

## Corrigé 11

1. Exprimer les nombres suivants à l'aide de la fonction logarithme :

a)  $A = -1$ ,                      b)  $B = \frac{1}{2}$ ,                      c)  $C = 3$ .

---

a)  $A = -1 = -\ln e = \ln(e^{-1}) = \ln\left(\frac{1}{e}\right)$ .

b)  $B = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \ln e = \ln(e^{\frac{1}{2}}) = \ln(\sqrt{e})$ .

c)  $C = 3 = 3 \ln e = \ln(e^3)$ .

2. Exprimer les quantités suivantes de la façon la plus simple possible, à l'aide d'une seule fonction logarithme :

a)  $A = \ln 15 - \ln 6 + 3 \ln 2$ ,                      b)  $B = \ln(3 \cdot \sqrt{e}) + \ln\left(\frac{2\sqrt{2}}{9}\right) - \frac{1}{2} \ln 8$ .

a)  $A = \ln 15 - \ln 6 + 3 \ln 2 = \ln 15 + \ln(6^{-1}) + \ln(2^3) = \ln\left(15 \cdot \frac{1}{6} \cdot 2^3\right) = \ln(20)$ .

b)  $B = \ln(3 \cdot \sqrt{e}) + \ln\left(\frac{2\sqrt{2}}{9}\right) - \frac{1}{2} \ln 8 = \ln(3) + \frac{1}{2} \ln(e) + \ln(2\sqrt{2}) - \ln(9) - \ln(\sqrt{8})$   
 $= \ln(3) + \frac{1}{2} \ln(e) + \ln(\sqrt{8}) - 2 \ln(3) - \ln(\sqrt{8}) = \frac{1}{2} \ln(e) - \ln(3) = \ln(\sqrt{e}) - \ln(3) = \ln\left(\frac{\sqrt{e}}{3}\right)$ .

3. Résoudre les équations suivantes :

a)  $3 \ln 2 + \ln\left(\frac{1}{2} - x\right) = \ln\left(\frac{x-9}{x+1}\right)$                       b)  $\ln(\sin x) = 1 + \ln(\cos x)$

c)  $\ln\left(2x - 13 - \frac{15}{x}\right) + \ln \sqrt{2} = \ln(2x - 30) - \ln \sqrt{2}$

---

a)  $3 \ln 2 + \ln\left(\frac{1}{2} - x\right) = \ln\left(\frac{x-9}{x+1}\right)$ .

$$D_{\text{def}} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} - x > 0 \text{ et } \frac{x-9}{x+1} > 0\right\} = ] - \infty, -1[.$$

$$\ln(2^3) + \ln\left(\frac{1}{2} - x\right) = \ln\left(\frac{x-9}{x+1}\right) \Leftrightarrow \ln\left[8\left(\frac{1}{2} - x\right)\right] = \ln\left(\frac{x-9}{x+1}\right)$$

$$\Leftrightarrow 8\left(\frac{1}{2} - x\right) = \frac{x-9}{x+1} \Leftrightarrow 8x^2 + 5x - 13 = 0 \Leftrightarrow (8x + 13)(x - 1) = 0.$$

$$x = 1 \notin D_{\text{def}}, \text{ la seule solution est } x = -\frac{13}{8}.$$

b)  $\ln(\sin x) = 1 + \ln(\cos x)$ .

$$D_{\text{def}} = \{x \in \mathbb{R} \mid \sin x > 0 \text{ et } \cos x > 0\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} ]2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi[.$$

$$\ln(\sin x) - \ln(\cos x) = 1 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = 1 \Leftrightarrow \ln(\tan x) = \ln e$$

$$\Leftrightarrow \tan x = e \Leftrightarrow x = \arctan e + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Les seules solutions acceptables sont celles qui appartiennent au premier quadrant :  $x = \arctan e + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

c)  $\ln\left(2x - 13 - \frac{15}{x}\right) + \ln \sqrt{2} = \ln(2x - 30) - \ln \sqrt{2}$ .

$$D_{\text{def}} = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x - 13 - \frac{15}{x} > 0 \text{ et } 2(x - 15) > 0\} = ]15, +\infty[.$$

$$\ln\left(2x - 13 - \frac{15}{x}\right) + 2 \ln \sqrt{2} = \ln [2(x - 15)]$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(2x - 13 - \frac{15}{x}\right) + \ln 2 = \ln 2 + \ln(x - 15)$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(2x - 13 - \frac{15}{x}\right) = \ln(x - 15)$$

$$\Leftrightarrow 2x - 13 - \frac{15}{x} = x - 15 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 15 = 0 \Leftrightarrow (x + 5)(x - 3) = 0.$$

Or  $x = -5 \notin D_{\text{def}}$  et  $x = 3 \notin D_{\text{def}}$ , d'où  $S = \emptyset$ .

