ANALYSE I
CMS

L'analyse est l'étude de grandeurs numériques (nombres).
Pour ce faire, on développe des outils comme les fonctions, dérivées, intégrales, ...

On rencontre les outils de l'analyse en mathématiques, en physique, les arts d'ingénieurs, en chimie, en biologie, économie, ...

I. Algèbre élémentaire

§ 1.1 Ensembles numériques

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ nombres naturels
- $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, 137, \dots\}$
- $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ les nombres entiers
- $\mathbb{Q} = \{ [p/q] \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^* \}$ les nombres rationnels.

Il existe des nombres <u>irrationnels</u> p.ex. $\pi, e, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \dots$

La collection des nombres rationnels et irrationnels sont appelés <u>nombres réels</u> et on note $\mathbb{R}$.

Il existe une somme + et un produit × sur $\mathbb{R}$, et une <u>relation d'ordre</u> $\geq$ totale, i.e.

$\forall x,y \in \mathbb{R}$, soit $x \geq y$, soit $x < y$

Pour tout choix de

élément des réels

<u>Propriétés</u>: 1) $\forall x \in \mathbb{R} \quad x \geq x$

2) $\forall x,y \in \mathbb{R}$, $x \geq y$ et $y \geq x \iff x = y$

3) $\forall x,y,z \in \mathbb{R}$, $x \geq y$ et $y \geq z \implies x \geq z$

4) $\forall x,y,z \in \mathbb{R}$, $x \geq y \implies x+z \geq y+z$

5) $\forall x,y \in \mathbb{R}$, $x, y \geq 0 \implies x \cdot y \geq 0$

<u>Conséquences</u>: 1) $\forall x,y,a,b \in \mathbb{R}$, $x \geq y$ et $a \geq b$, alors $x+a \geq y+b$.

En effet, $x \geq y \underset{P.4}{\implies} x+a \geq y+a$

et $y+a \geq y+b$ P.4.

$\underset{P.3}{\implies} x+a \geq y+b$

2) $\forall a,x,y \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$, $x \geq y$, alors $ax \geq ay$

En effet, $x \geq y \underset{P.4}{\implies} x-y \geq y-y = 0$

$\underset{P.5}{\implies} a(x-y) \geq 0 \iff ax - ay \geq 0$

$\Rightarrow \; ax \geq ay$

p.q.

3) $\forall\, a,x,y \in \mathbb{R}$, $\quad a \leq 0$ et $x \geq y \;\Rightarrow\; ax \leq ay$

En effet, si $a \leq 0$, alors $0 \leq -a$

p.q.

par 2), $(-a)(x-y) \geq 0 \iff -ax + ay \geq 0$

$\iff ay \geq ax$

p.q.

Exemples: 1) $7 \geq 5$, mais $-14 \leq -10$

Notation: $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

$\mathbb{R}_- := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$

2) Résoudre $x^2 \geqslant x+2$ (2)

(2) $\Leftrightarrow x^2 - x - 2 \geqslant 0$ p. 4.

$\Leftrightarrow (x+1)(x-2) \geqslant 0$ (factorisation)

tableau :

x		-1		2	
$(x+1)$	$-$	0	$+$		$+$
$(x-2)$	$-$		$-$	0	$+$
(2)	$+$	0	$-$	0	$+$

$\Rightarrow$ (2) $\geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant -1$ ou $x \geqslant 2$

$S =]-\infty, -1] \cup [2, \infty[$

$x \leqslant -1$ $x \geqslant 2$

3) Si $x \in [3,5]$ et $y \in [2,4]$

$3 \leqslant x \leqslant 5$ $2 \leqslant y \leqslant 4$

$? \leqslant x+y \leqslant ?$

$$3 \leqslant x \leqslant 5$$
$$2 \leqslant y \leqslant 4$$
$$5 \leqslant x+y \leqslant 9$$

$\Rightarrow x+y \in [5,9]$

et $? \leqslant x - y \leqslant ?$

faux :

$$\cancel{3 \leqslant x \leqslant 5}$$
$$\cancel{2 \leqslant y \leqslant 4}$$
$$\cancel{1 \leqslant x-y \leqslant 1}$$

Correct :

$$3 \leq x \leq 5$$

$$-4 \leq -y \leq -2$$

$$-1 \leq x-y \leq 3$$

$$\Rightarrow \quad \underline{x-y \in [-1, 3]}$$

4) $\underline{\text{Résoudre} \quad x(x-1) \geq (x-1)}$ (4)

Faux : simplifier : $x \geq 1$
par $(x-1)$

Correct : $x(x-1) - (x-1) \geq 0$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{x \in \mathbb{R}}$$

5) $\underline{\text{Résoudre} \quad \frac{x+2}{x+1} \leq \frac{x-2}{x-1}}$ (5)

- $D_{def} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$
- sur D_{def} : $(5) \Leftrightarrow \frac{x+2}{x+1} - \frac{x-2}{x-1} \leq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+2)(x-1) - (x-2)(x+1)}{(x+1)(x-1)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 + x - 2 - (x^2 - x - 2)}{(x+1)(x-1)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x}{(x+1)(x-1)} \leq 0$$

• tableau :

		-1				1	
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$		$-$		$+$
(5)	$+$		$+$		$-$		$+$

$$\Rightarrow \quad x \in \left]-\infty, -1\right[\cup \left[0, 1\right[$$

Résumé :

I : Domaine de définition D_{def}

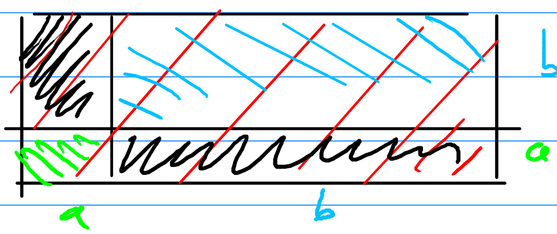
II : Ramener d'un côté et comparer à 0.

III : Factoriser

IV : Tableau de signes

§ I.3. Identités remarquables :

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$



$(a+b)^2$

b^2

a^2

$+2ab$

Exemples : 1) $x^2 > 2x$ (1)

$D_{def} = \mathbb{R}$, (1) $\Leftrightarrow x^2 - 2x > 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 > 1$

$\iff (x-1)^2 > 1$

$\iff (x-1) > 1$ ou $(x-1) < -1$

$\iff x > 2$ ou $x < 0$

$\iff x \in \left]-\infty, 0\right[\cup \left]2, \infty\right[$

2) $(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2}) = 3^2 - \sqrt{2}^2 = 9-2 = 7$

3) $\sqrt{3-\underbrace{\sqrt{8}}_{=2\sqrt{2}}} \overset{?}{=} \sqrt{3-2\sqrt{2}}$ ✓

$= \sqrt{2+1-2\sqrt{2}}$

$= \sqrt{\sqrt{2}^2 + 1^2 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}$

$= |\sqrt{2}-1| = \sqrt{2}-1$

- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- $a^3+b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
- $a^3-b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

Exemples: 1) $\dfrac{2}{3+\sqrt{2}} = \dfrac{2(3-\sqrt{2})}{(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})}$

$= \dfrac{6-2\sqrt{2}}{3^2-\sqrt{2}^2} = \dfrac{6-2\sqrt{2}}{7}$

2) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}} - \frac{(\sqrt[3]{2})^2}{2}$$

$$= \frac{(\sqrt[3]{4})^2 + \sqrt[3]{4}\sqrt[3]{2} + (\sqrt[3]{2})^2}{4 - 2} - \frac{(\sqrt[3]{2})^2}{2}$$

$$= \frac{(\sqrt[3]{4})^2 + \sqrt[3]{4}\sqrt[3]{2}}{2} = \frac{\sqrt[3]{16} + 2}{2} = \frac{\sqrt[3]{2}\cdot 2 + 2}{2}$$

$$= \underline{\underline{\sqrt[3]{2} + 1}}$$

$\boxed{C1a}$

<u>Exemple:</u> Etudier quand $\underline{(x+1)^3 > 125} \quad (1)$

- $D_{def} = \mathbb{R}$ $\quad (D_{ef} = \mathbb{R}) \quad (E_{def} = \mathbb{R}) \quad \cancel{(D_f = \mathbb{R})}$
- $(1) \iff (x+1)^3 - 125 > 0$
- $(1) \quad \underbrace{(x+1)}_{a}{}^3 - \underbrace{5}_{b}{}^3 > 0$

$$\iff (x-4)\left((x+1)^2 + 5(x+1) + 25\right) > 0$$

$$\iff (x-4)(x^2+2x+1 + 5x+5 + 25) > 0$$

$$\iff (x-4)(x^2 + 7x + 31) > 0$$

$$\iff (x-4)\underbrace{\left(\left(x+\frac{7}{2}\right)^2 + 31 - \frac{49}{4}\right)}_{>0} > 0$$

$$\iff (x-4) > 0 \iff \underline{\underline{x > 4}}$$

$$\implies S =]4, \infty[$$

§1.4. (In)égalités avec paramètre

Exemple introductif : Supposons qu'on veut aller en vacances à Malaga. Supposons qu'on ne dépense pas plus que 50 CHF/jour et que une nuit à l'hôtel 100 CHF/nuit.
Pour un budget donné de M CHF combien de jours x peut-on y rester?

$$50x + 100(x-1) \leq M \qquad (1)$$

- $D_{def,M} = \mathbb{R}_+$
- $150x - 100 - M \leq 0$
- $x \leq \frac{M+100}{150}$

Exemple 2 : Résoudre $mx - 2 = 0$ (2)

- $D_{ef,m} = \mathbb{R}$
- $(2) \iff mx = 2$

(2a) $m \neq 0$: $(2) \iff x = \frac{2}{m}$

(2b) $m = 0$: $(2) \iff x \in \emptyset$

Exemple 3 : $mx \leq 3$ (3)

(3a) $m > 0$: $x \leq \frac{3}{m}$, $S =]-\infty, \frac{3}{m}]$

(3b) $m = 0$: $S = \mathbb{R}$

(3c) $m<0$: $\quad (3) \Leftrightarrow x \geqslant \frac{3}{m}$, $S = [\frac{3}{m}, \infty[$

Exemple 4: Résoudre $\frac{x}{x+m} \leqslant \frac{m}{x+m}$ (4)

- $D_{def} = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$
- $(4) \Leftrightarrow \frac{x}{x+m} - \frac{m}{x+m} \leqslant 0$

$\Leftrightarrow \frac{x-m}{x+m} \leqslant 0$

- Tableau de signe:

a: $m>0$:

		$-m$		m	
$x-m$	$-$		$-$	0	$+$
$x+m$	$-$		$+$		$+$
E	$+$		$-$		$+$

$S_m =]-m, m]$ $\qquad x \in]-m, m]$

Ensemble de solutions est un ensemble pour x, qui dépend de la valeur du paramètre m.

b: $m=0$: $\quad (4) \Leftrightarrow \frac{x}{x} \leqslant 0$

$S_m = \emptyset$

c: $m<0$: Tableau de signe:

		m		$-m$	
$x-m$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$
$x+m$	$-$		$-$	$\Vert$	$+$
E	$+$		$-$	$\Vert$	$+$

$$S_m = [m, -m[$$

Astuce 74: Tester des valeurs:

choix $m = -2$, $x = 1$

$$(4) \iff \frac{1-(-2)}{1+(-2)} = \frac{3}{-1} = -3 \leq 0$$

$$S_{-2} = [-2, 2[\ni 1 \quad ✓$$

Marche à suivre:

I. Domaine de définition $D_{def}(m)$

II. Comparer à 0

III. Factoriser

IV. Tableau de signe (m)

§1.5 Valeur absolue :

- résoudre (in-) égalités avec valeur absolue.
- pièges à éviter

Déf. : La valeur <u>absolue</u> d'un nombre $a \in \mathbb{R}$ est à distance à 0 :

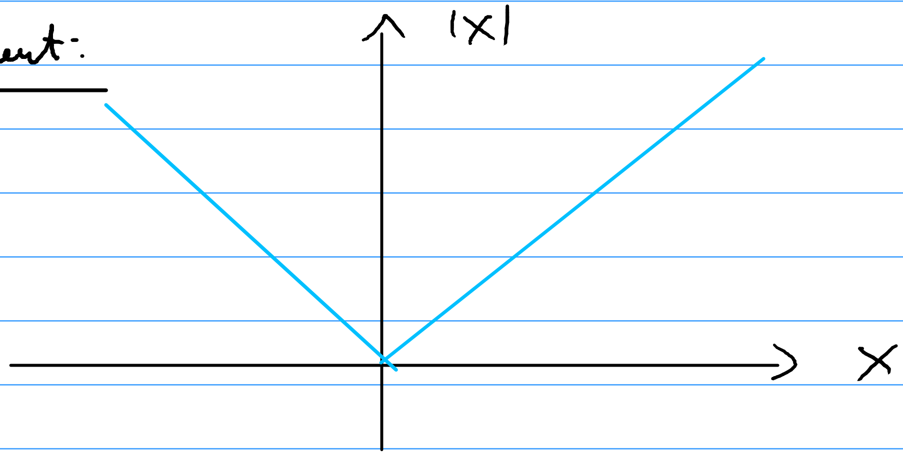
$$|a| := \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Exemples :

