Corrigé 12

1. Calculer sans machine les quantités suivantes :

a) $A = \log_2 \frac{1}{16}$ c) $C = \log_\pi 1$ e) $E = \log(\log 10^{10})$

b) $B = \log_4 2$ d) $D = \log_{1/2} 8$ f) $F = e^{2 \ln 5}$

---

a) On exprime l'argument du logarithme comme une exponentielle de même base :
$A = \log_2 \frac{1}{16} = \log_2(2^{-4}) = -4 \log_2(2) = -4\,.$

b) $B = \log_4 2 = \log_4 \sqrt{4} = \log_4(4^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2} \log_4(4) = \frac{1}{2}\,.$

c) Le logarithme de 1 est nul quel que soit sa base : $C = \log_\pi 1 = \dfrac{\ln 1}{\ln \pi} = 0\,.$

d) $D = \log_{1/2} 8 = \log_{1/2} \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = -3 \log_{1/2} \left(\frac{1}{2}\right) = -3\,.$

e) $E = \log(\log 10^{10}) = \log[\,10\,(\log 10)\,] = \log[\,10\,] = 1\,.$

f) On exprime l'argument de l'exponentielle comme un logarithme de même base :
$F = e^{2 \ln 5} = e^{\ln(5^2)} = e^{\ln 25} = 25\,.$

2. Exprimer les quantités suivantes à l'aide d'une seule fonction logarithme ou exponentielle :

a) $A = \log 15 - \log 6 + 3 \log 2$ b) $B = \sqrt{e^9} \cdot e^{2 - \ln 3} \cdot e^{-3/2}$

---

a) $A = \log 15 - \log 6 + 3 \log 2 = \log 15 - \log 6 + \log(2^3) = \log\left(15 \cdot \frac{1}{6} \cdot 2^3\right)$
$= \log(2 \cdot 10) = 1 + \log 2\,.$

b) $B = \sqrt{e^9} \cdot e^{2 - \ln 3} \cdot e^{-3/2} = e^{9/2} \cdot e^{2 + \ln \frac{1}{3}} \cdot e^{-3/2} = e^{9/2} \cdot e^2 \cdot e^{\ln \frac{1}{3}} \cdot e^{-3/2}$
$= \frac{1}{3} e^{9/2} \cdot e^{-3/2} \cdot e^2 = \frac{1}{3} e^{9/2 - 3/2 + 2} = \frac{1}{3} e^5.$

3. Résoudre les équations suivantes :

a) $e^{3x/2} - e^{-3x/2} = \dfrac{1}{2} \left(e^{x/2} + 5\, e^{-x/2}\right)$

b) $e^{\sin x} - e^{-\sin x} = 2 \left(1 + e^{-\sin x}\right)$

c) $3 + \log_2 \left(\frac{1}{2} - x\right) = \log_2 \left(\frac{x-9}{x+1}\right)$

d) $\log_{1/2} \left(2x - 13 - \frac{15}{x}\right) - \frac{1}{2} = \log_{1/2} \left[\,2\,(x - 15)\,\right] + \frac{1}{2}$

---

a) $e^{3x/2} - e^{-3x/2} = \frac{1}{2}\left(e^{x/2} + 5\,e^{-x/2}\right)$, $\qquad D_{\text{def}} = \mathbb{R}$.

On pose $y = e^{x/2}$, $y > 0$ et l'équation devient : $2\,(y^3 - y^{-3}) = y + 5\,y^{-1}$

$\Leftrightarrow \quad 2\,y^6 - y^4 - 5\,y^2 - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\,z^3 - z^2 - 5\,z - 2 = 0$,

avec $z = y^2 = e^x$, $z > 0$. $\quad z = -1$ est une racine évidente :

$(z+1)\,(2z^2 - 3z - 2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (z+1)\,(z-2)\,(2z+1) = 0$.

La seule solution positive est $z = 2$: $\quad e^x = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln 2$.

b) $e^{\sin x} - e^{-\sin x} = 2\,\left(1 + e^{-\sin x}\right)$, $\qquad D_{\text{def}} = \mathbb{R}$.

$e^{\sin x} - e^{-\sin x} = 2\,\left(1 + e^{-\sin x}\right) \quad \Leftrightarrow \quad e^{\sin x} - 3\,e^{-\sin x} - 2 = 0$,

on pose $y = e^{\sin x}$, $y > 0$ et l'équation devient : $y - 3\,y^{-1} - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad y^2 - 2\,y - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (y-3)\,(y+1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 3 \quad (y > 0)$.