4. Résoudre les trois inéquations suivantes :

a)  $\ln \sqrt{3 - x} + \ln \sqrt{x + 1} \leq \ln \sqrt{10 - 6x}$

b)  $\ln\left(2x - \frac{1}{x}\right) < 2 + \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

c)  $\ln \frac{x-4}{x-6} \leq -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{4}\right) + \ln(2x) - 2 \ln|x - 6|$

a)  $\ln \sqrt{3 - x} + \ln \sqrt{x + 1} \leq \ln \sqrt{10 - 6x}$ .

$$D_{\text{def}} = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 - x > 0, \quad x + 1 > 0 \text{ et } 10 - 6x > 0\} = ]-1, \frac{5}{3}[.$$

$$\text{Sur } D_{\text{def}}, \quad \ln \sqrt{3 - x} = \frac{1}{2} \ln(3 - x), \quad \ln \sqrt{x + 1} = \frac{1}{2} \ln(x + 1)$$

et  $\ln \sqrt{10 - 6x} = \frac{1}{2} \ln(10 - 6x)$ . L'inéquation s'écrit alors

$$\ln(3 - x) + \ln(x + 1) \leq \ln(10 - 6x) \Leftrightarrow \ln[(3 - x)(x + 1)] \leq \ln(10 - 6x)$$

or la fonction logarithme est strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$  :

$$\ln[(3 - x)(x + 1)] \leq \ln(10 - 6x) \Leftrightarrow (3 - x)(x + 1) \leq 10 - 6x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 7 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x - 7) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1 \text{ ou } x \geq 7.$$

D'où  $S = ]-1, 1]$ .

b)  $\ln\left(2x - \frac{1}{x}\right) < 2 + \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ .

$$D_{\text{def}} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0, \frac{1}{x} > 0 \text{ et } 2x - \frac{1}{x} > 0\right\} = \left] \frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty[.$$

$$\ln\left(2x - \frac{1}{x}\right) < 2 + \ln\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow \ln\left(\frac{2x^2-1}{x}\right) < 2 + \ln\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\Leftrightarrow \ln(2x^2 - 1) + \ln\left(\frac{1}{x}\right) < 2 + \ln\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow \ln(2x^2 - 1) < 2$$

$$\Leftrightarrow \ln(2x^2 - 1) < \ln(e^2) \Leftrightarrow 2x^2 - 1 < e^2 \Leftrightarrow x^2 < \frac{1+e^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{\frac{1+e^2}{2}} < x < \sqrt{\frac{1+e^2}{2}}. \quad \text{D'où } S = \left] \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{\frac{2(1+e^2)}{2}} \right[.$$

c)  $\ln \frac{x-4}{x-6} \leq -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{4}\right) + \ln(2x) - 2 \ln|x-6|$ .

$$D_{\text{def}} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x-6 \neq 0, 2x > 0 \text{ et } \frac{x-4}{x-6} > 0\right\} = ]0, 4[ \cup ]6, +\infty[.$$

$$\ln \frac{x-4}{x-6} \leq -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{4}\right) + \ln(2x) - 2 \ln|x-6|$$

$$\Leftrightarrow \ln \frac{x-4}{x-6} \leq \frac{1}{2} \ln(4) + \ln(2) + \ln(x) - \ln(x-6)^2$$

$$\Leftrightarrow \ln \frac{x-4}{x-6} \leq 2 \ln(2) + \ln(x) - \ln(x-6)^2$$

$$\Leftrightarrow \ln \frac{x-4}{x-6} + \ln(x-6)^2 \leq 2 \ln(2) + \ln(x)$$

$$\Leftrightarrow \ln[(x-4)(x-6)] \leq \ln(4x)$$

$$\Leftrightarrow (x-4)(x-6) \leq 4x \quad (\text{car } \ln \text{ est strictement croissante})$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 14x + 24 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x-12) \leq 0,$$

D'où  $S = [2, 4[ \cup ]6, 12]$ .