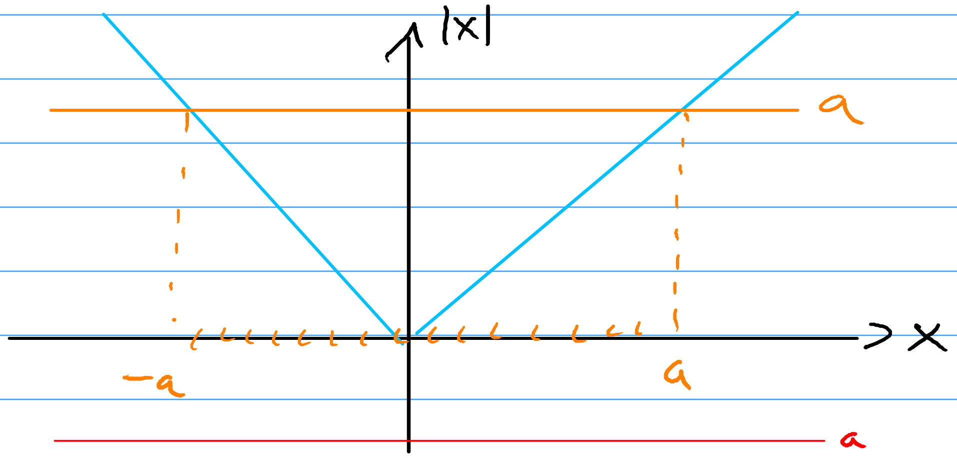
- $|-5| = 5 = |5|$
- $|\sqrt{3}-2| = 2-\sqrt{3}$
- $|x^2+1| = x^2+1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $|x^2-1| = \begin{cases} x^2-1 & \text{si } |x| \geq 1 \\ 1-x^2 & \text{si } |x| < 1 \end{cases}$
- $\sqrt{x^2} = |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$

  $\sqrt{(-2)^2} = 2 = |-2|$

graphiquement :



(In)égalités avec valeur absolue :



$|x| \leq a$

$$|x| = a \iff \underbrace{a \geq 0}_{\text{Domaine de positivité } D_{pos}} \text{ et } \begin{cases} x = a \\ \text{ou} \\ x = -a \end{cases}$$

Plus généralement :

$$|f(x)| = g(x) \iff \underbrace{g(x) \geq 0}_{D_{pos}} \text{ et } \begin{cases} f(x) = g(x) \\ \text{ou} \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$$

Exemple : Résoudre $|x^2 + 2x - 5| = x + 1 \quad (1)$

- $D_{def} = \mathbb{R}$
- D_{pos} : $x + 1 \geq 0 \iff x \geq -1$, $D_{pos} = [-1, +\infty[$

On cherche $x \in D_{def} \cap D_{pos} = [-1, +\infty[$

⚠ piège : élever au carré ajoute des non-solutions

$$(1) \iff \begin{cases} x^2 + 2x - 5 = x + 1 & (1a) \\ \text{ou} \\ x^2 + 2x - 5 = -x - 1 & (1b) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2 + x - 6 = 0 & (1a) \\ \underline{\underline{\text{ou}}} \\ x^2 + 3x - 4 = 0 & (1b) \end{cases}$$

égaler à 0

$$\iff \begin{cases} (x+3)(x-2) = 0 & (1a) \\ \underline{\underline{\text{ou}}} \\ (x+4)(x-1) = 0 & (1b) \end{cases}$$

factoriser

$$\iff S_{1a} = \{2, -3\} \cup S_{1b} = \{-4, 1\}$$

$$\Rightarrow S_1 = \{-4, -3, 1, 2\} \cap D_{pos}$$

$$= \underline{\underline{\{1, 2\}}}$$

C1b

② Résoudre $|x - 3m + 4| = x + m$ (2)

- $\underline{D_{def} = \mathbb{R}}$, $D_{pos} = \underline{[-m, \infty[}$

- D_{pos}

$$(2) \iff \begin{cases} x - 3m + 4 = x + m & (2a) \\ \text{ou} \\ x - 3m + 4 = -x - m & (2b) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 0 = 4m - 4 & (2a) \\ \text{ou} \\ 2x = 2m - 4 & (2b) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S = \mathbb{R} \text{ si } m = 1 \,, \quad S = \emptyset \text{ si } m \neq 1 \\ \text{ou} \\ x = m-2 \quad \Leftrightarrow \quad S = \{m-2\} \end{cases}$$

$$\underset{\cap \underline{D_{pos}}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} [-1, \infty[\text{ si } m = 1 \,, \quad S = \emptyset \text{ si } m \neq 1 \\ \text{ou} \\ S = \{m-2\} \text{ si } \underline{m - 2 \geqslant -m} \end{cases}$$

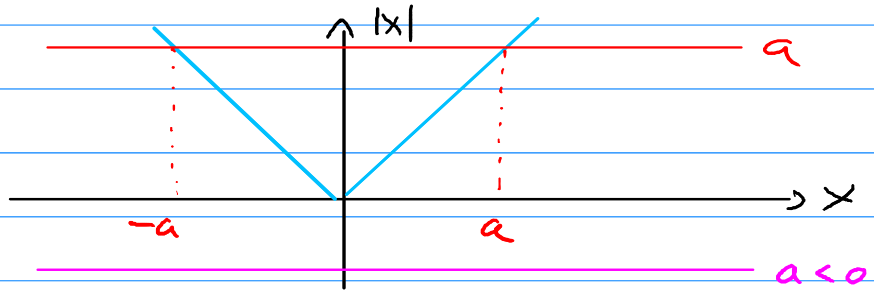
$$\Leftrightarrow \begin{cases} [-1, \infty[\text{ si } m = 1 \,, \quad S = \emptyset \text{ si } m \neq 1 \\ \text{ou} \\ S = \{m-2\} \text{ si } m \geqslant 1 \end{cases}$$

En résumé :

$$\boxed{S = \begin{cases} \emptyset & \text{si } m < 1 \\ [-1, \infty[& \text{si } m = 1 \\ \{m-2\} & \text{si } m > 1 \end{cases}}$$

Inégalités avec valeur absolue :

Résoudre $|x| \leqslant a$, $a \in \mathbb{R}$



$S = [-a, a]$ (pas de D_{pos})

$$\boxed{|f(x)| \leqslant g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leqslant g(x) \\ \underline{\text{et}} \\ f(x) \geqslant -g(x) \end{cases}}$$

$[-a, a] := \{ x \in \mathbb{R} \mid -a \leqslant x \text{ et } x \leqslant a \}$

③ $\left| x - \dfrac{1}{x-1} \right| \leq \dfrac{-1}{x-1}$ (3)

- $D_{déf} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} x - \dfrac{1}{x-1} \leq \dfrac{-1}{x-1} \\ \\ x - \dfrac{1}{x-1} \geq \dfrac{1}{x-1} \end{cases}$ et

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ \\ x - \dfrac{2}{x-1} \geq 0 \end{cases}$ et (3b)

$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}_- \quad \dfrac{x(x-1) - 2}{(x-1)} \geq 0$

$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}_- \quad \dfrac{x^2 - x - 2}{(x-1)} \geq 0$

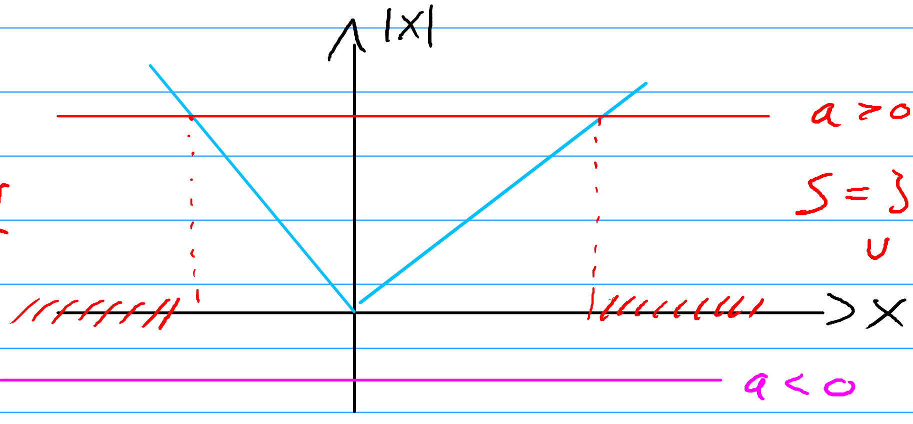
$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}_- \quad \dfrac{(x-2)(x+1)}{(x-1)} \geq 0$

tableau de signes

x		-1	0	1	2	
$(x-2)$	$-$		$-$		$-$	$+$
$(x+1)$	$-$		$+$		$+$	$+$
$(x-1)$	$-$		$-$		$+$	$+$
	$-$		$+$		$-$	$+$

$\Rightarrow S = [-1, 0]$

Résoudre : $|x| \geq a \quad , a \in \mathbb{R}$



$S = \mathbb{R} \setminus]-a, a[$

$a > 0$: $S =]-\infty, -a] \cup [a, \infty[$

$a < 0$: $S = [-\infty, -a] \cup [a, \infty[$

$$\boxed{|f(x)| \geq g(x) \iff \begin{cases} f(x) \geq g(x) \\ \text{ou} \\ f(x) \leq -g(x) \end{cases}}$$

(4) **Résoudre** $|x^2+3x-1| > x^2+x+1 \quad (4)$

- $D_{def} = \mathbb{R}$.

$$(4) \iff \begin{cases} x^2+3x-1 > x^2+x+1 & (4a) \\ \text{ou} \\ x^2+3x-1 < -x^2-x-1 & (4b) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x - 2 > 0 & (4a) \\ \text{ou} \\ 2x^2 + 4x < 0 & (4b) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x > 1 & (4a) \\ \text{ou} \\ 2x(x+2) < 0 & (4b) \end{cases}$$

tableau de signe (4b):

x		-2		0	
x	$-$		$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$
	$+$		$-$		$+$

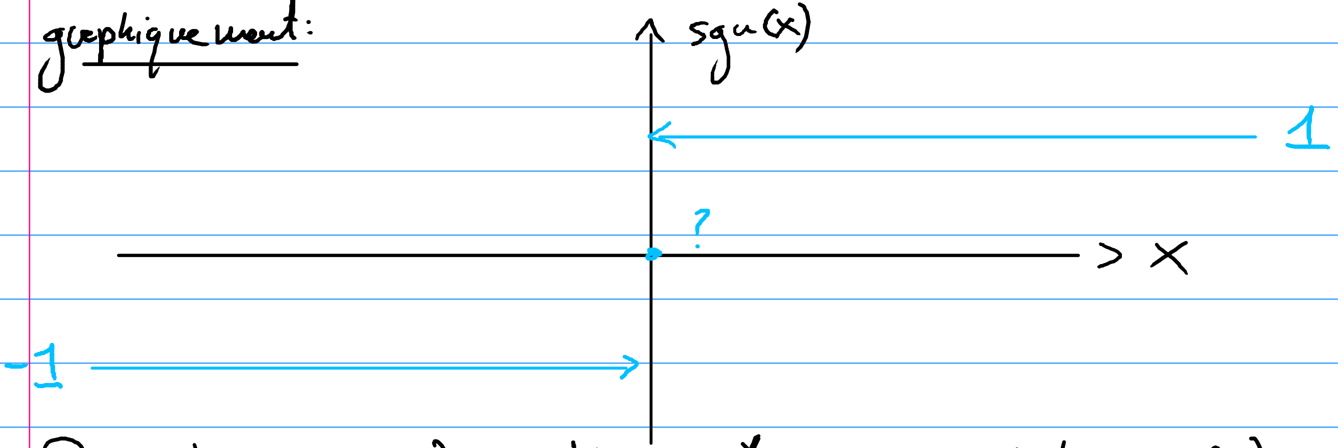
$S_{4a} =]1, \infty[$ ou $S_{4b} =]-2, 0[$

$$\Rightarrow S =]-2, 0[\cup]1, \infty[$$

Déf: la fonction signe de x, qu'on note $\mathrm{sgn}(x)$ est donnée par

$$\mathrm{sgn}(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ ? & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

graphiquement:



Propriétés: 1) $\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad x = |x| \cdot \mathrm{sgn}(x)$

2) $\forall x, y \in \mathbb{R}^*, \quad \mathrm{sgn}(x \cdot y) = \mathrm{sgn}(x) \cdot \mathrm{sgn}(y)$

(tableau de signe)

3) $\forall x, y \in \mathbb{R}^*, \quad \mathrm{sgn}\left(\frac{x}{y}\right) = \mathrm{sgn}(x) \cdot \mathrm{sgn}(y)$

Inégalité du triangle $\forall x,y\in\mathbb{R}$

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

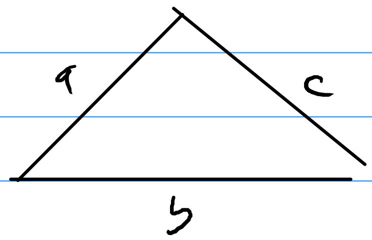
preuve : par positivité :

$$|x+y| \leq |x| + |y| \iff |x+y|^2 \leq \big(|x|+|y|\big)^2$$

Mais, $|x+y|^2 = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$$\leq |x|^2 + |2xy| + |y|^2$$

$$= |x|^2 + 2|x|\cdot|y| + |y|^2 = \big(|x|+|y|\big)^2 \qquad \square.$$

(

$b \leq a + c$)

C 2a

§1.6. TRINÔMES

Déf. : Un trinôme est une expression du type

$$P(x) = ax^2 + bx + c,$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$

Exemple : Quel est le signe de

$$P(x) = x^2 - 4x - 5 \quad ?$$

- On écrit $P(x) \geqslant 0$

$$\Longleftrightarrow \quad P(x) = (X-5)(x+1)$$

- Tableau des signes:

	$-\infty$	-1		5	$+\infty$
$x-5$	$-$		$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$P(x)$	$+$		$-$		$+$

- Conclusion:

$$\operatorname{sgn}(P(x)) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \notin [-1,5] \\ 0 & \text{si } x \in \{-1,5\} \\ -1 & \text{si } x \in]-1,5[\end{cases}$$

Déterminer les racines d'un trinôme.