$y = 3 \quad \Leftrightarrow \quad e^{\sin x} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = \ln 3$,

or $3 > e$ $(e \approx 2,718)$ et la fonction $\ln$ est croissante, donc $\ln 3 > 1$,

l'équation $\sin x = \ln 3$ n'admet donc pas de solution.

c) $3 + \log_2\left(\frac{1}{2} - x\right) = \log_2\left(\frac{x-9}{x+1}\right)$.

$D_{\text{def}} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} - x > 0 \text{ et } \frac{x-9}{x+1} > 0\right\} = \left] -\infty\,, -1\right[$.

$\log_2(2^3) + \log_2\left(\frac{1}{2} - x\right) - \log_2\left(\frac{x-9}{x+1}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \log_2\left(2^3 \cdot \left(\frac{1}{2} - x\right) \cdot \frac{x+1}{x-9}\right) = \log_2 1$

$\Leftrightarrow \quad 2^3 \cdot \left(\frac{1}{2} - x\right) \cdot \frac{x+1}{x-9} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 8x^2 + 5x - 13 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (8x+13)\,(x-1) = 0$.

$x = 1 \notin D_{\text{def}}$, $\quad$ la seule solution est $x = -\frac{13}{8}$.

d) $\log_{1/2}\left(2x - 13 - \frac{15}{x}\right) - \frac{1}{2} = \log_{1/2}\left[2\,(x-15)\right] + \frac{1}{2}$.

$D_{\text{def}} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 2x - 13 - \frac{15}{x} > 0 \text{ et } 2\,(x-15) > 0\right\} = \left]15\,, +\infty\right[$.

$\log_{1/2}\left(2x - 13 - \frac{15}{x}\right) - \log_{1/2}\left[2\,(x-15)\right] = 1$

$\Leftrightarrow \quad \log_{1/2}\left(\frac{2x^2 - 13x - 15}{2x\,(x-15)}\right) = \log_{1/2}\left(\frac{1}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{2x^2 - 13x - 15}{2x\,(x-15)} = \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \quad x^2 + 2x - 15 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+5)\,(x-3) = 0$

or $\quad x = -5 \notin D_{\text{def}} \quad$ et $\quad x = 3 \notin D_{\text{def}}$, $\quad$ d'où $\quad S = \emptyset$.

4. Résoudre les inéquations suivantes :

a) $\ln\left(2x - e^{-\ln x}\right) < 2 + \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

b) $3^{x+4} - 1458 \leq 9^x$
(Astuce : $27 + 54 = 81, 27 \cdot 54 = 1458$)

c) $e^9 \cdot e^x > \left(e^{\sqrt{6-x}}\right)^2$

d) $\ln(x^2\sqrt{e^{2x}}) > x + \ln(16x - 48)$

---

a) $\ln\left(2x - e^{-\ln x}\right) < 2 + \ln\left(\frac{1}{x}\right)$.

$D_{\text{def}} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\,,\ \ \frac{1}{x} > 0 \ \text{ et } \ 2x - \frac{1}{x} > 0\right\} \ = \ \left]\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,,\, +\infty\,\right[$.

On a : $\ln\left(2x - e^{-\ln x}\right) < 2 + \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

$\Leftrightarrow \ln\left(2x - \frac{1}{x}\right) < 2 + \ln\left(\frac{1}{x}\right) \quad \Leftrightarrow \ln\left(\frac{2x^2-1}{x}\right) < 2 + \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

$\Leftrightarrow \quad \ln\left(2x^2 - 1\right) + \ln\left(\frac{1}{x}\right) < 2 + \ln\left(\frac{1}{x}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left(2x^2 - 1\right) < 2$

$\Leftrightarrow \quad 2x^2 - 1 < e^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 < \frac{1+e^2}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -\sqrt{\frac{1+e^2}{2}} < x < \sqrt{\frac{1+e^2}{2}}$.

D'où $\quad S = \left]\, \frac{\sqrt{2}}{2}\,,\, \frac{\sqrt{2\,(1+e^2)}}{2}\,\right[$.

b) $3^{x+4} - 1458 \leq 9^x\,, \qquad D_{\text{def}} = \mathbb{R}$.