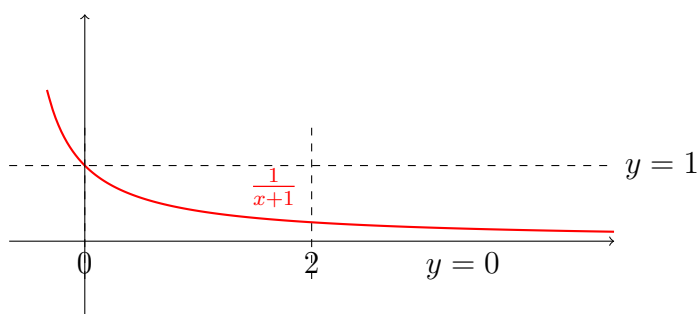
5. Déterminer la surface délimitée par les droites  $x = 0$ ,  $x = 2$ ,  $y = 0$  et

$$y = \frac{x}{x+1},$$

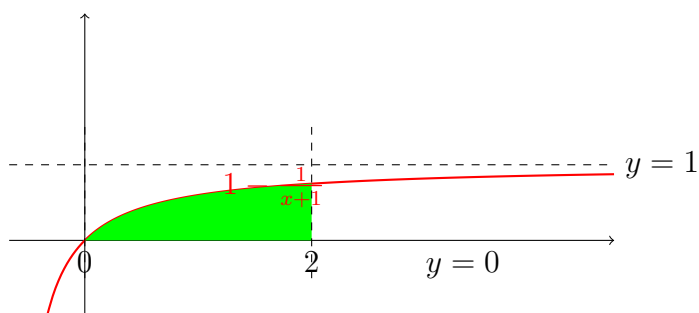
sans faire appel à la notion d'intégrale.

On remarque que  $y = \frac{x}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$ .

**Méthode 1 :** Commençons par tracer le graphe de la fonction  $\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$ . La fonction  $\frac{1}{x+1}$  a comme graphe celui de  $\frac{1}{x}$ , décalé de 1 vers la gauche.

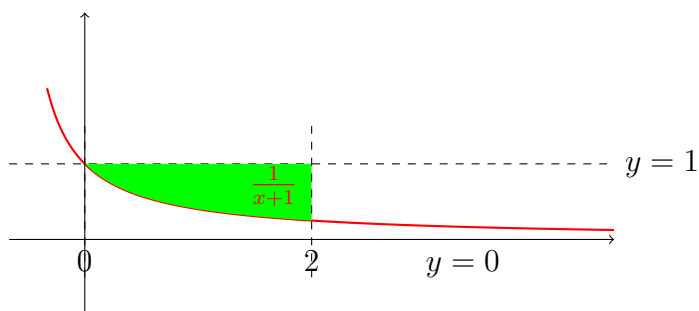


Le graphe de  $y = 1 - \frac{1}{x+1}$ , est obtenu par multiplication par  $-1$  puis translation verticale de  $+1$  du graphe de  $y = \frac{1}{x+1}$  :

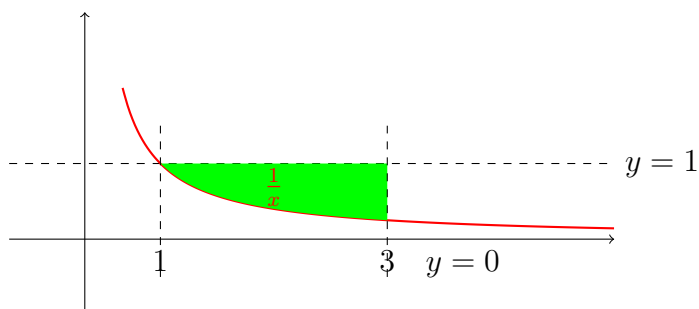


L'aire recherchée est donc l'aire du domaine vert sur la figure ci-dessus.