Posons $P(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$

On a:
$$P(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$
$$= a\left(x^2 + 2\cdot\frac{b}{2a}x + \frac{c}{a}\right)$$
$$= a\left(x^2 + 2\cdot\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)$$
$$= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)$$

On en conclut:

$$P(x)=0 \Longleftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

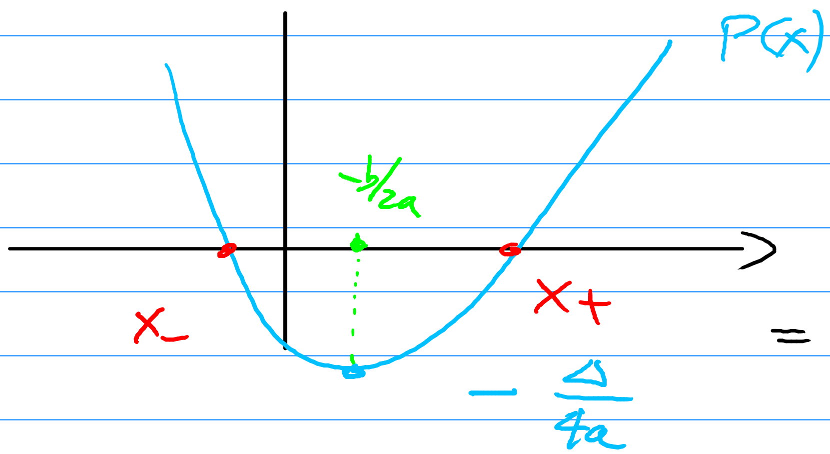
On pose $\Delta = b^2 - 4ac$, le discriminant

$$P(x)=0 \Longleftrightarrow \Delta \geq 0 \text{ et } x+\frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\boxed{P(x)=0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \Delta = b^2-4ac \geq 0 \\ \text{et} \\ x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \\ x = \frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}}$$

Notons $x_{\pm} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

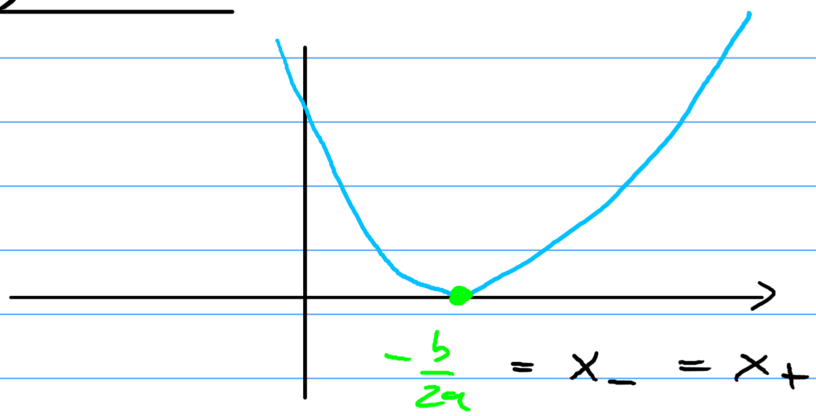
graphiquement : • $a > 0$:



$$\operatorname{sgn}(P(x)) = \begin{cases} -1 \text{ si } x \in]x_-, x_+[\\ 0 \text{ si } x = \{x_\pm\} \\ 1 \text{ si } x \notin [x_-, x_+] \end{cases}$$

$a > 0$, $P(x)$ "sourit"

Si $a>0$, $\Delta=0$:

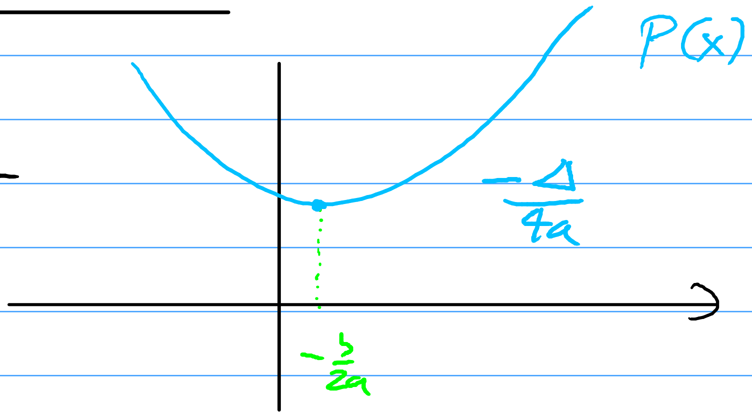


$$\mathrm{sgn}(P(x)) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq -\frac{b}{2a} \\ 0 & \text{si } x = -\frac{b}{2a} \end{cases}$$

si $a>0$, $\Delta<0$:

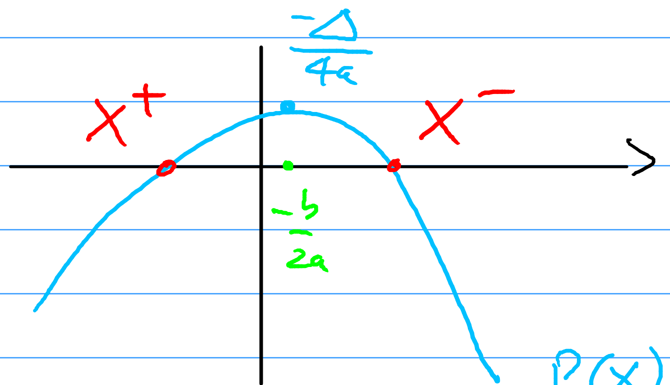
$\mathrm{sgn}(P(x)) = 1$

$\forall x \in \mathbb{R}$



• si $a<0$, $\Delta>0$:

$a<0 \Rightarrow P(x)$ "plant"



$$\mathrm{sgn}(P(x)) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in]x_+, x_-[\\ 0 \text{ si } x \in \{x_\pm\} \\ -1 \text{ si } x \notin [x_+, x_-] \end{cases}$$

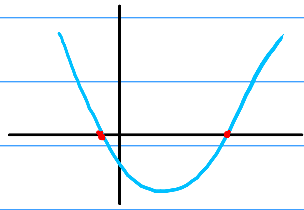
Résumé:

$$\operatorname{sgn}(a P(x)) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \notin [x_-, x_+] \\ 0 & \text{si } x \in \{x_\pm\} \\ -1 & \text{si } x \in]x_-, x_+[\end{cases}$$

Exemple 1: Déterminer le signe de

$$P(x) = x^2 - 2x - m^2 + 2m$$

$a = 1 > 0 \Rightarrow P(x)$ "sourit"



$$P(x) = x^2 - 2x + 1 - 1 - m^2 + 2m$$

$$= (x-1)^2 - (m-1)^2 \quad (\text{type } a^2 - b^2)$$

$$= \underbrace{(x - 1 + m - 1)}_{a+b}\underbrace{(x - 1 - m + 1)}_{a-b}$$

$$= (x + m - 2)(x - m)$$

deux possible racines: m, $2-m$

On compare $m \geq 2 - m$

$$\Leftrightarrow 2m \geq 2 \Leftrightarrow m \geq 1$$

Conclusion: $\operatorname{Sgn}(P(x)) = 1$ si

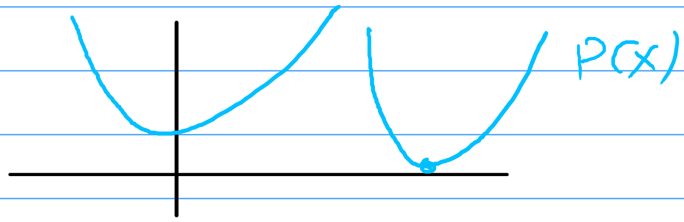
$x \notin [2-m, m]$ si $m \geq 1$

$x \notin [m, 2-m]$ si $m < 1$

Exemple 2 : $P(x) = (2m+1)x^2 + 2(m-1)x + m-3$

Pour quelles valeurs de m a-t-on
$$P(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \ ?$$

On veut



$$\Rightarrow \underbrace{a > 0}_{\text{"sourire"}} \quad \text{et} \quad \underbrace{\Delta \leq 0}_{\text{au plus une racine}}$$

$$C_1 \qquad\qquad\qquad C_2$$

$$\begin{cases} C_1 : \ 2m+1 > 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{et} \\ C_2 : \ \Delta = (2(m-1))^2 - 4(m-3)(2m+1) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1 : \ m > -\frac{1}{2} \\ \text{et} \\ C_2 : \ m^2 - 2m + 1 \\ \qquad -2m^2 + 5m + 3 \leq 0 \end{cases}$$

$4a - 4b \leq 0$

$\Leftrightarrow a - b \leq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C1 : \ m > -\frac{1}{2} \\ \quad \text{et} \\ C2 : \ -m^2 + 3m + 4 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C1 : \ m > -\frac{1}{2} \qquad \text{et} \\ C2 : \ (m+1)(-m+4) \leq 0 \end{cases}$$

$\iff m > -\frac{1}{2}$ et $m \notin]-1, 4[$

$\iff \underline{\underline{m \in [4, \infty[}}$

<u>Exercice facultatif:</u> Montrer que $e+\pi$ et $e\cdot\pi$ ne peuvent pas être les deux rationnels.

<u>Exemple 3:</u> Soit $P(x) = mx^2 - mx + (m+1)$

Trouver m tels que $P(x)$ ait 2 racines x_- et x_+ t.q. $x_- < 1 < x_+$

ou $x_+ < 1 < x_-$

On traduit par $a \cdot P(1) < 0$

$\iff m(m - m + (m+1)) < 0$

$\iff m(m+1) < 0 \iff \underline{m \in]-1, 0[}$

C3b

<u>§1.7. Puissances & racines</u>

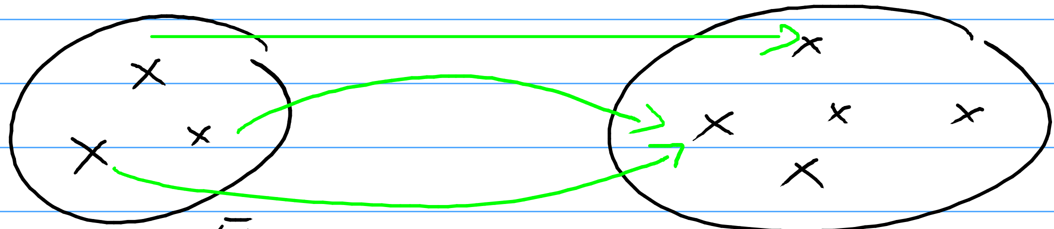
<u>Def:</u> La puissance d'un nombre $a \in \mathbb{R}$ est donnée par

$$a^n := \begin{cases} \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ fois}} & \text{si } n > 0 \\ \dfrac{1}{\underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ fois}}} & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

Convention: $a^0 = 1 \quad \forall\, a \in \mathbb{R}$

Exemples:

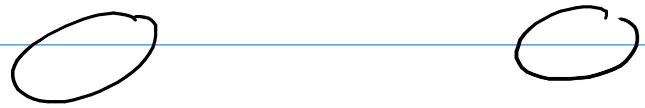
- $\left(\frac{-2}{5}\right)^5 = \frac{(-2)^5}{5^5} = \frac{-32}{3'125}$
- $\left(\frac{-2}{5}\right)^{-5} = \frac{3'125}{-32}$.
- Soit E un ensemble à 3 éléments, et F un ensemble à 5 éléments, combien y-a-t-il de fonctions de E vers F ?



E F

Il y a 5^3 possibilités pour une fonction $f : E \longrightarrow F$

Si $E = \emptyset = F$ $\quad$ E a 0 éléments, tout comme F



$E = \emptyset$ $\qquad$ $F = \emptyset$

Il existe une fonction : $f : \emptyset \to \emptyset$, la fonction vide $\Rightarrow$ $0^0 = 1$.

Propriétés: 1) $\operatorname{sgn}(a^n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 2m \\ \operatorname{sgn}(a) & \text{si } n = 2m+1 \end{cases}$

2) $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

3) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

5) $a^{n-m} = \dfrac{a^n}{a^m}$

pour $a \in \mathbb{R}^*$, $n, m \in \mathbb{Z}$.

