 t \approx k (1\text{h } 5' 27''), \quad k \in \mathbb{N}^*. &
 \end{aligned}$$

b) Soit $\alpha_3(t)$ l'angle parcouru en t secondes par l'aiguille des secondes :

$$\alpha_3(t) = -\frac{2\pi}{60} t.$$

Les trois aiguilles se superposent au temps t si les trois angles diffèrent d'un nombre entier de tours.

$$\begin{aligned}
 &\begin{cases} \alpha_1(t) - \alpha_2(t) = 2k\pi \\ \alpha_2(t) - \alpha_3(t) = 2\ell\pi \end{cases} \quad k, \ell \in \mathbb{N}^*. \\
 &\begin{cases} -\frac{2\pi}{12 \cdot 60^2} t + \frac{2\pi}{60^2} t = 2k\pi \\ -\frac{2\pi}{60^2} t + \frac{2\pi}{60} t = 2\ell\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -t + 12t = k \cdot 12 \cdot 60^2 \\ -t + 60t = \ell \cdot 60^2 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{12}{11} \cdot 60^2 \cdot k \\ t = \frac{1}{59} \cdot 60^2 \cdot \ell \end{cases} \Rightarrow \frac{12k}{11} = \frac{\ell}{59} \Leftrightarrow 12 \cdot 59 k = 11 \ell.
 \end{aligned}$$

La première rencontre des trois aiguilles a lieu lorsque

$$(k, \ell) = (11, 12 \cdot 59)$$

car les deux nombres 11 et $12 \cdot 59$ sont premiers entre eux.

Or $k = 11 \Leftrightarrow t = 12 \cdot 60^2$ secondes = 12 heures.

Les trois aiguilles sont de nouveau superposées à minuit : cela n'est pas une surprise !

Mais ce que nous venons de démontrer c'est qu'il n'y a pas de superposition des trois aiguilles de la montre entre midi et minuit.

8. Sur une piste circulaire, deux personnes prennent simultanément le départ en un même point A .

La première personne court à vitesse constante et effectue un tour complet en 60 secondes et la deuxième part en sens inverse, à vitesse constante et fait un tour en 250 secondes.

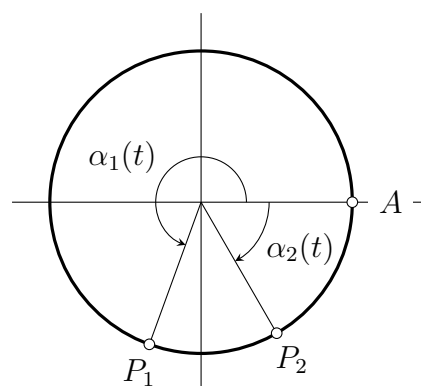
- a) Déterminer l'instant t_n où les deux coureurs se rencontrent pour la n -ième fois.
- b) Déterminer l'instant t_A où les deux personnes se rencontrent pour la première fois au point de départ A .

Soit $\alpha_1(t)$ l'angle parcouru en t secondes ($t > 0$) par la première personne :

$$\alpha_1(t) = \frac{2\pi}{60} t = \frac{\pi}{30} t.$$

Soit $\alpha_2(t)$ l'angle parcouru en t secondes par la deuxième personne :

$$\alpha_2(t) = -\frac{2\pi}{250} t = -\frac{\pi}{125} t.$$



- a) Les deux coureurs se rencontrent au temps t si les deux angles diffèrent d'un nombre entier de tours.

Plus précisément, ils se rencontrent pour la n -ième fois si les deux angles diffèrent de n tours.

$$\alpha_1(t_n) - \alpha_2(t_n) = 2n\pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{30} t_n - \left(-\frac{\pi}{125} t_n\right) = 2n\pi, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

$$t_n = n \cdot \frac{1500}{31} \text{ secondes}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

- b) • Une méthode

Les deux coureurs se rencontrent au point de départ A , au temps t ($t > 0$), si les deux angles correspondent à des nombres entiers de tours.

$$\alpha_1(t) = 2k\pi \quad \text{et} \quad \alpha_2(t) = 2\ell\pi, \quad k, \ell \in \mathbb{Z} \quad (k > 0 \quad \text{et} \quad \ell < 0).$$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{30} t = 2k\pi \\ -\frac{\pi}{125} t = 2\ell\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 60k \\ t = -250\ell \end{cases} \Rightarrow 6k = -25\ell.$$

La première rencontre au point de départ A a lieu pour $k = 25$ et $\ell = -6$, ce qui correspond à :

$$t_A = 60k = -250\ell = 60 \cdot 25 \text{ secondes} = 25 \text{ minutes}.$$

- Une autre méthode qui utilise le résultat de la partie a).

Les deux coureurs se rencontrent au point de départ A , s'ils se rencontrent et que l'un d'eux est au point A .

- Les deux coureurs se rencontrent pour la n -ième fois si et seulement si

$$t = n \cdot \frac{1500}{31} \text{ secondes}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

- Le coureur n° 1 est au point A si et seulement si il a effectué un nombre entier de tours. En d'autres termes, si et seulement si

$$\alpha_1(t) = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

$$\alpha_1(t) = 2k\pi \Leftrightarrow \frac{2\pi}{60} t = 2k\pi \Leftrightarrow t = 60k, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

- Détermination de k et n

$$\begin{cases} t = 60k \\ t = n \cdot \frac{1500}{31} \end{cases} \Rightarrow 60k = n \cdot \frac{1500}{31} \Leftrightarrow 31k = 25n.$$

Or 25 et 31 sont premiers entre eux, donc toutes les solutions sont de la forme

$$(k, n) = \lambda(25, 31), \quad \lambda \in \mathbb{N}^*.$$

- Conclusion

La première rencontre au point de départ A a lieu pour $k = 25$ et $n = 31$, ce qui correspond à :

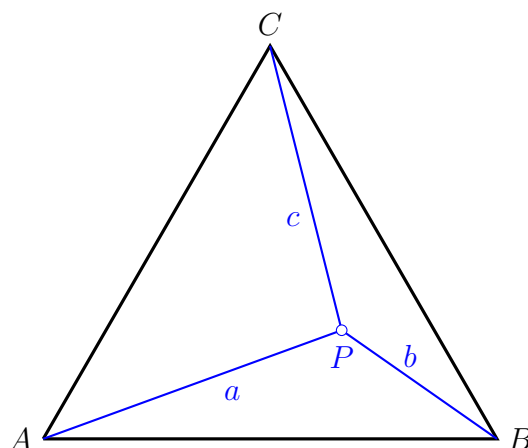
$$t_A = 60k = 60 \cdot 25 \text{ secondes} = 25 \text{ minutes}.$$

9. Exercice récréatif

On considère un triangle équilatéral ABC et un point P quelconque à l'intérieur du triangle. On note $a = PA$, $b = PB$ et $c = PC$.

Montrer que quelle que soit la position de P dans le triangle ABC , on peut construire un triangle dont les côtés sont de longueur a , b et c .

Indication : utiliser une rotation pour construire le triangle demandé.



En effectuant une rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$, (c'est une isométrie), on transforme le triangle équilatéral ABC en un triangle isométrique $A'B'C'$. Le point P a pour image P' et le segment $B'P'$ a donc pour longueur b . D'autre part, le triangle APP' est équilatéral, le segment PP' est donc de longueur a . Le triangle PCP' est donc le triangle cherché.