Par inversion par  $-1$ , on regarde alors :



Enfin par translation horizontale, l'aire recherchée se lit sur la figure :



On a donc que la surface  $S$  recherchée vaut la surface délimitée par  $x = 1$ ,  $x = 3$ ,  $y = 0$  et  $y = 1$ , qui vaut  $2$ , moins  $\ln(3)$ . On a donc

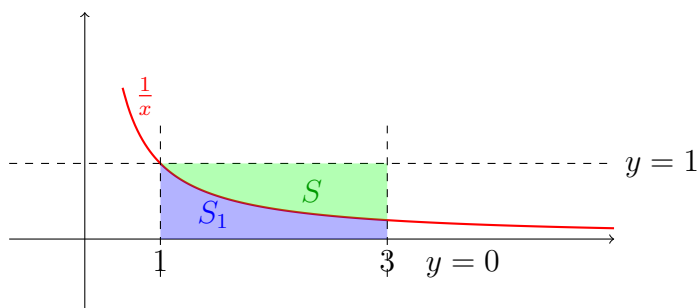
$$S = 2 - \ln(3).$$

**Méthode 2 :** Par translation, on remarque que l'aire du domaine délimité par  $x = 0$ ,  $x = 2$ ,  $y = 0$  et  $y = 1 - \frac{1}{x+1}$  correspond à l'aire  $S$  du domaine délimité par  $x = 1$ ,  $x = 3$ ,  $y = 0$  et  $y = 1 - \frac{1}{x}$ . Cette aire peut être calculée comme

$$S = R - S_1,$$

avec :

- $R$ , l'aire du rectangle délimité par les droites  $x = 1$ ,  $x = 3$ ,  $y = 0$  et le graphe de la fonction constante  $y = 1$ ,
- $S_1$ , l'aire du domaine délimité par  $x = 1$ ,  $x = 3$ ,  $y = 0$  et le graphe de la fonction  $y = \frac{1}{x}$ .



On a que  $R = (3 - 1) \cdot 1 = 2$  et, par définition de  $\ln$ ,  $S_1 = \ln(3) - \ln(1) = \ln(3)$ . On trouve finalement que  $S = R - S_1 = 2 - \ln(3)$ .

6. Résoudre dans  $\mathbb{R}^2$  le système suivant :

$$\begin{cases} \ln(6-x) - \ln y = \ln\left(\frac{6-x}{4x}\right) + 3 \ln 2 \\ \ln(2) + \ln(4y^2 + 1) - \ln(2y + 3) \leq \ln(x^2 - 2) \end{cases}$$

- Domaine de définition du système

$$D_{\text{def}} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 6 - x > 0, \quad y > 0, \quad \frac{6-x}{4x} > 0, \quad 2y + 3 > 0 \text{ et } x^2 - 2 > 0 \right\},$$

$$D_{\text{def}} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \left] \sqrt{2}, 6 \right[ \text{ et } y > 0 \right\},$$

i)  $\ln(6-x) - \ln y = \ln\left(\frac{6-x}{4x}\right) + 3 \ln 2$

$$\Leftrightarrow \ln(6-x) - \ln y = \ln(6-x) - \ln(4x) + \ln(2^3) \Leftrightarrow \ln(4x) = \ln y + \ln 8$$

$$\Leftrightarrow \ln(4x) = \ln(8y) \Leftrightarrow x = 2y, \quad \text{avec } x \in \left] \sqrt{2}, 6 \right[ \text{ et } y \in \left] \frac{\sqrt{2}}{2}, 3 \right[.$$

ii) Sur  $D_{\text{def}}$ , le système est donc équivalent à

$$\begin{cases} x = 2y \\ \ln(2) + \ln(4y^2 + 1) - \ln(2y + 3) \leq \ln(x^2 - 2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
& \ln(2) + \ln(4y^2 + 1) - \ln(2y + 3) \leq \ln[(2y)^2 - 2] \\
\Leftrightarrow & \ln(2) + \ln(4y^2 + 1) \leq \ln(2y + 3) + \ln(2) + \ln(2y^2 - 1) \\
\Leftrightarrow & \ln(4y^2 + 1) \leq \ln(2y + 3) + \ln(2y^2 - 1) \\
\Leftrightarrow & \ln(4y^2 + 1) \leq \ln[(2y + 3)(2y^2 - 1)] \\
\Leftrightarrow & 4y^2 + 1 \leq (2y + 3)(2y^2 - 1) \quad (\text{car } \ln \text{ est strictement croissante}) \\
\Leftrightarrow & 8y^3 + 4y^2 - 4y - 8 \geq 0 \\
\Leftrightarrow & (y - 1)(2y^2 + 3y + 2) \geq 0 \\
\Leftrightarrow & y - 1 \geq 0.
\end{aligned}$$

D'où  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 2y \text{ et } y \in [1, 3[ \}$ .