5) implique que $a^0 = a^{n-n} = \dfrac{a^n}{a^n} = 1$

$\boxed{\begin{array}{l} \underline{\text{Déf:}} \quad \forall a \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{N}^* \\ \sqrt[n]{a} = x \iff \begin{cases} x^n = a \\ \underline{\text{et}} \\ \operatorname{sgn}(a) = \operatorname{sgn}(x) \end{cases} \end{array}}$

<u>Exemples:</u> ◦ $\sqrt{4} = 2$, car $\operatorname{sgn}(2) = \operatorname{sgn}(4)$
et $2^2 = 4$

◦ $\sqrt[3]{-8} = -2$, car $\operatorname{sgn}(-2) = \operatorname{sgn}(-8)$ et
$(-2)^3 = -8$

⚠ si $x^2 = 4$, alors $x = \pm 2$

<u>Mais</u> $\sqrt{4} = +2$, car $\operatorname{sgn}(-2) \neq \operatorname{sgn}(4)$

<u>Remarque:</u> L'ensemble de définition de une fonction $\sqrt[n]{x}$ est $\mathbb{R}$ si n est impair
$\mathbb{R}_+$ si n est pair

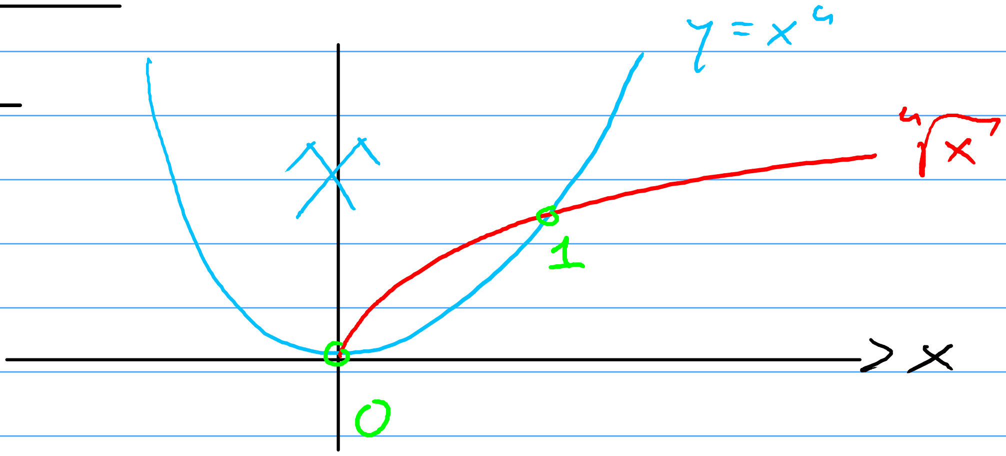
Propriétés : 1) $\sqrt[n]{a^n} = a$, $\forall a \in D_{def} \sqrt[n]{\ }$.

2) $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, $\forall a, b \in D_{def} \sqrt[n]{\ }$

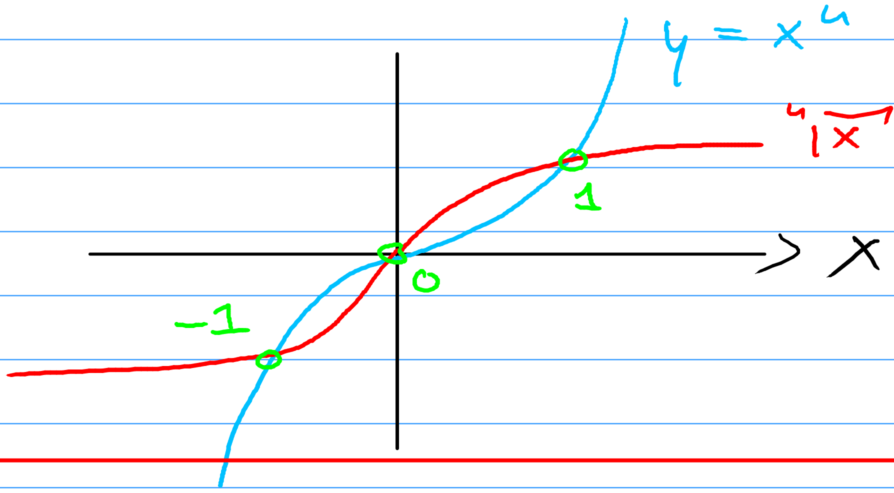
3) $\sqrt[n]{a^p} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^p$, $\forall a \in D_{def} \sqrt[n]{\ }$

Graphiquement :

• pair



• impair :



Déf :

$$a^{m/n} := \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$\forall a \in D_{ef} \sqrt[n]{\ }$

$$a^{-m/n} = \frac{1}{a^{m/n}}$$

⚠ à la simplification :

$$(-8)^{1/3} = -2$$

$$(-8)^{2/6} = \sqrt[6]{(-8)^2} = 2 \quad \lightning ,$$

car $-8 \notin D_{def}\ \sqrt[6]{\ }$

$$\boxed{⚠ \quad x^{1/3} = x^{2/6} \quad \text{seulement si } x \geq 0}$$

Exemples : (1) soit $a > 0$

$$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt{a} = a^{1/3} \cdot a^{1/2} = a^{1/3 + 1/2} = a^{5/6}$$

(2) $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x \cdots}}}}}} = ?$

posons $f(x) = \sqrt{x + \underbrace{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x \cdots}}}}_{f(x)}}$

$\Rightarrow \quad f(x) = \sqrt{x + f(x)} \quad , \quad f(x) \geq 0$

$\Rightarrow \quad f^2(x) = x + f(x)$

$\Leftrightarrow \quad f^2(x) - f(x) - x = 0 \quad$ et $\ f(x) \geq 0$

$$\Delta = (-1)^2 - (-4)x = 1 + 4x \geqslant 0$$

$$\Rightarrow \quad x \geqslant -\frac{1}{4},$$

$$f(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1+4x}}{2} \quad + \quad \underline{\text{positivité}}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1 + \sqrt{1+4x}}{2}$$

$\underline{x=0}$, $f(0) = 1 \Rightarrow \sqrt{0+\sqrt{0+\sqrt{0+\sqrt{0+\dots}}}} = 1$

$\underline{x=1}$, $f(1) = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \underline{\Phi = 1,618\dots}$

$\underline{x=2}$, $f(2) = 2 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\dots}}}}$

<u>Exemple</u> <u>résoudre $\sqrt{x^2 - 3x + 6} = 4x - 6$ (1)</u>

- $\underline{D_{pos}}$: $4x - 6 \geqslant 0 \iff \underline{x \in [3/2, \infty[}$
- Sur D_{pos}, $(1) \iff x^2 - 3x + 6 = (4x-6)^2$

$$\iff x^2 - 3x + 6 = 16x^2 - 48x + 36$$

$$\iff 0 = 15x^2 - 45x + 30$$

$$= x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$$

Comme $D_{pos} = [3/2, \infty[$, $\underline{S = \{2\}}$

Généralement :

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \underset{\text{Def}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} g(x) \geqslant 0 \\ \text{et} \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}$$

Exemple : $\sqrt{6-x} \leqslant 3+2x \quad (2)$

- $D_{def} =]-\infty, 6]$
- D_{pos} : $3+2x \geqslant 0 \Longleftrightarrow x \in [-3/2, \infty[$

$\Rightarrow x \in D_{def} \cap D_{pos} = [-3/2, 6]$

- $(\ )^2$: $(2) \Longleftrightarrow 6-x \leqslant (3+2x)^2$

$\Longleftrightarrow 6-x \leqslant 9 + 12x + 4x^2$

$\Longleftrightarrow 0 \leqslant 3 + 13x + 4x^2$, $x_\pm = \dfrac{-13 \pm \sqrt{169-48}}{8}$

$= \dfrac{-13 \pm 11}{8} = -3, -\dfrac{1}{4}$

tableau de signes

		-3		$-1/4$	
$(x-x_-)$	$-$	0	$+$		$+$
$(x-x_+)$	$-$		$-$	0	$+$
$E(x)$	$+$		$-$		$+$

$\Rightarrow x \in \left( ]-\infty, -3] \cup [-1/4, \infty[\right) \cap \underbrace{D_{pos} \cap D_{def}}_{[-3/2, 6]}$

$\Rightarrow x \in [-1/4, 6]$

Généralement :

- $\sqrt{f(x)} \leq g(x) \underset{D_{def}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ \text{et} \\ f(x) \leq g^2(x) \end{cases}$

- $\sqrt{f(x)} > g(x) \underset{D_{def}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} g(x) < 0 \\ \text{ou} \\ f(x) > g^2(x) \end{cases}$

Exemple : Résoudre $\sqrt{x^2+1} = x+m$ (3)

$\cdot D_{def} = \mathbb{R}$, D_{pos} : $[-m, \infty[$

$\circ ( )^2$: $x^2+1 = (x+m)^2$

$\Leftrightarrow x^2+1 = x^2 + 2mx + m^2$

$\Leftrightarrow 0 = m^2 + 2mx - 1$

$\Leftrightarrow 2mx = 1 - m^2$ (2)

1 cas : $m=0$: (2) $\Leftrightarrow 0 = 1$ ↯ $S = \emptyset$

2 cas : $m \neq 0$: (2) $\Leftrightarrow x = \dfrac{1-m^2}{2m}$ si $x \in [-m, \infty[$

pour autant que $\dfrac{1-m^2}{2m} \geq -m$

$\Leftrightarrow \dfrac{1-m^2+2m^2}{2m} \geq 0$

$\Longleftrightarrow \quad \frac{m^2+1}{2m} \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad m > 0$

Conclusion : $\quad S = \left\{ \frac{1-m^2}{2m} \right\}$ si $m > 0$

$\qquad\qquad\qquad = \phi$ si $m \leq 0$

C4a

2. Suites

§2.1. Exemples et récurrence

On rencontre en mathématiques des suites de nombres

1) $0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots, 2n \qquad n \in \mathbb{N}$

est la suite des nombres pairs

2) $1, 3, 5, 7, 9, \ldots, 2n+1, \qquad n \in \mathbb{N}$

est la suite des nombres impairs

3) $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, \ldots$

est la suite des nombres premiers

$p_n = ?$

4) $0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, 3, \ldots, \sqrt{n},$

est la suite des racines

5) $1, 1, 1, 1, 1, \ldots$ est la suite constante

6) $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots, n,$

7) $S_0 = 0$, $S_1 = 1$, $S_2 = 3$, $S_3 = 6$, $S_4 = 10$

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

preuve :

1) $S_n = 0 + 1 + 2 + 3 + \dots + n-1 + n$

$S_n = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 1 + 0$

$$2S_n = \underbrace{n + n + n + \dots + n + n}_{n+1 \text{ termes}}$$

$\Rightarrow 2S_n = (n+1)n$

$\Rightarrow S_n = \dfrac{(n+1)n}{2}$

2) Méthode par récurrence :

1) Vérifier la formule pour $n = 0, 1, 2, \dots$

$S_0 = \dfrac{0(0+1)}{2} = 0$ ✓

initialisation

$S_1 = \dfrac{1(1+1)}{2} = 1$ ✓

$S_2 = \dfrac{2(2+1)}{2} = 3$ ✓

2) Suppose que $0 + 1 + 2 + \dots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

On ajoute une étape $n+1$:

$$S_{n+1} = S_n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

hyp de récurrence

$$= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

hérédité

3) Conclusion : puisque $S_0 = \frac{0(0+1)}{2}$, $S_1 = \frac{1(1+1)}{2}$

et que $S_n = \frac{n(n+1)}{2} \Longrightarrow S_{n+1} \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Exemple : la suite de Fibonacci

Commençons par 1 couple de lapins :

mois	1	2	3	4	5	6
# couples matures	1	2	3	5	8	13
# couples immatures	1	1	2	3	5	8
# couples	2	3	5	8	13	21

On obtient la suite $F_0 = 1$, $F_1 = 2$,

$F_2 = 2 + 1 = F_0 + F_1$

$\Longrightarrow F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

$$\boxed{F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\phi_+^{\,n} - \phi_-^{\,n}\right) \text{ où } \phi_+ = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \phi_- = \frac{1-\sqrt{5}}{2}}$$

1) <u>initialisation:</u> pour $n = 1$:

$$F_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\phi_+ - \phi_-\right) = 1$$

$$F_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\phi_+^0 - \phi_-^0\right) = 0$$

2) $F_{n+1} \stackrel{?}{=} F_n + F_{n-1}$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\phi_+^n - \phi_-^n\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\phi_+^{n-1} - \phi_-^{n-1}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\phi_+^{n-1}(\phi_+ + 1) - \phi_-^{n-1}(\phi_- + 1)\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\phi_+^{n-1}\underbrace{(\phi_+^2)}_{\phi_+^2 = \phi_+ + 1} - \phi_-^{n-1}\underbrace{(\phi_-^2)}_{\phi_-^2 = \phi_- + 1}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\phi_+^{n+1} - \phi_-^{n+1}\right) \checkmark$$

<u>Conclusion:</u> $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\phi_+^n - \phi_-^n\right)$

$\forall n \in \mathbb{N}$.

<u>En résumé:</u> si $P(n)$ est à vérifier

1) <u>Initialiser:</u> on vérifie si $P(0)$ ou $P(1)$ est vraie.