$3^{x+4} - 1458 \leq 9^x \quad \Leftrightarrow \quad (3^2)^x - 3^x \cdot 3^4 + 1458 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (3^x)^2 - 81 \cdot 3^x + 1458 \geq 0$

En posant $y = 3^x\,,\ \ y > 0\,,$ l'inéquation devient :

$y^2 - 81\,y + 1458 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (y - 27)\,(y - 54) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad y \leq 27 \ \text{ ou } \ y \geq 54$.

- $y \leq 27 \quad \Leftrightarrow \quad 3^x \leq 27 \quad \Leftrightarrow \quad 3^x \leq 3^3 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq 3$
- $y \geq 54 \quad \Leftrightarrow \quad 3^x \geq 54 \quad \Leftrightarrow \quad 3^x \geq 2 \cdot 3^3 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 3 + \log_3(2)$

car la fonction exponentielle de base 3 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

D'où $\quad S = \ ]-\infty\,,\, 3] \ \cup \ [3 + \log_3(2)\,,\, +\infty\,[$.

c) $e^9 \cdot e^x > \left(e^{\sqrt{6-x}}\right)^2$

Domaine de définition: $D_{\text{def}} =]-\infty, 6]$

On a $e^9 \cdot e^x > \left(e^{\sqrt{6-x}}\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad e^{9+x} > e^{2\sqrt{6-x}}$

La fonction exponentielle étant strictement croissante on obtient

$9 + x > 2\sqrt{6-x}$

Condition de positivité : $9 + x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > -9$

Après élévation au carré, nous avons : $x^2 + 18x + 81 > 4(6 - x) \quad \Leftrightarrow$

$(x + 3)(x + 19) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in]-\infty\,;\, -19[\, \cup\,]-3\,;\, +\infty[$

En intersectant avec le domaine de définition et la condition de positivité, nous avons : $S =]-3\,;\, 6]$

d) $\ln(x^2\sqrt{e^{2x}}) > x + \ln(16x-48)$

Domaine de définition : on doit imposer $x^2\sqrt{e^{2x}} > 0 \;\Rightarrow\; x \neq 0$ et $16x-48 > 0 \;\Rightarrow\; x > 3$ d'où $D_{\text{def}} =]3, +\infty[$.

En utilisant les propriétés du logarithme :

$$\ln(x^2\sqrt{e^{2x}}) > x + \ln(16x-48) \quad\Leftrightarrow\quad \ln(x^2) + \ln(\sqrt{e^{2x}}) > x + \ln(16x-48)$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln(x^2) + x > x + \ln(16x-48) \quad\Leftrightarrow\quad \ln(x^2) > \ln(16x-48)\,.$$

Comme le logarithme naturel est une fonction monotone croissante, on a :

$$x^2 > 16x - 48 \quad\Leftrightarrow\quad (x-4)(x-12) > 0 \quad\Leftrightarrow\quad x \in]-\infty, ;\, 4[\, \cup\,]12\,;\, +\infty[\,;$$

On obtient ainsi en intersectant avec le domaine de définition : $S =]3\,;\,4[\, \cup\,]12\,;\,+\infty[$.

5. Résoudre les inéquations suivantes :

a) $\log_a \frac{x-4}{x-6} \leq -1 + \log_a(2x) - 2\,\log_a|x-6|$

i) avec $a = 2$, ii) puis avec $a = \frac{1}{2}$.

b) $\log_a(4-x) + a \leq a \cdot \log_a(x+2) - 1$

i) avec $a = 2$, ii) puis avec $a = \frac{1}{2}$.

---

a) $\log_a \frac{x-4}{x-6} \leq -1 + \log_a(2x) - 2\,\log_a|x-6|\,.$

$D_{\text{def}} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x - 6 \neq 0,\;\; 2x > 0 \;\text{ et }\; \frac{x-4}{x-6} > 0\right\} \;=\;]\,0\,,\,4\,[\,\cup\,]\,6\,,\,+\infty\,[\,.$

$\log_a \frac{x-4}{x-6} + 2\,\log_a|x-6| + 1 \leq \log_a(2x)$

$\Leftrightarrow \quad \log_a \frac{x-4}{x-6} + \log_a(x-6)^2 + \log_a(a) \leq \log_a(2x)$

$\Leftrightarrow \quad \log_a[\,a\,(x-4)\,(x-6)\,] \leq \log_a(2x)\,.$

i) La fonction logarithme de base $a = 2$ est strictement croissante :

$\log_2[\,2\,(x-4)\,(x-6)\,] \leq \log_2(2x) \quad\Leftrightarrow\quad 2\,(x-4)\,(x-6) \leq 2x$