L'ensemble solution est le segment de droite d'extrémités  $A(2, 1)$  et  $B(6, 3)$ .

7. Montrer que pour tous  $a, b > 0$ , on a

$$\frac{\ln(a) + \ln(b)}{2} \leq \ln\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

"La moyenne arithmétique des logarithmes est inférieure ou égale au logarithme de la moyenne arithmétique."

---

On se ramène à une comparaison de logarithmes en transformant le membre de gauche :

$$\frac{\ln(a) + \ln(b)}{2} = \frac{1}{2} \ln(ab) = \ln\left(\sqrt{ab}\right), \quad a, b > 0.$$

Pour comparer ces deux logarithmes, il suffit de comparer leur argument, la fonction  $\ln$  étant strictement croissante. Pour cela on évalue leur différence :

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{1}{2} [a + b - 2\sqrt{ab}] = \frac{1}{2} [a + b - 2\sqrt{a}\sqrt{b}] = \frac{1}{2} [\sqrt{a} - \sqrt{b}]^2 \geq 0.$$

On en déduit que  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$  et donc que  $\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \ln\left(\sqrt{ab}\right)$ .

8. Calculer les limites suivantes en utilisant les règles de calculs des limites :

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0^+} [x - \ln(x)] \qquad \text{b) pour } n \in \mathbb{N}^*, \lim_{x \rightarrow 0^+} [x^n - \ln(x)]$$

Calculer les limites suivantes indéterminées en utilisant la définition géométrique du logarithme :

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} [x - \ln(x)] \qquad \text{d) pour } n \in \mathbb{N}^*, \lim_{x \rightarrow +\infty} [x^n - \ln(x)]$$


---

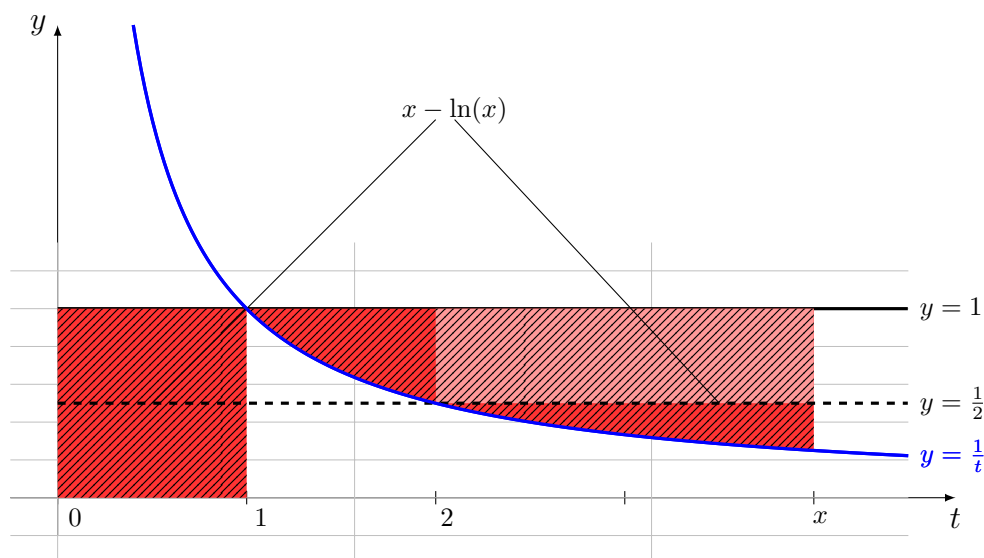
a) Les règles de calculs donnent

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [x - \ln(x)] = 0 - (-\infty) = +\infty.$$