2) <u>hérédité:</u> on montre que $P(n)$ vraie implique $P(n+1)$ est vraie.

3) <u>Conclusion:</u> $P(n)$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$

Déf: une suite (réelle) est une application
$s : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$
On note aussi $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, où
s_n est le terme général de la suite.

Thm: $\nexists\, r \in \mathbb{Q}$ t.q. $r^2 = 2$

Preuve: (par absurde) Supposons que $r \in \mathbb{Q}_+$ t.q. $r^2 = 2$.
On a donc $r = \frac{n}{m}$, $n, m \in \mathbb{N}^*$.
Par factorisation en produit de premiers,
$$r = \frac{p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \; p_\ell}{q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \; q_k}$$ avec
$$\{p_1, p_2 \ldots, p_\ell\} \cap \{q_1, q_2, \ldots q_k\} = \emptyset.$$
Mais alors
$$r^2 = \frac{p_1^2 \cdot p_2^2 \ldots p_\ell^2}{q_1^2 \cdot q_2^2 \ldots q_k^2} = 2$$
Donc,
$$p_1^2 \cdot p_2^2 \ldots p_\ell^2 = 2 \cdot q_1^2 \cdot q_2^2 \ldots q_k^2$$

On a donc deux manières distinctes de factoriser un nombre naturel $\not\exists$. $\square$.

<u>Ex facultatif:</u> Si p est premier,

$$\nexists\, r \in \mathbb{Q} \text{ t.q. } r^2 = p$$

<u>Essayons d'approximer $\sqrt{2}$:</u>

$$r^2 = 2 \iff r^2 = 1 + 1$$

$$\iff r^2 - 1 = 1$$

$$\iff (r-1)(r+1) = 1 \quad , r > 0$$

$$\iff (r-1) = \frac{1}{1+r}$$

$$\iff r = 1 + \frac{1}{1+r}$$

$$= 1 + \frac{1}{1 + 1 + \frac{1}{1+r}}$$

$$\Rightarrow r = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1+r}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}}}$$

$r_0 = 1, \quad r_1 = \frac{3}{2}, \quad r_2 = \frac{7}{5}, \quad r_3 = \frac{17}{12}, \ldots$

C'est une suite d'approximations pour $\sqrt{2}$, de plus en plus précise.

$r_8 = 1,414\ 215\ 686\ 27$

$\sqrt{2} = 1,414\ 213\ 262\ 37\ldots$

Devinons le terme général:

(1) $\frac{2}{3}, \ \frac{5}{6}, \ \frac{10}{9}, \ \frac{17}{12}, \ldots$

$a_1, \ a_2, \ a_3, \ a_4$

$$a_n = \frac{n^2+1}{3n}$$

(2) $3, 0, 9, 0, 15, 0, 21, 0, 27, 0, \ldots$

$a_1, a_2, a_3, \ldots$

$$a_n = 3n \sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 3n\left(1-(-1)^n\right)\cdot\frac{1}{2}$$

C46

§22. Limite d'une suite

Déf: Soit $s : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$. On dit que

- $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est (strictement) majorée, ssi $\exists M \in \mathbb{R}$ t.q. $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $s_n \ (<) \leq M$
- $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est (strictement) minorée, ssi $\exists m \in \mathbb{R}$ t.q. $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $s_n \ (>) \geq m$

La suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sera dite bornée ssi elle est minorée et majorée.

Déf : On dit qu'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est

- (strictement) croissante ssi $\forall n\in\mathbb{N}^*$,

$$a_{n+1} \; (>) \; \geqslant a_n$$

- (strictement) décroissante ssi $\forall n\in\mathbb{N}^*$,

$$a_{n+1} \; (<) \; \leqslant a_n$$

- monotone si la suite est soit croissante, dé-croissante

Exemples : ① $a_n = \frac{1}{n}$. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par $M=1$, strictement majorée par 2.
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement minorée par 0.
Elle est donc bornée. Elle est aussi strictement décroissante.

② $b_n = \frac{n}{n+1}$. $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par 1, car $n \leq n+1$. 1 est aussi un majorant strict. Cette suite est aussi strictement minorée par 0.

Vérifions que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante :

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\quad b_{n+1} > b_n$

$$\iff \frac{n+1}{n+2} > \frac{n}{n+1} \quad ✓$$

$$\iff \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} > 0$$

$$\iff \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+2)(n+1)} > 0$$

$$\iff \frac{\cancel{n^2} + \cancel{2n} + 1 - \cancel{n^2} - \cancel{2n}}{(n+2)(n+1)} > 0$$

(3) $c_n = (-1)^n n$. Cette suite n'est ni croissante, ni décroissante, elle n'est pas monotone.

Elle n'est ni majorée, ni minorée.

Reprenons l'exemple $b_n = \frac{n}{n+1}$.

On a $b_n = \frac{n+1-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$

- si $n \geq 1$: $\frac{1}{2} \leq b_n < 1$
- si $n \geq 10$: $\frac{10}{11} \leq b_n < 1$
- si $n \geq 100$: $\frac{100}{101} \leq b_n < 1$
- si on veut que $1 - \varepsilon \leq b_n < 1$, pour $\varepsilon > 0$

$$\iff 1 - \varepsilon \leq 1 - \frac{1}{n+1} < 1$$

$$\iff -\varepsilon \leq -\frac{1}{n+1} \iff \varepsilon \geq \frac{1}{n+1}$$

$$\iff n+1 \geq \frac{1}{\varepsilon} \iff n \geq \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

Si on se choisit une bande d'épaisseur $\varepsilon > 0$, à partir de $n \geq 1/\varepsilon - 1$, on aura que

$$1 - \varepsilon \leq b_n < 1$$

Puisque cessi est vrai pour toute epaisseur $\varepsilon > 0$, la suite $(1_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ s'approche de 1 d'AUSSI PRES QU'ON LE DEMANDE

Déf: On dit qu'une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend vers $\ell \in \mathbb{R}$, ou bien on dit que ℓ est la limite de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \text{ t.q. } n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |\ell - a_n| < \varepsilon$$

On note $\lim_{n \to \infty} a_n = \ell$.

Dire que ℓ est la limite de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ cela signifie, que les valeurs a_n sont aussi proche que l'on veut de ℓ, si n est est suffisamment grand

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}^* \text{ t.q } n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon$$

Comment vérifier si $\ell = \lim_{n \to \infty} a_n$?

1) On se donne $\varepsilon > 0$
2) On cherche $n \in \mathbb{N}^*$ t.q. $|a_n - \ell| < \varepsilon$
3) Si $n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon$ est toujours possible, alors, $\lim_{n \to \infty} a_n = \ell$

Exemples: (1) $\underline{a_n = 2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

On devine $\ell = 2$.

En effet, si on choisit $\varepsilon > 0$, on peut trouver $N_\varepsilon = 1$ et on a

$$n \geq 1 \Rightarrow |a_n - 2| < \varepsilon.$$

(2) $\underline{a_n = \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.}$

On devine que $\ell = 0$. On se choisit $\varepsilon > 0$.

Quand est-ce que $|a_n - 0| < \varepsilon$?

$\Leftrightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$

On choisit alors $N_\varepsilon = \underbrace{\left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor}_{\text{partie entière}} + 1$

et on a $n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |a_n - 0| < \varepsilon$

(3) $a_n = \left(\frac{2n+1}{n}\right)^2$.

$$9, \frac{25}{4}, \frac{49}{9}, \frac{81}{16}, \ldots, \frac{625}{144}, \ldots$$

On devine que $\ell = 4$

On choisit $\varepsilon > 0$. On résout

$$|a_n - 4| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \left|\left(\frac{2n+1}{n}\right)^2 - 4\right| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \left|\left(\frac{2n+1}{n}\right)^2 - 2^2\right| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \left|\left(\frac{2n+1}{n}+2\right)\left(\frac{2n+1}{n}-2\right)\right| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{4n+1}{n} \cdot \frac{1}{n}\right| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \frac{4n+1}{n^2} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad 4n+1 < \varepsilon n^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 < \varepsilon n^2 - 4n - 1$$

On choisit $N_\varepsilon = \left\lfloor \frac{4+\sqrt{16+4\varepsilon}}{2\varepsilon} \right\rfloor + 1$

Donc, si $n \geqslant N_\varepsilon = \left\lfloor \frac{2+\sqrt{4+\varepsilon}}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$

alors $|a_n - 4| < \varepsilon$

Supposons que on devine faussement

$\ell = 9$

Si $\varepsilon > 0$, $\quad |a_n - 9| < \varepsilon$

$$\Leftrightarrow \left|\left(\frac{2n+1}{n}\right)^2 - 9\right| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \left|\left(\frac{2n+1}{n}+3\right)\left(\frac{2n+1}{2}-3\right)\right| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{5n+1}{n} \cdot \frac{1-n}{n}\right| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \frac{5n+1}{n^2} \cdot (n-1) < \varepsilon$$

$$\iff (5n+1)(n-1) < \varepsilon n^2$$

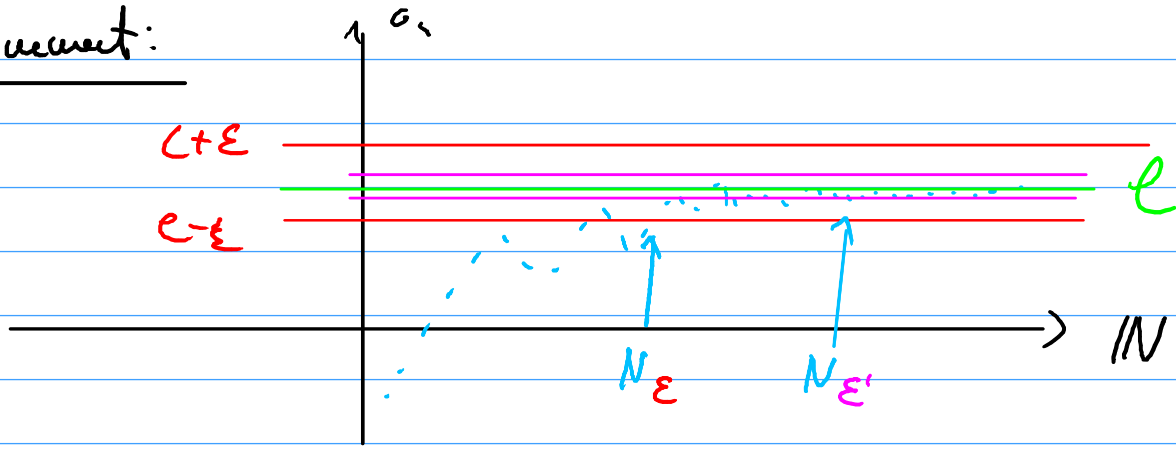
$$\iff \underbrace{(5-\varepsilon)}\, n^2 - 4n - 1 < 0$$

$$\underset{\varepsilon<5}{\iff} \quad n \in \left] \frac{4-\sqrt{16+4(5-\varepsilon)}}{2(5-\varepsilon)} , \frac{4+\sqrt{16+4(5-\varepsilon)}}{2(5-\varepsilon)} \right[$$

si $n \geqslant \dfrac{2+\sqrt{4+(5-\varepsilon)}}{(5-\varepsilon)}$, alors

$$|a_n - 9| > \varepsilon$$

Graphiquement:



$$\Rightarrow \ldots \quad |a_n - l| < \varepsilon \dashrightarrow \quad n \geqslant \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$

$$N_\varepsilon = \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right\rfloor + 1 = 1$$

C5a

Dire que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$ c'est dire que pour $\varepsilon > 0$, au plus un nombre fini des a_n satisfont $|a_n - l| \geqslant \varepsilon$

Exemple : $a_1 = 0,9$; $a_2 = 0,99$; $a_3 = 0,999$

$a_4 = 0,9999$, $a_n = 1 - \frac{1}{10^n}$

$\lim_{n \to \infty} a_n = 1$.

En effet, si $\varepsilon > 0$, $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ t.q.

