Algèbre élémentaire : série supplémentaire

1. Résoudre par rapport à $x \in \mathbb{R}$:

a) $\frac{1}{4}x - \frac{1}{12}x + \frac{2-x}{3} = -\frac{5}{6}x + \frac{1}{24}$
b) $\frac{3-x}{4} + x \leq \frac{1+x}{x} + 2$
c) $\sqrt{2} \geq \frac{x}{x+1}$
d) $|3x^2 - 4x - 12| < -3x^2 + 2x$
e) $\sqrt{\frac{-3}{|x+5|-3}} < 3$

2. Résoudre par rapport à $x \in \mathbb{R}$ et en fonction de $m \in \mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$x = \frac{3x}{m-2} + m + 1, \quad m \neq 2.$$

3. Résoudre par rapport à $x \in \mathbb{R}$ et en fonction de $m \in \mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$$\frac{2m - mx}{m+1} > 0, \quad m \neq -1.$$

4. Résoudre par rapport à $x \in \mathbb{R}$ et en fonction de $m \in \mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$$\frac{3m^2 + 3m}{x + 3m} \leq m + 1.$$

5. Résoudre par rapport à $x \in \mathbb{R}$ et en fonction de $m \in \mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$$mx^2 + 2(m+2)x + 8 \geq 0, \quad m \neq 0.$$

6. Résoudre par rapport à $x \in \mathbb{R}$ et en fonction de $m \in \mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$|mx^2 - 5x| = mx^2.$$

7. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante par rapport à la variable x en fonction du paramètre réel m.

$$\left| x^2 + 4x + 2 - m^2 \right| = m^2 - x^2 .$$

8. Résoudre par rapport à $x \in \mathbb{R}$ et en fonction de $m \in \mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$$\sqrt{x^2 + 2mx} \leq x + 2m.$$

9. Pour chaque proposition, dire si elle est vraie ou fausse :

a) Tout nombre réel est solution de l'équation $\frac{x+1}{x+1} = 1$.
b) Soit $a \in \mathbb{R}$. L'équation $|x| = a$ admet toujours une solution.
c) Si un trinôme $P(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$, est tel que $P(1) > 0$ et $P(-1) < 0$, alors son discriminant est strictement positif.
d) Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Si $\sqrt{a}$ est un nombre irrationnel, alors $\sqrt{a} + 1$ aussi.
e) Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $a = \operatorname{sgn}(a) \sqrt[n]{(\operatorname{sgn}(a)a)^n}$.
f) L'ensemble solution de l'inéquation $|-x^2 + 3x - 2| > 0$ est $S =]1, 2[$.

Réponses

1. a) $S = \{\frac{-15}{16}\}$

b) $S =]-\infty, \frac{9-\sqrt{129}}{6}] \cup]0, \frac{9+\sqrt{129}}{6}]$

c) $S = \left]-\infty, \frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\right] \cup]-1, +\infty[$

d) $S = \emptyset$

e) $S =]-\frac{23}{3}, -\frac{7}{3}[$

2.
- $m = 5 : S = \emptyset$
- $m \notin \{2, 5\} : S = \left\{\frac{(m+1)(m-2)}{m-5}\right\}$

3.
- $m \in]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[: S =]-\infty, 2[$
- $m \in]-1, 0[: S =]2, +\infty[$
- $m = 0 : S = \emptyset$

4.
- $m \in]-\infty, -1[: S = [0, -3m[$
- $m = -1 : S = \mathbb{R} \setminus \{3\}$
- $m \in]-1, 0[: S =]-\infty, 0] \cup]-3m, +\infty[$
- $m = 0 : S = \mathbb{R}^*$
- $m \in]0, +\infty[: S =]-\infty, -3m[\cup [0, +\infty[$

5.
- si $m < 0$, $S = [-2, \frac{-4}{m}]$
- si $m \in]0, 2[$, $S =]-\infty, \frac{-4}{m}] \cup [-2, +\infty[$
- si $m = 2$, $S = \mathbb{R}$
- si $m > 2$, $S =]-\infty, -2] \cup [\frac{-4}{m}, +\infty[$.

6.
- $m \in]-\infty, 0] : S = \{0\}$
- $m \in]0, +\infty[: S = \{0, \frac{5}{2m}\}$

7.
- si $m \in]-\infty, -\frac{1}{2}]$, alors $S = \{-1-m, -\frac{1}{2}\}$,
- si $m \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$, alors $S = \emptyset$,
- si $m \in [\frac{1}{2}, +\infty[$, alors $S = \{-1+m, -\frac{1}{2}\}$.

8.
- $m \in]-\infty, 0[: S = \{-2m\}$
- $m = 0 : S = \mathbb{R}$
- $m \in]0, +\infty[: S = \{-2m\} \cup [0, +\infty[$

9. a) Faux. b) Faux. c) Vrai. d) Vrai. e) Vrai. f) Faux.