b) Les règles de calculs donnent

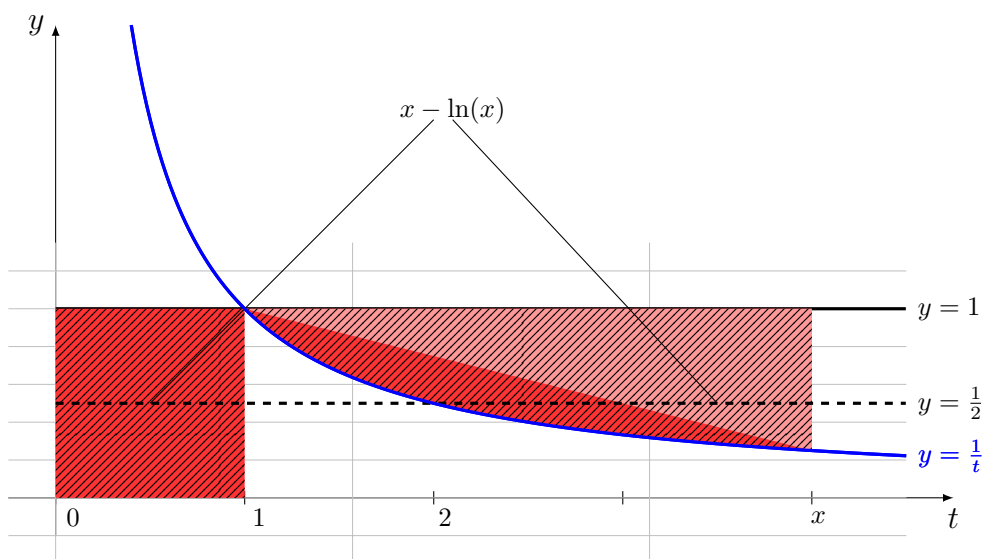
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [x^n - \ln(x)] = 0 - (-\infty) = +\infty.$$

c) Le logarithme  $\ln(x)$  est défini comme la surface en-dessous de la fonction  $f(t) = \frac{1}{t}$ , en partant de  $t = 1$  jusqu'à  $x$ . Similairement, la valeur  $x$  peut être vue comme la surface en dessous de  $y = 1$ , en partant de  $t = 0$  et en s'arrêtant à  $t = x$ . Ainsi,  $x - \ln(x)$  est la surface formée de la différence de ces deux surfaces (représentée par les parties hachurées sur le dessin) :



Si  $x$  augmente,  $x - \ln(x)$  augmente. On peut l'observer en remarquant que la surface donnée par  $x - \ln(x)$  contient la surface donnée par  $\frac{1}{2}(x-2)$  (représentée par le rectangle hachuré rose). On a  $0 < \frac{1}{2}(x-2) \leq x - \ln(x)$  pour  $x \geq 2$ . Ainsi, par la règle du gendarme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln(x)) = +\infty$ .

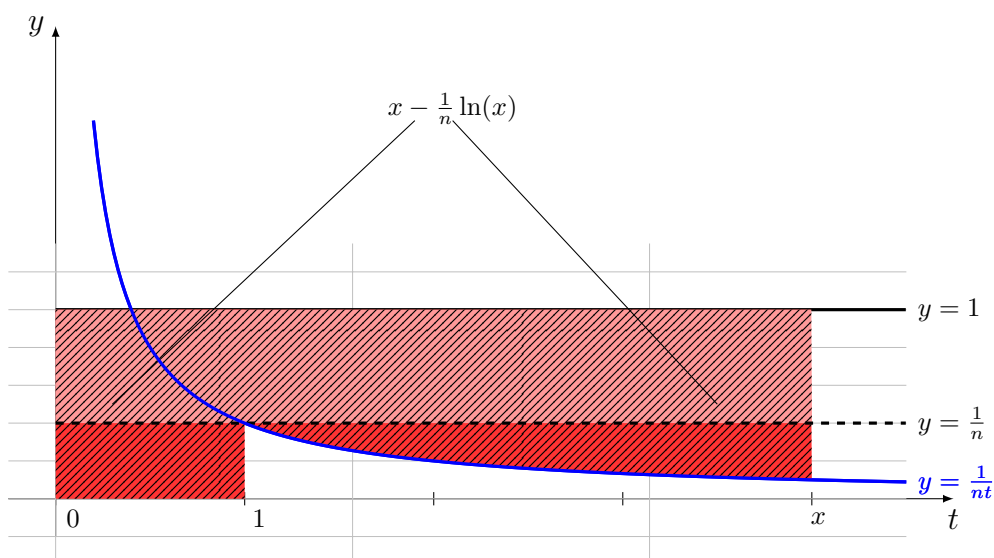
*Remarque :* il est possible de comparer  $x - \ln(x)$  à une autre figure géométrique pour obtenir le résultat. Par exemple, on peut choisir le triangle de sommet  $(1, 1)$ ,  $(x, \frac{1}{x})$ ,  $(x, 1)$  qui est contenu également dans la surface hachurée en rouge. On a alors la comparaison  $\frac{1}{2}(x-1) \cdot (1 - \frac{1}{x}) \leq x - \ln(x)$  qui conduit au même résultat par utilisation de la règle du gendarme.