$\frac{1}{10^{N_\varepsilon}} < \varepsilon$. Et aussi, si $n \geq N_\varepsilon$,

$\frac{1}{10^n} < \varepsilon$

Ça justifie $0,\overline{9} = \lim_{n \to \infty} a_n = 1$

Autre manière : $0,\overline{9} = 3 \times 0,\overline{3} = 3 \times \frac{1}{3} = 1$

On a aussi $0,4\overline{9} = 0,5$

Règles de calculs : Supposons que $\lim_{n \to \infty} a_n = a$ et $\lim_{n \to \infty} b_n = b$. Alors :

1) $\lim_{n \to \infty} |a_n| = |a|$

2) $\lim_{n \to \infty} (a_n + b_n) = a + b$

3) $\lim_{n \to \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

4) $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{a}{b}$ pour autant que $b \neq 0$

Exemples: ① $a_n = \dfrac{n^2+1}{(n+1)(2n-1)}$

$$a_n = \frac{n^2+1}{\underset{\times 1/n}{(n+1)}\underset{\times 1/n}{(2n-1)}} \quad \frac{\times 1/n^2}{\times 1/n^2} = \frac{1 + 1/n^2}{(1+1/n)(2-1/n)}$$

$\Rightarrow$

$$a_n = \frac{\overbrace{1+1/n^2}^{\to 1}}{\underbrace{(1+1/n)}_{\to 1}\underbrace{(2-1/n)}_{\to 2}}$$

. On applique les règles 3 et 4: et

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\lim_{n\to\infty}(1+1/n^2)}{\lim_{n\to\infty}(1+1/n)\cdot\lim_{n\to\infty}(2-1/n)} = \frac{1}{2}$$

② $b_n = \sqrt{n^2-n} - n$

$$b_n = \sqrt{n^2-n} - n \cdot \frac{\sqrt{n^2-n}+n}{\sqrt{n^2-n}+n}$$

$$= \frac{(n^2-n)-n^2}{\sqrt{n^2-n}+n} = \frac{-n}{\sqrt{n^2-n}+n}\cdot\frac{1/n}{1/n}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{\frac{1}{n^2}}\cdot\sqrt{n^2-n}+1} = \frac{-1}{\underbrace{\sqrt{1-\frac{1}{n}}}_{\to 1}+1} = \frac{-1}{2}$$

§2.3. Théorème des gendarmes

L'idée est d'encadrer une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par deux suites connues $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(d_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$:

$\underline{\text{Thm}}$: Soient deux suites $(d_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que

- $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = d$
- $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = g$

et $\exists N \in \mathbb{N}^*$ t.q. $n \geq N \Rightarrow g_n \leq d_n$

Alors $g \leq d$

$\underline{\text{preuve}}$: Supposons que (par absurde) $d < g$.

On pose alors $\varepsilon = \frac{g-d}{2} > 0$.

Par hypothèse,

- $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ t.q. $n \geq N_1 \quad |g_n - g| < \varepsilon$
- $\exists N_2 \in \mathbb{N}$ t.q. $n \geq N_2 \quad |d_n - d| < \varepsilon$

Si $n \geq \max\{N, N_1, N_2\}$, alors

$$-\varepsilon < d_n - d < \varepsilon$$
$$-\varepsilon < g - g_n < \varepsilon$$

$$\underbrace{-2\varepsilon}_{d-g} < d_n - g_n + g - d < \underbrace{2\varepsilon}_{g-d}$$

$$\Rightarrow \quad 2(d-g) < d_n - g_n < 0$$

$$\Rightarrow \quad g_n > d_n \quad ↯$$

$$\Rightarrow \quad d \geq g$$

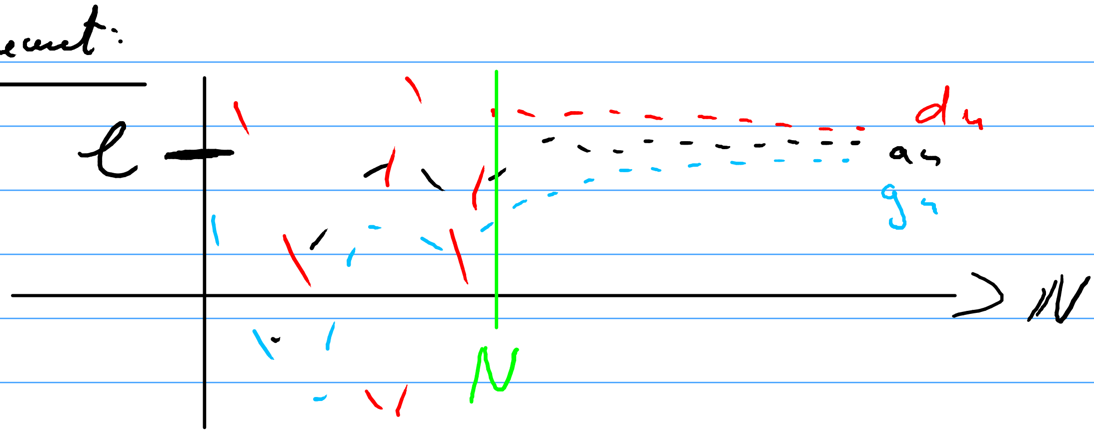
$\square$.

Thm des gendarmes : Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(d_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que :

- $\exists N \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant N$ $\quad g_n \leq a_n \leqslant d_n$
- $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = \ell = \lim\limits_{n\to\infty} d_n$

Alors $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$

graphiquement :



preuve : Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = \ell = \lim\limits_{n\to\infty} d_n$

alors

- $\exists N_1 \in \mathbb{N}^*$ t.q. $n \geqslant N_1 \Rightarrow |g_n - \ell| < \varepsilon$
- $\exists N_2 \in \mathbb{N}^*$ t.q. $n \geqslant N_2 \Rightarrow |d_n - \ell| < \varepsilon$

Si $n \geqslant \max\{N, N_1, N_2\}$, alors

$$-\varepsilon < g_n - \ell \leqslant a_n - \ell \leqslant d_n - \ell < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon$$

le choix de $\varepsilon > 0$ était arbitraire, on a

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$ $\qquad\square$

Exemples: (1) $a_n = \frac{2}{3}, 0, \frac{4}{15}, 0, \frac{6}{35}, 0, \frac{8}{63}, 0, \dots$

$n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots$

$$a_n = \frac{1+n}{(n+1)^2-1} \cdot \sin(n\pi/2)^2$$

On prend $g_n = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, On a

$$g_n \leq a_n \leq \frac{n+1}{(n+1)^2-1} = \frac{n+1}{n(n+2)} \leq \underbrace{\frac{1}{n}}_{d_n}$$

On a que $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} d_n$

et $\forall n \geq 1$, $g_n \leq a_n \leq d_n$

Par le TdG on conclut $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

(2) $b_n = \dfrac{n+2}{n+\sin(n\pi/2)}$ $\left(\text{ou } b_n = \dfrac{n+2}{n+\sin(n\alpha)}\right)$

On encadre:

$$\underbrace{\frac{n+2}{n+1}}_{\to 1} \leq b_n \leq \underbrace{\frac{n+2}{n-1}}_{\to 1}$$

Donc, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$. (par le TdG)

Corollaire: Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Si $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

preuve: $\forall n \geq 1$, $-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$.

De plus, $\lim\limits_{n\to\infty} -|a_n| = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} |a_n|$.

On conclut par Td6 $\square$.

⚠ Si $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \ell \neq 0$

il est faux de dire $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$

contre-exemple: $a_n = (-1)^n$. On a $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 1$, mais limite pour $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'existe pas.

C5b

Théorème: (de la convergence monotone) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite croissante (décroissante) et majorée (minorée). Alors la suite converge vers son supremum (infimum).

preuve: lecture complémentaire sur l'existence de supremum (ou de l'infimum). $\square$.

Exemple: $a_1 = 1$, $a_2 = 1 + \frac{1}{2^2}$, $a_3 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}$,

$a_4 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}$, $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$

C'est une suite clairement croissante.

$$0 \le a_n \le 1 + \frac{1}{2\cdot 1} + \frac{1}{3\cdot 2} + \frac{1}{4\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n-1)}$$

$$= 1 + 1 - \cancel{\tfrac{1}{2}} \cancel{+ \tfrac{1}{2}} - \cancel{\tfrac{1}{3}} \cancel{+ \tfrac{1}{3}} - \cancel{\tfrac{1}{4}} + \cdots \cancel{+ \tfrac{1}{n-1}} - \frac{1}{n}$$

$$= 2 - \frac{1}{n} \le 2$$

Donc, $a_n \le 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

(problème de Bâle. Résolu par Euler)

$$\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{n-(n-1)}{n(n-1)} = \frac{1}{n(n-1)} \right)$$

§2.3. Limites infinies

⚠ ∞ n'est pas un nombre. Par exemple, $0 \cdot \infty$ ou $\infty - \infty$ ne veulent rien dire.

Déf: On écrit $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ ssi

$\forall B > 0, \ \exists N \in \mathbb{N}^*$ t.q. si $n \ge N$, $a_n \ge B$.

On écrit $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ ssi

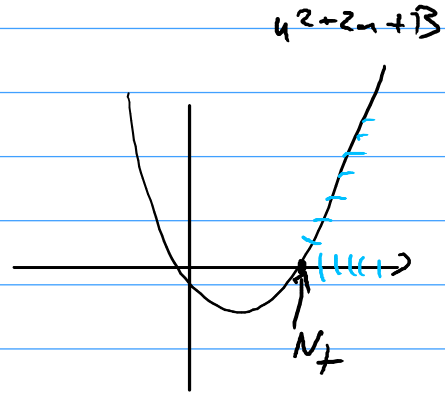
$\forall B < 0, \ \exists N \in \mathbb{N}^*$ t.q. $n \ge N$, $a_n \le B$.

Exemples: ① $a_n = 2n - n^2$

On devine que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Vérifions-le grâce à la définition. Soit $B<0$.

On va résoudre $a_n \leq B$



$\iff 2n - n^2 \leq B$

$\iff 0 \leq B - 2n + n^2$

si $N_+ = \dfrac{2+\sqrt{4-4B}}{2} \leq n$

alors $a_n \leq B$

On choisit alors $N = \lfloor 1+\sqrt{1-B} \rfloor + 1$.

On vient de montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Contre-exemple: $a_n = 1, 0, 3, 0, 5, 0, 7, 0, 9, \dots$

$$a_n = \begin{cases} n & \text{si } n = 2k+1 \\ 0 & \text{si } n = 2k \end{cases}$$

Il n'y a pas de N, t.q. $n \geq N$ implique $a_n \geq B$, pour un $B > 0$.

Règles de calcul:

1) Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont telles que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.

Alors $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \infty$

2) Si $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ et $\lambda > 0$, alors $(\lambda < 0)$

$\lim_{n\to\infty} \lambda a_n = \infty$.

$\left(\lim_{n\to\infty} \lambda a_n = -\infty \right)$

3) Si $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ ou $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$

alors $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$

Thm du gendarme: Si $\lim_{n\to\infty} d_n = \infty$ et

$a_n \geq d_n$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

⚠ Cas indéterminés:

1) Si $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ et si $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$

alors $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = ?$

2) Si $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ et si $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

alors $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = ?$

Exemples: ① $a_n = \sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3+n^2+1}$

c'est du type "$\infty - \infty$".

$$a_n = \sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3+n^2+1} \cdot \frac{\sqrt{n^3+1}+\sqrt{n^3+n^2+1}}{\sqrt{n^3+1}+\sqrt{n^3+n^2+1}}$$

$$= \frac{\cancel{n^3}+\cancel{1} - (\cancel{n^3}+n^2+\cancel{1})}{\sqrt{n^3+1}+\sqrt{n^3+n^2+1}}$$

$$= \frac{-n^2}{\sqrt{n^3+1}+\sqrt{n^3+n^2+1}} \cdot \frac{1/n^2}{1/n^2}$$

$$= \frac{-1}{\underbrace{\underbrace{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^4}}}_{\to 0} + \underbrace{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}}}_{\to 0}}_{\to 0}} \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$$

(2) $b_n = \underline{\sqrt{n^4+1} - \sqrt{n^4+n^2+1}}$

$$b_n \cdot \frac{\sqrt{n^4+1}+\sqrt{n^4+n^2+1}}{\sqrt{n^4+1}+\sqrt{n^4+n^2+1}} =$$

$$= \frac{\cancel{n^4}+\cancel{1} - (\cancel{n^4}+n^2+\cancel{1})}{\sqrt{n^4+1}+\sqrt{n^4+n^2+1}} = \cdot \frac{1/n^2}{1/n^2}$$

$$= \frac{-1}{\underbrace{\underbrace{\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}}_{\to 1} + \underbrace{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+1/n^4}}_{\to 1}}_{\to 2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty} b_n = -\frac{1}{2}}$$

Exemple type ctrl 1 :

Calculer la limite de $c_n = \left(\frac{3n+1}{4n}\right)^2$.
Puis vérifier par la définition de la limite

a) calcul de la limite :

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n+1}{4n}\right)^2 = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n+1}{4n}\right) \cdot \left(\frac{3n+1}{4n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3+1/n}{4}\right) \cdot \left(\frac{3+1/n}{4}\right) = \frac{9}{16}$$

b) Soit $\varepsilon > 0$. Trouver $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ t.q.
$n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |c_n - 9/16| < \varepsilon$

On résout

$$\left|\left(\frac{3n+1}{4n}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2\right| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{3n+1}{4n} - \frac{3}{4}\right| \cdot \left|\frac{3n+1}{4n} + \frac{3}{4}\right| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4n} \cdot \frac{6n+1}{4n} < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow 6n+1 < \varepsilon\, 16n^2$$

$$\Leftrightarrow 0 < \varepsilon 16 n^2 - 6n - 1$$

si $n > \frac{6 + \sqrt{36 + 64\varepsilon}}{32\varepsilon} = \frac{3 + \sqrt{9 + 16\varepsilon}}{16\varepsilon}$

On pose $N_\varepsilon = \left\lfloor \frac{3 + \sqrt{9 + 16\varepsilon}}{16\varepsilon} \right\rfloor + 1$

qui existe toujours

CGa

§ 3.2. Limite d'une fonction réelle

Déf: Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite définie au voisinage de l'infini ssi $\exists M \in \mathbb{R}$ t.q $[M, \infty[\subset \mathrm{Def}(f)$. On note f d.v. ∞

f est définie au voisinage de moins l'infini ssi $\exists m \in \mathbb{R}$ t.q $]-\infty, m] \subset \mathrm{Def}(f)$. On note f d.v. $-\infty$

Exemples: ① $f(x) = \frac{1}{x}$. $\mathrm{Def}(f) = \mathbb{R}^*$. On a
- $]-\infty, -1] \subset \mathrm{Def}(f)$
- $[2, \infty[\subset \mathrm{Def}(f)$.