$\Leftrightarrow \quad x^2 - 11x + 24 \leq 0 \quad\Leftrightarrow\quad (x-3)\,(x-8) \leq 0 \quad\Leftrightarrow\quad x \in [\,3\,,\,8\,]\,.$

D'où $S = [\,3\,,\,4\,[\,\cup\,]\,6\,,\,8\,]\,.$

ii) La fonction logarithme de base $a = \frac{1}{2}$ est strictement décroissante :

$\log_{1/2}[\,\frac{1}{2}\,(x-4)\,(x-6)\,] \leq \log_{1/2}(2x) \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{2}\,(x-4)\,(x-6) \geq 2x$

$\Leftrightarrow \quad x^2 - 14x + 24 \geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad (x-2)\,(x-12) \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad x \in\;]-\infty\,,\,2]\,\cup\,[12\,,\,+\infty\,]\,.$ D'où $S = \;]\,0\,,\,2]\,\cup\,[12\,,\,+\infty\,[\,.$

b) Ensemble de définition: les arguments du log doivent être positifs: $D_f =]-2\,;\,4[$

$$\log_a(4-x)+a \leq a\cdot\log_a(x+2)-1 \quad\Leftrightarrow\quad \log_a\frac{(4-x)}{(x+2)^a} \leq -a-1$$

(i) $\log_2\dfrac{(4-x)}{(x+2)^2} \leq -3$

Le logarithme et la fonction puissance sont strictement monotones croissantes pour a = 2; on peut prendre l'exponentielle de base 2 de chaque membre:

$$\frac{(4-x)}{(x+2)^2} \leq 2^{-3} \quad\Leftrightarrow\quad 4-x \leq \frac{1}{8}(x+2)^2 \quad\Leftrightarrow\quad x^2+12x-28 \geq 0$$

$x \in]-\infty\,;\,-14] \,\cup\, [2\,;\,+\infty[= I_1; \quad S = I_1 \,\cap\, D_f = [2\,;\,4[.$

(ii) Le logarithme et la fonction puissance sont strictement monotones décroissantes pour a = 1/2 ; on peut prendre l'exponentielle de base 1/2 de chaque membre:

$$\frac{(4-x)}{(x+2)^{\frac{1}{2}}} \geq \frac{1}{2}^{\frac{-3}{2}} \quad\Leftrightarrow\quad 4-x \geq \sqrt{8(x+2)} \quad\Leftrightarrow\quad x^2-16x \geq 0$$

car $x<4$, donc on a pu élever l'inégalité au carré puisque tous les facteurs sont positifs.

$x \in]-\infty\,;\,0] \,\cup\, [16\,;\,+\infty[= I_2; \quad S = I_2 \,\cap\, D_f =]-2\,;\,0].$

6. Déterminer, là où elles existent, les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

a) $a(x) = \tan(a^x)$,

b) $b(x) = e^{1/\ln x}$,

c) $c(x) = \ln(\ln x)$,

d) $d(x) = \arcsin(e^x)$,

e) $e(x) = x\cdot\sin(\ln x - \frac{\pi}{4})$.

---

a) $a(x) = \tan(a^x) = \tan\left(e^{x\ln a}\right) \quad\Rightarrow\quad a'(x) = \ln a\, e^{x\ln a}\left[1+\tan^2(e^{x\ln a})\right]$

$= a^x\,\ln a\left[1+\tan^2(a^x)\right]$,

b) $b(x) = e^{1/\ln x} \quad\Rightarrow\quad b'(x) = (1/\ln x)'\,e^{1/\ln x} = -\dfrac{e^{1/\ln x}}{x\,\ln^2 x}$,

c) $c(x) = \ln(\ln x) \quad\Rightarrow\quad c'(x) = (\ln x)'\dfrac{1}{\ln x} = \dfrac{1}{x\,\ln x}$,

d) $d(x) = \arcsin(e^x) \quad\Rightarrow\quad d'(x) = (e^x)'\dfrac{1}{\sqrt{1-(e^x)^2}} = \dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$,

e) $e(x) = x \cdot \sin(\ln x - \frac{\pi}{4}) \quad \Rightarrow \quad e'(x) = \sin(\ln x - \frac{\pi}{4}) + x \cdot \frac{1}{x} \cdot \cos(\ln x - \frac{\pi}{4})$

$= \sin(\ln x - \frac{\pi}{4}) + \cos(\ln x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\, \sin(\ln x)\,.$