d) En remplaçant  $x^n$  par  $y$ , on obtient  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^n - \ln(x)) = \lim_{y \rightarrow +\infty} (y - \frac{1}{n} \ln(y))$ .  
 Quitte à changer les lettres, cette expression revient à calculer

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \frac{1}{n} \ln(x)).$$

Géométriquement, l'expression  $\frac{1}{n} \ln(x)$  donne l'aire sous la courbe  $\frac{1}{nt}$  entre  $t = 1$  et  $t = x$  et l'expression  $x$  donne l'aire sous la courbe  $y = 1$  entre  $t = 0$  et  $t = x$ . Leur différence  $x - \frac{1}{n} \ln(x)$  décrit donc la différence de ces surfaces, représentée par la partie hachurée sur le dessin ci-dessous.

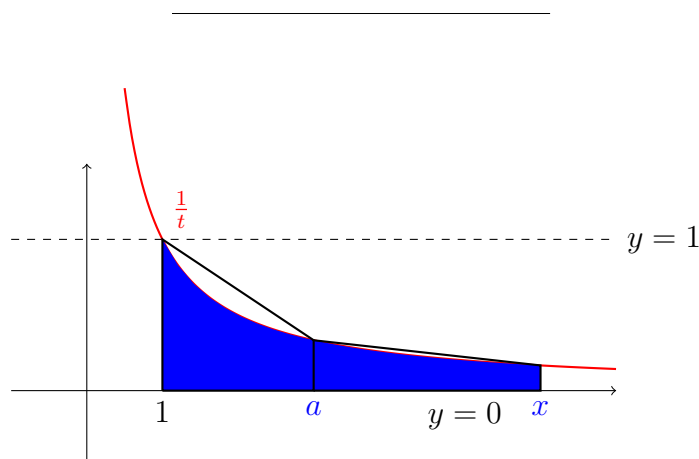


Si  $x$  augmente,  $x - \frac{1}{n} \ln(x)$  augmente. Ceci s'observe en remarquant que la partie hachurée rose sur le dessin est donnée par  $(1 - \frac{1}{n})x$  et que  $0 < (1 - \frac{1}{n})x \leq x - \frac{1}{n} \ln(x)$ . Ainsi,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \frac{1}{n} \ln(x)) = +\infty$ .

9. Calculer la limite suivante en utilisant la définition géométrique du logarithme :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x}.$$

Indication : Comparer  $\ln(x)$  à l'aire du polygone construit sur les trois abscisses 1,  $a$  et  $x$  pour tout  $1 < a < x$ .



Fixons un  $a > 1$  et observons, que si  $x > a$ , la surface en dessous de  $y = \frac{1}{t}$  est majorée par les surfaces des trapèzes de sommets  $(1, 0)$ ,  $(a, 0)$ ,  $(a, 1/a)$ ,  $(1, 1)$  et  $(a, 0)$ ,  $(x, 0)$ ,  $(x, 1/x)$ ,  $(a, 1/a)$ .

On a donc pour  $1 < a < x$  que

$$0 < \ln(x) < \frac{1 + \frac{1}{a}}{2} \cdot (a - 1) + \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{x}}{2} \cdot (x - a).$$

D'où

$$0 < \frac{\ln(x)}{x} < \frac{1 + \frac{1}{a}}{2} \cdot \frac{a - 1}{x} + \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{x}}{2} \cdot \frac{x - a}{x}.$$

En passant à la limite, on trouve que

$$\forall a > 1, 0 \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} \leq \frac{1}{2a}.$$

Par conséquent, puisque  $a > 1$ , on obtient au final que

$$\forall 0 < \varepsilon < 1, 0 \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} \leq \varepsilon.$$

Le seul nombre plus grand ou égal à zéro étant plus petit que n'importe quel nombre strictement positif étant le nombre zéro, on trouve finalement que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0.$$