On a donc que f d.v. ∞ et f d.v. $-\infty$.

② $g(x) = \tan(x)$. $\mathrm{Def}(g) = \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Tout intervalle du type $[M, \infty[$ ou $]-\infty, m]$ possède des éléments du type $\pi/2 + k\pi$.

Donc, $\tan(x)$ n'est pas d.v. $\pm\infty$

Def: la limite d'une fonction f d.v. ∞ égale $\ell \in \mathbb{R}$ si x tend vers l'infini ssi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0 \text{ t.q. } x \geq A \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

On note $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \ell$

la limite d'une fonction f d.v. $-\infty$ égale $\ell \in \mathbb{R}$ quand x tend vers moins l'infini ssi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A < 0 \text{ t.q } x \leq A \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Exemples: ① $f(x) = \frac{1}{x}$. On veut montrer que $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$.

Prenons un $\varepsilon > 0$. On veut

$\left| \frac{1}{x} - 0 \right| < \varepsilon$ Si on prend $x > 0$,

$1/x < \varepsilon \Leftrightarrow x > 1/\varepsilon$ On peut alors prendre $A = 2/\varepsilon$

Si $x < 0$, $|1/x - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow -\frac{1}{x} < \varepsilon \Leftrightarrow x < \frac{-1}{\varepsilon}$

On peut prendre $A = -\frac{1}{\varepsilon} - 1$

On a donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

Souvent il est plus facile de calculer $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)$ pour une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \infty$.

Considérons $f(x) = \sin(x)$. f d.v. ∞.

Considérons $x_n = \pi n$. Clairement, $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$

et $f(x_n) = \sin(n\pi) = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Si $y_n = \pi/2 + 2n\pi$, $\lim_{n\to\infty} y_n = \infty$

Mais $f(y_n) = \sin(\pi/2 + 2n\pi) = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

<u>Thm (caractérisation par les suites):</u> Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ d.v. ∞. On a équivalence entre les affirmations:

1) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \ell$

2) $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$ dès que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite t.q. $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ et que $x_n \in \mathrm{Def}(f)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

<u>Remarque:</u> L'intérêt de ce thm réside dans sa négation, i.e., si on a $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty = \lim_{n\to\infty} y_n$ et si $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(y_n)$, alors $\lim_{x\to\infty} f(x)$ n'existe pas. (voir l'exemple $f(x) = \sin(x)$).

preuve (du thm): on va prouver non 1) $\Rightarrow$ non 2) et non 2) $\Rightarrow$ non 1)

non 1) $\Rightarrow$ non 2): Supposons que $\lim_{x \to \infty} f(x) \neq \ell$

Cela veut donc dire:

$\exists \varepsilon > 0$ t.q. $\forall A > 0$, $\exists x \geq A$ t.q. $|f(x) - \ell| \geq \varepsilon$

Cela veut donc dire, que si $A = n$, il existe $x_n \geq n$ t.q. $|f(x_n) - \ell| \geq \varepsilon$.

On vient de trouver une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, t.q. $\lim_{n \to \infty} x_n = \infty$ et $|f(x_n) - \ell| \geq \varepsilon$

De plus, $\lim_{n \to \infty} f(x_n) \neq \ell$. On a donc non 2)

Montrons que non 2) $\Rightarrow$ non 1). Il existe donc une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, t.q. $\lim_{n \to \infty} x_n = \infty$ et $\lim_{n \to \infty} f(x_n) \neq \ell$. Donc,

$\exists \varepsilon > 0$, t.q. $\forall N \in \mathbb{N}$, $\exists n \geq N$ t.q. $|f(x_n) - \ell| \geq \varepsilon$

Soit $A > 0$. Il existe $N > A$. Il existe donc $n \geq A$ t.q. $|f(x_n) - \ell| \geq \varepsilon$. Comme $\lim_{n \to \infty} x_n = \infty$, on peut choisir $x_n \geq A$ aussi.

Donc, il est faux de dire que $\forall x \in [A, \infty[$

$|f(x)-\ell|<\varepsilon$. Comme A était arbitraire, on ne peut pas vérifier la définition de la limite pour $f(x)$. On a donc non 1) $\square$.

Déf: On dit que $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ diverge vers ∞, et on note $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, ssi

$$\forall A>0,\ \exists B>0 \text{ t.q. } x\geq B \Rightarrow f(x)\geq A$$

Variantes:

- $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

$\Leftrightarrow \forall A<0,\ \exists B>0$ t.q. $x\geq B \Rightarrow f(x)\leq A$

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

$\Leftrightarrow \forall A>0,\ \exists B<0$ t.q. $x<B \Rightarrow f(x)\geq A$

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\Leftrightarrow \forall A<0,\ \exists B<0$ t.q. $x\leq B \Rightarrow f(x)\leq A$

Exemple: Montrons que $\lim_{x\to-\infty} x^2 = \infty$

Soit $A>0$. Étudions $x^2\geq A$

$\Leftrightarrow x\in\,]-\infty, -\sqrt{A}\,]\cup[\,\sqrt{A}, \infty[$.

On choisit $B = -3\sqrt{A}$ et on a bien
$x \leq B \Rightarrow x \leq -3\sqrt{A} \Rightarrow x < -\sqrt{A}$
$\Rightarrow x^2 > A$. L'arbitraire de A nous permet de conclure.

<u>Règles de calcul:</u> Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, d.v.$\infty$.

Supposons que $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = b$.

Alors

- $\lim_{x\to\infty} |f(x)| = |a|$ (sans réciproque !)
- $\lim_{x\to\infty} (f(x) \pm g(x)) = a \pm b$ (sans réciproque)
- $\lim_{x\to\infty} (f(x) \cdot g(x)) = a \cdot b$ (sans réciproque)
- $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = a/b$, si $b \neq 0$ (sans réciproque)

Supposons $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$ et $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$. Alors,

- $\lim_{x\to\infty} (f(x) \pm g(x)) = \pm\infty$
- $\lim_{x\to\infty} (f(x) \cdot g(x)) = \mathrm{sgn}(a) \cdot \infty$, si $a \neq 0$
- $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

<u>Attention :</u> ! Il existe des cas indéterminés :

Soient $f, g, h, k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ d.v.∞. Supposons

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty = \lim_{x\to\infty} g(x)$$

$$\lim_{x\to\infty} h(x) = 0 = \lim_{x\to\infty} k(x)$$, alors

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - g(x)), \quad \lim_{x\to\infty} f(x)\cdot h(x),$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{h(x)}{k(x)}, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$ sont tous

des cas sans règles générales.

Exemple : Calculons $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x} - (x-1)$

c'est du type "$\infty - \infty$", donc indéterminé.
Si on multiplie par l'expression conjuguée, on se ramène à

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x - (x^2-2x+1)}{\sqrt{x^2+x} + (x-1)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3x - 1}{\sqrt{x^2+x} + (x-1)} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3 - 1/x}{\sqrt{1+1/x} + 1 - \frac{1}{x}} = \frac{3}{1+1} = \frac{3}{2}$$

Exemple:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \begin{cases} \operatorname{sgn}\left(\frac{a_n}{b_m}\right)\infty & \text{si } n > m \\ \frac{a_n}{b_m} & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n < m \end{cases}$$

Donc,
$$\lim_{x\to\infty} \frac{10x^{20} + 9x^{19} + 37x^2}{-7x^{18} + 3x^4 + 1} = -\infty$$

Thm des gendarmes: Soient $d, f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ d.v. ∞. Supposons que

- $\exists M \in \mathbb{R}, \; x \geq M \Rightarrow g(x) \leq f(x) \leq d(x)$
- $\lim_{x\to\infty} g(x) = \ell = \lim_{x\to\infty} d(x)$.

Alors
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \ell.$$

preuve: Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$,
$x_n \in \operatorname{dom}(f) \cap \operatorname{dom}(g) \cap \operatorname{dom}(d)$ et
$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$

On a donc pour $n \geq N$ t.q. $x_n \geq M$

$$g(x_n) \leq f(x_n) \leq d(x_n).$$

Par le théorème des gendarmes pour les suites, on a

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \ell.$$

Puisque le raisonnement est valable pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ t.q $\lim_{n \to \infty} x_n = \infty$, on conclut par la caractérisation par les suites, que $\lim_{x \to \infty} f(x) = \ell$ $\square$

Exemple : $f(x) = \dfrac{x}{E^2(\sqrt{x})} = \dfrac{x}{\lfloor \sqrt{x} \rfloor^2}$

On remarque que

$$\sqrt{x} - 1 \leq \lfloor \sqrt{x} \rfloor \leq \sqrt{x}$$

si x est suffisamment grand (on s'intéresse à $x \to \infty$) on a que

$$(\sqrt{x} - 1)^2 \leq \lfloor \sqrt{x} \rfloor^2 \leq x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(\sqrt{x}-1)^2} \geq \frac{1}{\lfloor \sqrt{x} \rfloor^2} \geq \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{(\sqrt{x}-1)^2} \geq \frac{x}{\lfloor \sqrt{x} \rfloor^2} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{x - 2\sqrt{x} + 1} \geq \frac{x}{\lfloor \sqrt{x} \rfloor^2} \geq 1$$

Or, $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x}{x-2\sqrt{x}+1} = 1 = \lim_{x\to\infty} 1$

On en conclut par le thm des gendarmes, que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\lfloor\sqrt{x}\rfloor^2} = 1$$

Corollaire: Si $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ d.v. ∞ et si $\lim_{x\to\infty} |f(x)| = 0$. Alors $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

preuve: Clairement,

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \quad \text{et}$$

on applique le thm des gendarmes $\square$.

Thm du gendarme: Soient $f,g: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, d.v. ∞

Si $\exists M$ t.q $x \geq M \Rightarrow g(x) \leq f(x)$ et si $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$, alors

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

$\square$

Thm ("0 x borné"): Soient $f,g: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, d.v. ∞ et que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ et que $|g(x)| \leq B$ si $x \geq x_B$. Alors $\lim_{x\to\infty} f(x)\cdot g(x) = 0$

preuve: pour $x \geq x_B$

$$0 \leq |f(x)| \cdot |g(x)| \leq |f(x)| \cdot B .$$

Par les gendarmes, $\lim_{x \to \infty} |f(x) \cdot g(x)| = 0$.

Par le corollaire précédent, $\lim_{x \to \infty} f(x) \cdot g(x) = 0$

$\square$

Exemple: Calculer $\lim_{x \to \infty} \frac{\sin(x)}{x}$

On a $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$ et $|\sin(x)| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Donc, $\lim_{x \to \infty} x^{-1} \cdot \sin(x)$ est du type "$0 \times$ borné"

et converge vers 0.

Thm ("$\infty \times$ loin de 0"): Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, d.

Supposons que $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$. et $\exists\, m, x_0 \in \mathbb{R}$

t.q. si $x \geq x_0$, $g(x) \geq m > 0$ ("loin de 0")

Alors $\lim_{x \to \infty} f(x) \cdot g(x) = \infty$

preuve: conséquence de "$0 \times$ borné" appliqué à

$\frac{1}{f(x)}$ ("0") $\times$ $\frac{1}{g(x)}$ ("borné"). $\square$.

Contre-exemple: $f(x) = x^2$, $g(x) = \frac{1}{x^2}$

On a bien que $\lim\limits_{x \to \infty} x^2 = \infty$ ✓.

<u>Mais</u> $g(x) = \frac{1}{x^2}$ n'est pas "loin de 0".

$\nexists\, m > 0$ t.q. $\forall x \in \mathrm{dom}(g)$, $g(x) \geq m$ si $x \geq x_0$

et $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) \cdot g(x) = 1 \neq \infty$

Exemple: Calculer $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x\cdot\sin(x)}{(\cos(x)-2)(x+\sqrt{x^4+x^2})}$

par division par x, on se ramène à

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin(x)}{(\cos(x)-2)(1+\sqrt{x^2+1})}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \underbrace{\frac{\sin(x)}{\cos(x)-2}}_{\text{bornée}} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+\sqrt{x^2+1}}}_{\xrightarrow[x\to\infty]{} 0}$$

On est dans le cas "borné $\times$ 0". Donc, la limite égale 0.

Exemple: Calculer $\displaystyle\lim_{x\to\infty} 2x^2+x^2\sin(x)$

On a par factorisation le calcul de

$$\lim_{x\to\infty} \underbrace{x^2}_{\xrightarrow[x\to\infty]{}\infty}\underbrace{(2+\sin(x))}_{\text{"loin de 0"}\ \in [1,3]}$$

On est dans le cas "$\infty \times$ loin de 0"

et donc, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} (2x^2+x^2\sin(x)) = \infty$

Thm ("∞ + borné"): Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, d.v.$\infty$.

Supposons que
- $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$
- $\exists\, x_0$ t.q. $x \geq x_0$, $b \leq g(x) \leq B$

Alors $\lim_{x \to \infty} (f(x) + g(x)) = \infty$

Exemple: $\lim_{x \to \infty} (x - \sin(x)) = \infty$,

car $\lim_{x \to \infty} x = \infty$ et $-1 \leq -\sin(x) \leq 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$

§ 3.3. Limites de fonctions en $x_0 \in \mathbb{R}$

Exemple introductif: Considérons $g(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2}{x - 2}$.

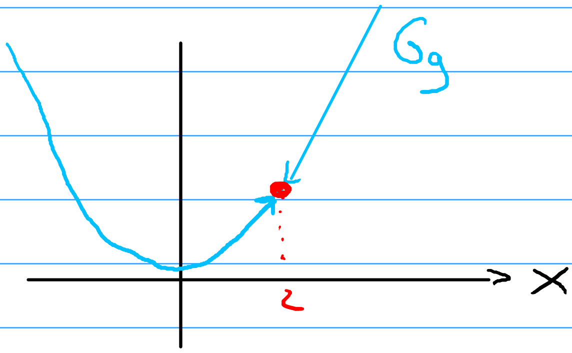
$Def(g) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Peut-on calculer

$\lim_{x \to 2} g(x)$, alors que $2 \notin Def(g)$. ?

On remarque que si $x \neq 2$,

$g(x) = \dfrac{x^2(x-2)}{(x-2)} = x^2$. On conclut que

$\lim_{x \to 2} g(x) = 4$.



Autre exemple: $g(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, $Def(g) = \mathbb{R}^*$

Par un argument trigonométrique, on peut montrer que $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

Déf: Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Un <u>voisinage épointé</u> de x_0 est un voisinage de x_0, privé de x_0.

Exemple: $]2,10[\cup]10,12[=]2,12[\setminus \{10\}$ est un voisinage épointé de 10.

Déf: Une fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite <u>définie sur un voisinage épointé de x_0</u>, et on notera <u>d.v. x_0</u>, ssi $\exists\, \delta > 0$, t.q.

$$]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\} \subset Def(f)$$

Exemples:

- $\frac{\sin(x)}{x}$, $\frac{\cos(x)}{x-1}$ sont d.v. 0 et d.v. 1 respectivement.
  $\tan(x)$ est d.v. $\pi/2$ et d.v. $\frac{3\pi}{2}$.
- $x \mapsto x^2$ est aussi d.v. 2, car $]1,3[\setminus \{2\} \subset Def(x^2) = \mathbb{R}$

Déf: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ d.v. x_0. On dit que la limite de $f(x)$ quand x tend vers x_0 égale ℓ, et on note $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$, ssi

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \ \text{t.q} \ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

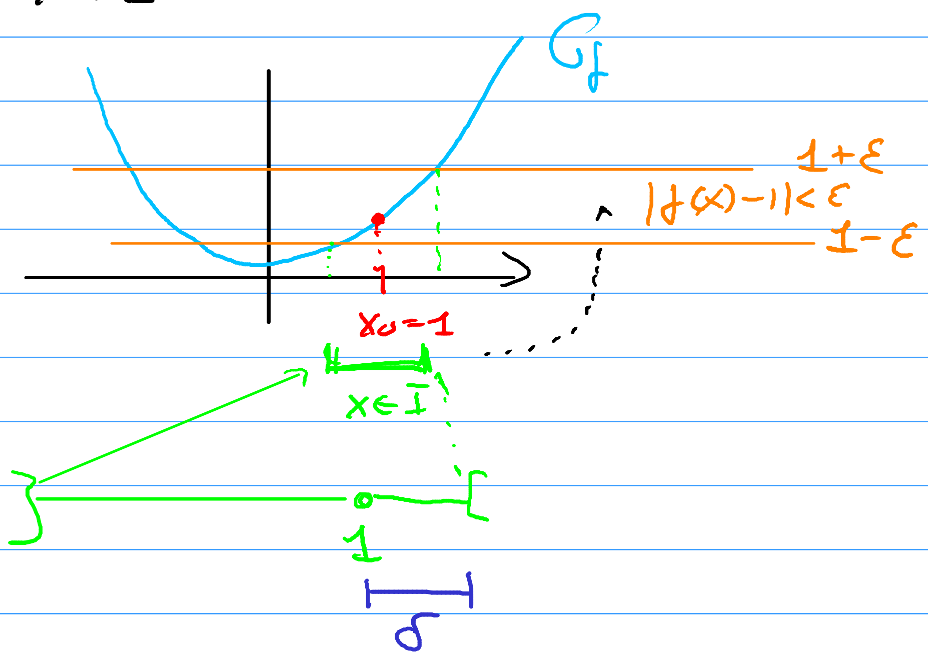
Exemple: $f(x) = x^2$, $x_0 = 1$.

$D_f = \mathbb{R} \supset \,]1-\delta, 1+\delta[\setminus \{1\} \quad \forall \delta > 0.$

donc, f d.v. 1.

On devine que $\lim_{x \to 1} f(x) = 1$.

graphiquement



On cherche à avoir $(1+\delta)^2 < 1 + \varepsilon$

$\Leftrightarrow \quad 1 + \delta < \sqrt{1+\varepsilon} \Rightarrow \delta < \sqrt{1+\varepsilon} - 1$

On peut prendre p.ex $\delta = \dfrac{\sqrt{1+\varepsilon} - 1}{2}$

Vérifions que $x \in \left]1-\frac{\sqrt{1+\varepsilon}-1}{2}, 1+\frac{\sqrt{1+\varepsilon}-1}{2}\right[\setminus \{1\}$

alors $|f(x)-1| < \varepsilon$.

En effet,

$$1-\frac{\sqrt{1+\varepsilon}-1}{2} < x < 1+\frac{\sqrt{1+\varepsilon}-1}{2}$$

$$\Rightarrow 1-(\sqrt{1+\varepsilon}-1) + \frac{1+\varepsilon-2\sqrt{1+\varepsilon}+1}{4} < x^2 < 1+\sqrt{1+\varepsilon}-1 + \frac{1+\varepsilon-2\sqrt{1+\varepsilon}+1}{4}$$

$$\Rightarrow 2-\frac{1}{2}\sqrt{1+\varepsilon}+\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{4} < x^2 < \frac{1}{2}\sqrt{1+\varepsilon}+\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1+\varepsilon}+\frac{\varepsilon}{4} < x^2-1 < \frac{\varepsilon}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{1+\varepsilon}-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -\varepsilon < x^2-1 < \varepsilon$$

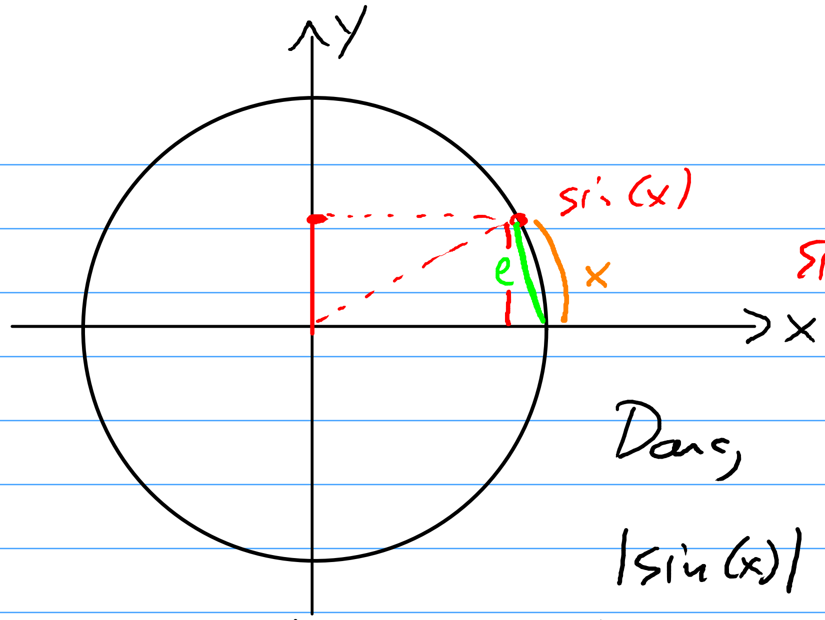
$$\Rightarrow |x^2-1| < \varepsilon$$

Puisque ε est arbitraire, $\underline{\lim_{x\to 1} x^2 = 1}$

<u>Exemple:</u> <u>$f(x) = \sin(x)$, $x_0 = 0$</u>

$\mathrm{Def}(\sin) = \mathbb{R}$ qui est d.v. 0. On devine que $\lim_{x\to 0} \sin(x) = 0$

<u>On pose $\varepsilon > 0$:</u>



$\sin(x) < \ell < x$

Donc, $\forall x \in \mathbb{R}^*$,

$|\sin(x)| < |x|$

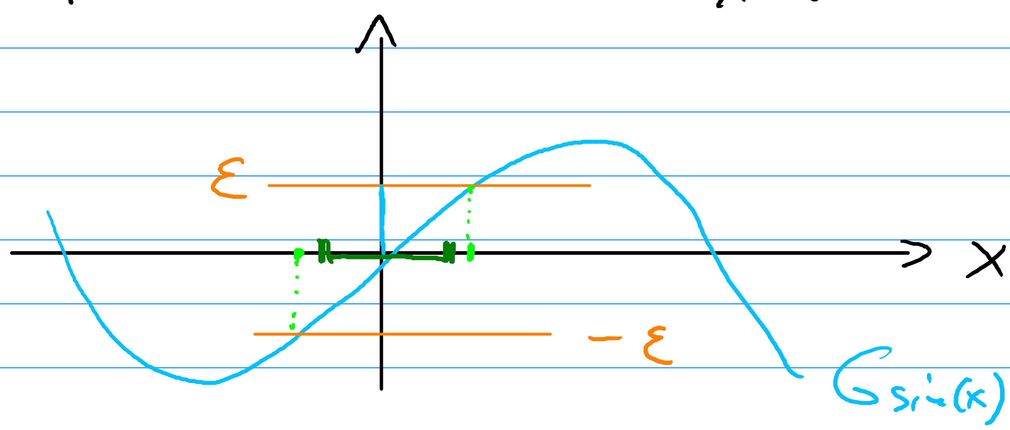
$\Rightarrow |\sin(x) - 0| < |x - 0|$

On peut donc poser $\delta = \varepsilon$ et on a

$0 < |x| < \delta$ alors

$0 < |\sin(x)| < |x| < \delta = \varepsilon$

On peut donc affirmer, $\lim\limits_{x \to 0} \sin(x) = 0$



<u>Exemple:</u> $f(x) = \cos(x)$, $x_0 = 0$ $\quad$ $Def(\cos) = \mathbb{R}$

donc, $\cos(x)$ d.v. 0. Montrons $\lim\limits_{x \to 0} \cos(x) = 1$

<u>Soit $\varepsilon > 0$:</u>

On peut estimer

$$\varepsilon > |1-\cos(x)| = 1-\cos(x)$$
$$= 1-\cos\left(2\cdot\frac{x}{2}\right) = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

Donc, si $\left|\frac{x}{2}\right| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$, alors

$$\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} > \sin\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow \frac{\varepsilon}{2} > \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$
$$\Rightarrow \varepsilon > 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1-\cos(x)$$

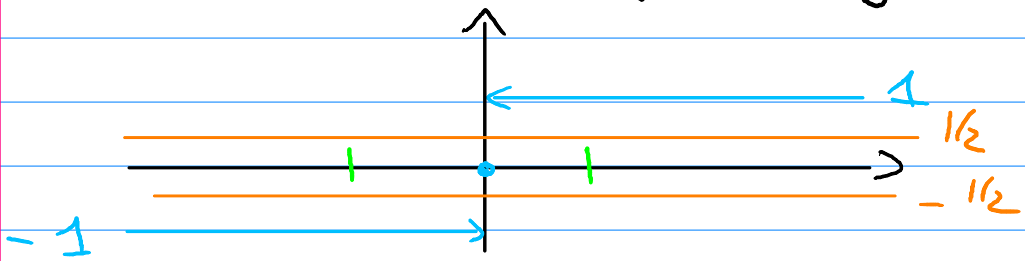
On peut donc choisir $\delta = \sqrt{2\varepsilon}$.

Ainsi, $0 < |x| < |2\varepsilon|^{1/2} \Rightarrow |\cos(x)-1| < \varepsilon$

Donc, $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$ t.q.

$$0<|x-0|<\delta \Rightarrow |\cos(x)-1| < \varepsilon$$

<u>Contre-exemple:</u> $\underline{f(x) = \mathrm{sgn}(x)}$, $x_0 = 0$



Prenons $\varepsilon = 1/2$. Pour un intervalle $]-\delta,\delta[\setminus\{0\}$

si $0<|x|<\delta$ $\mathrm{sgn}(x) = 1$ ou

$\mathrm{sgn}(x) = -1$

Donc, $\forall x \in\ ]-\delta,\delta[\setminus\{0\}$, $|f(x)| \geq 1 > \frac{1}{2}$

Donc, $|f(x)-0| > \varepsilon$ et

$$\lim_{x\to 0} \mathrm{sgn}(x) \neq 0$$